

Universidad de los Andes
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Postgrado de Matemáticas
Mérida

Aspectos Geométricos de la Teoría de Yang-Mills

Nieves M. Vilchez González.

DOÑACION

SERBIULA
Tulio Febres Cordero

Mérida, Junio de 1996.

Aspectos Geométricos de la Teoría de Yang-Mills

Autor: Nieves M. Vilchez González.

TRABAJO DE GRADO, PRESENTADO A LA ILUSTRE UNIVERSIDAD DE LOS ANDES, COMO REQUISITO PARA OPTAR AL TITULO DE MAGISTER SCIENTIARUM EN MATEMATICAS. ESTE TRABAJO FUE DIRIGIDO POR LA DRA. GLORIA SANCHEZ DE ALVAREZ.

Universidad de Los Andes
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas.
Postgrado de Matemáticas.
Mérida, Junio de 1.996.

Dedicatoria

- A mis hijos, Grecia y Juan Manuel, por existir y llenar de amor y ternura esta etapa de mi vida.
- A mis padres: Olga y Juan A., quienes junto a mis hermanos: Gladys, Leyda, Alis, Yaneth y Luis, me han brindado cariño y apoyo en todo momento.
- A tí Atilio, por lo que representas en mi vida, por tu compañía y estímulo para seguir adelante.
- A la memoria de mi hermana Naybelin.
- A mis profesores, amigos y compañeros particularmente a los profesores Edgar Sánchez, Edgar Iturriaga, y Narvis Vivas, con quienes compartí experiencias buenas y malas a lo largo de mis estudios de maestría.

Nieves.

Agradecimiento

Al grupo de Geometría y Análisis, quienes con su entusiasmo y dedicación mantienen el desarrollo del área. Particularmente a la Dra. Gloria Sanchez, quien con su ayuda, enseñanza y acertadas sugerencias hizo posible la elaboración de esta tesis.

Agradezco, a mi amigo Edgar Iturriaga, por las innumerables muestras de compañerismo, camaradería y apoyo para la culminación de mi trabajo.

Al Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias de la U.L.A., por su receptividad durante mi permanencia en el Postgrado, en especial a la Sra. Elíde Ramírez

A las autoridades, compañeros del Departamento de Física y Matemáticas del N.U.R.R, quienes dieron su aval, para la obtención de una beca para terminar mis estudios de Maestría.

Al C.D.C.H.T. por su financiamiento al proyecto de tesis, con código: 782-96-05.EM.

Al bachillér Angel Pérez, quien con paciencia y dedicación tuvo a cargo la transcripción de esta tesis.

Resumen

ASPECTOS GEOMÉTRICOS DE LA TEORIA DE YANG - MILLS

Vilchez González, N

Postgrado de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la U.L.A.

Formular la teoría de Yang-Mills en el marco del lenguaje y las herramientas de la geometría diferencial, para ello se desarrollaran las nociones básicas de los espacios fibrados, de los grupos de Lie ($U(1), SU(2)$), de los grupos de calibre, conexiones (potenciales de calibre), curvatura de una conexión, (Campo electromagnético, Campo de Yang-Mills). Se identifica el grupo de las transformaciones de calibre en un fibrado principal P con el conjunto de las secciones de un fibrado asociado B . La 1ra Ecuación de Yang-Mills (análoga a las ecuaciones homogéneas de Maxwell), se presenta como un caso particular de la Identidad de Bianchi, que relaciona el concepto de derivada covariante con la curvatura de una conexión, simultáneamente hacemos un enfoque desde el punto de vista del cálculo variacional, donde aparece la 2da Ecuación de Yang-Mills (análoga a las ecuaciones no-homogeneas de Maxwell) como la Ecuación de Lagrange para un lagrangiano particular.

Contenido

Resumen	v
Introducción	viii
1 Espacios Fibrados	1
1.1 Introducción	1
1.2 Fibrados Vectoriales	6
1.3 Fibrados Principales	12
1.4 Fibrados Asociados	26
2 Conexión y Curvatura	37
2.1 Introducción	37
2.2 Conexiones sobre fibrados principales	38
2.3 Curvatura sobre Fibrados Principales	48
2.3.1 Algebra de Lie de los k -formas con valores en \mathcal{G}	49
2.3.2 Curvatura	52
2.4 Conexión y Curvatura sobre Fibrados Asociados	64
2.5 Derivada Exterior Covariante en un Fibrado Asociado	71
2.6 Curvatura en un Fibrado Asociado	72
3 Geometría de Yang-Mills	75
3.1 Introducción	75
3.2 Grupo de Calibre	75
3.3 Algebra de Lie de \mathfrak{g}	79

3.4	Conexión de Yang-Mills	82
3.5	Ecuaciones de Yang-Mills	92
A Ecuaciones de Euler-Lagrange		97
A.1	Introducción	97
A.2	Cálculo de Variaciones	98
A.3	Extremales	100
A.4	Ecuación Euler-Lagrange	101
A.5	Principio de “Hamilton” de Acción Mínima	102
B Grupo de Lie y Algebras de Lie		104
B.1	Introducción	104
Conclusiones		108
Bibliografía		110
Símbolos		114
Indice		117

Introducción

La teoría de calibre más antigua que se conoce está enmarcada dentro de la electrodinámica, desarrollada y descrita por H. Weyl en 1919, quien trabaja en el contexto del electromagnetismo y considera el grupo local de las transformaciones punto-dependientes y lo llama grupo de calibre, introduce además el concepto de transformación de calibre. La escogencia de las dilataciones como grupo de calibre tiene sus fallas y es entonces en 1929 cuando A. Fock toma como grupo de calibre el grupo abeliano $U(1)$. En 1939 O. Klein hace algunas consideraciones sobre teoría de calibre no abeliana.

Años después, C.N. Yang y R.L. Mills en 1954 [32], introduce una generalización de los desarrollos de Weyl, el cual nos lleva a una teoría de calibre no abeliana, usando el grupo $SU(2)$.

Actualmente la teoría de calibre tiene un gran atractivo y considerable interés en el campo de la Física de las partículas y la teoría de gravitación. Uno de los cuales ha sido en efecto la unificación de la teoría electromagnética y las interacciones débiles ([3],[8],[18],[20],[22],[30]). Recientemente se han desarrollado modelos de interacciones de partículas elementales en término de la teoría de calibre no abeliana, particularmente el estudio de los monopolos ([33]). Wu y Yang en 1975 ([31]) observan que las estructuras geométricas y topológicas de los monopolos de Dirac están descritas de una manera ejemplar por los espacios fibrados y las conexiones asociados a ellos. Un análisis completo de la teoría de fibrados y sus conexiones se consigue en

([6],[15],[16],[21],[25],[26]) entre otros.

Por otra parte las interacciones gravitacionales pueden ser enmarcadas dentro del esquema de los campos de Yang-Mills, los cuales desde el punto de vista de la geometría diferencial pueden ser representados por la curvatura de una conexión sobre un fibrado principal. ([3],[7],[8],[18],[15],[21]).

Además autores como ([3],[8],[12],[18],[27]) hacen una formulación lagrangiana para la teoría de calibre para llegar a describir las ecuaciones de Maxwell en el caso abeliano y las ecuaciones de Yang-Mills en el caso no abeliano como un problema variacional sobre un fibrado, estos ven las ecuaciones como las ecuaciones de Euler-Lagrange para un cierto lagrangiano.

Estamos particularmente interesados en observar las relaciones básicas entre la teoría geométrica de conexiones en fibrados principales y fibrados asociados y la teoría de los campos de Yang-Mills y sus transformaciones de calibre ([7],[8],[15],[21],[27]).

Daremos una descripción geométrica de los campos de calibre y para ello veremos en que sentido los potenciales de calibre representan una conexión (conexión en la teoría de Yang-Mills ([32]), en un fibrado principal y los correspondientes campos de calibre están asociados a la curvatura de la conexión. Observaremos que tanto las transformaciones de calibre como las Ecuaciones de movimiento tienen un caracter global cuando se definen un término de operaciones en un espacio fibrado.

Con las herramientas presentadas (capítulo 1 y 2) podemos llegar a dar una formulación matemática de las Ecuaciones de Yang-Mills (capítulo 3), como

las Ecuaciones de Euler-Lagrange (ver apéndice A), para un Lagrangiano particular sobre el espacio de las conexiones las cuales están relacionadas con un campo de partículas ¹ ($\varphi : P \rightarrow V$), identificados con las secciones de un fibrado vectorial asociado.

Consideramos una teoría de calibre no abeliana ($G = SU(2)$), definidas sobre $M = \mathbb{R}^4$ y donde el fibrado principal que describe la teoría de Yang-Mills es $P(\mathbb{R}^4, SU(2))$.

Tomaremos como pre-requisitos, las nociones sobre Variedades diferenciables, Grupos de Lie, acción de un grupo sobre una variedad y álgebras de Lie. ([1],[4],[15],[21],[25]).

En el primer capítulo se desarrollan los conceptos sobre los espacios fibrados: vectoriales, principales y asociados. En el capítulo 2 se trabaja fundamentalmente en la teoría de conexiones y curvatura de los fibrados principales y fibrados vectoriales asociados a un fibrado principal y en capítulo 3 se presentan las definiciones de la teoría de calibre (Yang-Mills) en el contexto de los espacios fibrados, finalizando el capítulo con las Ecuaciones de Yang-Mills.

Adicionalmente se presentan dos Apéndice con las herramientas básicas del cálculo Variacional, la Ecuación de Euler-Lagrange, Grupos de Lie y Álgebras de Lie.

¹En cuanto a los campos de partículas se puede decir que tienen propiedades teóricas de grupos, que ellos pertenecen al mismo espacio vectorial V de dimensión n , el cual está representado por el grupo G . El grupo G actúa sobre el espacio V , vía la representación ρ (que puede ser representación vectorial o tensorial) y pueden ser matrices reales o complejas. Si asumimos que la representación es de dimensión 2 es real (o compleja) entonces el espacio vectorial V está representado por matrices que pertenecen a $Gl(2, \mathbb{R})$ (ó $Gl(2, \mathbb{C})$).[22]

Espacios Fibrados

1.1 Introducción

Un fibrado es, por así decirlo, un espacio topológico el cual luce localmente como un producto directo de dos espacios topológicos. [21].

Muchos conceptos importantes en física son interpretados en términos de la geometría de los espacios fibrados. La Teoría de electromagnetismo de Maxwell y la teoría de Yang-Mills son esencialmente teorías de conexiones sobre fibrados principales con un grupo de calibre dado G como la fibra. La teoría de Gravitación de Einstein trata de la conexión de Levi-Civita sobre el fibrado de las bases (Frame bundle) de la variedad espacio-tiempo, ([9],[21]). En esta primera parte definiremos las nociones de fibrado: fibrados vectoriales, fibrados principales y de los fibrados asociados y en particular los fibrados vectoriales asociados a un fibrado principal. ([6],[16]).

Consideraremos conocidos los conceptos básicos sobre variedades diferenciables, grupos de Lie, acción de un grupo sobre una variedad y álgebras de Lie. ([1],[3],[4],[16],[25],[29], Apéndice B).

Definición 1.1.1 [21] Un fibrado diferenciable (E, π, M, F, G) consta de los siguientes elementos.

- i) Una variedad diferenciable E llamada **espacio total**.
- ii) Una variedad diferenciable M llamada **espacio base**.
- iii) Una variedad diferenciable F llamada **la fibra**.
- iv) Una aplicación sobre $\pi : E \rightarrow M$ llamada **la proyección**, donde $\pi^{-1}(x) = F_x \cong F$ es llamada **la fibra en x** .
- v) Un grupo de Lie G llamado **el grupo de estructura** el cual actúa sobre F a la izquierda.
- vi) Un conjunto $\{U_i\}$ de cubrimientos abiertos de M con un difeomorfismo $\Psi_{U_i} : U_i \times F \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$ tal que $\pi \circ \Psi_{U_i}(x, f) = x$. La aplicación Ψ_{U_i} es llamada **trivialización local**, puesto que

$$\Psi_{U_i}^{-1} : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times F$$

es sobre.

- vii) Si $\Psi_{U_i}(x, f) = \Psi_{U_i, x}(f)$, entonces la aplicación

$$\Psi_{U_i, x} : F \rightarrow F_x$$

es un difeomorfismo.

Si consideramos $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, necesitamos que

$$\phi_{ij}(x) = \Psi_{U_i, x}^{-1} \circ \Psi_{U_j, x} : F \rightarrow F$$

sea un elemento de G .

Entonces Ψ_{U_i} y Ψ_{U_j} están relacionados por una aplicación suave (diferenciable)

$$\phi_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G$$

tal que

$$\Psi_{U_j}(x, f) = \Psi_{U_i}(x, \phi_{ij}(x)f).$$

Las aplicaciones $\{\phi_{ij}\}$ son llamadas las **funciones de transición**. Ellas satisfacen las relaciones de co-ciclo:

$$a) \phi_{ii}(x) = e$$

$$b) \phi_{ii}(x) = (\phi_{ij}(x))^{-1}$$

$$c) \phi_{ij}(x)\phi_{jk}(x) = \phi_{ik}(x)$$

para todo U_i, U_j, U_k abiertos tales que $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$.

Estas relaciones son características en el sentido que cualquier familia $\{\phi_{ij}\}$ de funciones sobre M con valores en G que satisfice esas relaciones son necesariamente las funciones de transición de algún fibrado.

Otra notación para indicar el fibrado es:

$$E \xrightarrow{\pi} M.$$

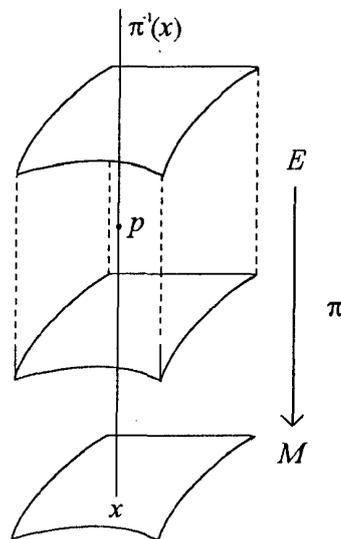


Figura 1.1:

Definición 1.1.2 Si Ψ_{u_i} es una trivialización local con $U = M$ (esto es: $\Psi_u : M \times G \rightarrow E$) entonces Ψ_M es llamada una trivialización global y el fibrado E es llamado trivial si Ψ_M existe.

Definición 1.1.3 [21] Una sección local de un fibrado E es una aplicación

$$\sigma : U \rightarrow E$$

$U \subset M$, U abierto, tal que $\pi \circ \sigma = I_U$ donde la identidad sobre U ($x \rightarrow x$). Una sección $\sigma : U \rightarrow E$, se llama sección global si $U = M$.

Ejemplos 1.1.4

a) Uno de los ejemplos más sencillos de fibrados se obtiene apartir de la banda de Möbius.

Sea $M = S^1 = \{z \in \mathbb{C}/|z| = 1\}$ y consideremos como fibra los puntos ± 1 , estos puntos forman un grupo bajo la multiplicación $G = \mathbb{Z}_2 = \{+1, -1\}$.

Tenemos entonces una fibra (\mathbb{Z}_2) que es un grupo variedad.

Las funciones de transición ϕ son elementos del grupo \mathbb{Z}_2 y actúa sobre la fibra $G \approx \mathbb{Z}_2$, por la multiplicación del grupo.

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 &\rightarrow \mathbb{Z}_2 \\ (g_1, g_2) &\mapsto g_1 g_2. \end{aligned}$$

Consideremos $M = S^1$ cubierto por dos entornos $U_1, U_2, (M = U_1 \cup U_2)$, donde $U_1 = S^1 - \{-1\}$ y $U_2 = S^1 - \{1\}$.

Podemos construir dos tipos de fibrados:

i) Si $\phi_1 = \phi_2$ es un fibrado trivial y $P = S^1 \times \mathbb{Z}_2$ (dos círculos, corresponde a la frontera de un cilindro (ver figura. 1.2)).

ii) Si $\phi_1 = -\phi_2$ es un fibrado no trivial, entonces $P =$ doble cubrimiento del círculo (corresponde a la frontera de la banda de Möbius (ver figura 1.3)).

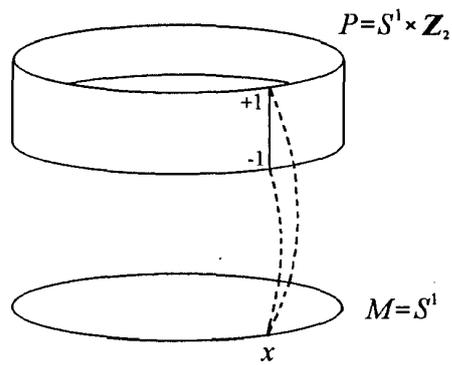


Figura 1.2:

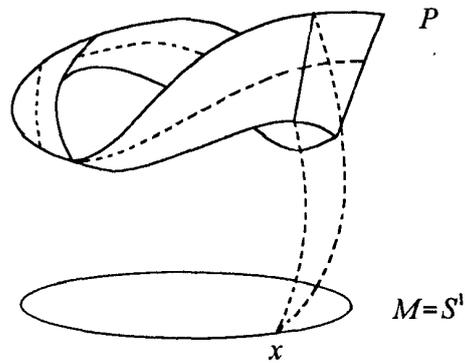


Figura 1.3:

A continuación estudiaremos los siguientes tipos de fibrados: vectoriales, principales y asociados a principales.

1.2 Fibrados Vectoriales

Un fibrado vectorial puede ser visto como una familia de espacios vectoriales parametrizados por una variedad y que salvo isomorfismos son localmente fibrados triviales que tienen como fibra espacios vectoriales V de dimensión finita y a $Gl(V)$ el grupo de automorfismos de V como grupo de estructura. Además se pueden describir globalmente mediante las llamadas funciones de transición ([6],[9],[21]).

Definición 1.2.1 ([21]) *Un fibrado vectorial $E \xrightarrow{\pi} M$ es un fibrado cuya fibra es un espacio vectorial. Si $F = \mathbb{R}^k$ y M es una variedad m -dimensional, es usual decir que k es la dimensión de la fibra y el espacio total E es una variedad $(m+k)$ -dimensional.*

Las funciones de transición $\{\phi_{ij}\}$ pertenecen a $G = Gl(k, \mathbb{R})$.

Puesto que ellos aplican, bajo isomorfismos espacios vectoriales sobre espacios vectoriales de la misma dimensión.

Si $F = \mathbb{C}^k$, entonces el grupo de estructura es $G = Gl(k, \mathbb{C})$.

Definición 1.2.2 ([5],[21]). *Una sección local de un fibrado vectorial es una aplicación*

$$S : U \longrightarrow E$$

tal que $U \subset M$, U abierto y

$$\pi \circ S = I_U$$

donde I_U identidad en U .

Al conjunto de secciones locales sobre U se denota por $\Gamma(U, E)$.

Si $U = M$, llamaremos a S una **sección global** y

$$S : M \longrightarrow E$$

es tal que

$$\pi \circ S = I_M \quad (\text{identidad en } M).$$

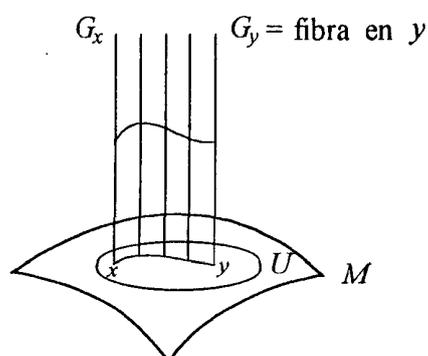


Figura 1.4:

Llamaremos $\Gamma(E)$ al conjunto de todas las secciones globales de E .

Si S_1 y $S_2 \in \Gamma(E)$ entonces

$$(S_1 + S_2)(x) = S_1(x) + S_2(x) \in \Gamma(E)$$

si $S \in \Gamma(E)$ y $f \in \mathcal{F}^\infty(M)$ (función escalar o compleja), entonces

$$(fS)(x) = f(x)S(x) \in \Gamma(E).$$

Así, $\Gamma(E)$ es un espacio vectorial.

Definición 1.2.3 ([5]) *Dados dos entornos U_i, U_j con $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Las funciones*

$$\begin{aligned} \phi_{ij} : U_i \cap U_j &\longrightarrow Gl(k, \mathbb{R}) \text{ ó } (Gl(k, \mathbb{C})) \\ x &\longrightarrow \phi_{ij}(x). \end{aligned}$$

son llamadas funciones de transición.

Si $\{U_1, U_2, \dots, U_i, \dots\}$ forman un cubrimiento de M las funciones de transición satisfacen las condiciones:

- i) $\phi_{ii}(x) = x$ (Identidad en U_i).
- ii) $\phi_{ij}(x)\phi_{ji}(x) = x$ (Identidad en $U_i \cap U_j \neq \emptyset$). (1.1)
- iii) $\phi_{ij}(x)\phi_{jk}(x)\phi_{ki}(x) = x$ (Identidad en $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$).

Se puede probar (véase [6]) que estas funciones de transición relativas al cubrimiento y que satisfacen (1.1) definen un fibrado vectorial.

Cualquier fibrado vectorial E admite una sección global llamada **sección nula**: $S_0 \in \Gamma(E)$, tal que para

$$\Psi_i : U_i \times V \longrightarrow \pi^{-1}(U_i)$$

cualquier T.L., se tiene:

$$\Psi_i^{-1}(S_0(x)) = (x, 0) \quad \text{para } x \in U_i.$$

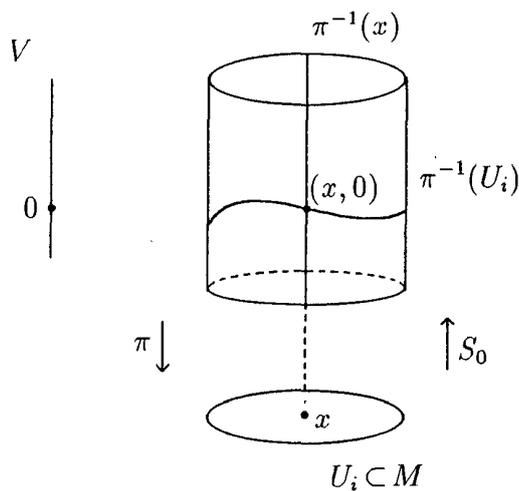


Figura 1.5:

Ejemplo 1.2.4

a) Consideremos el **fibrado tangente** TM sobre una variedad M de dimensión m , como la colección de todos los espacios tangentes a M :

$$TM \equiv \bigcup_{p \in M} T_p M$$

donde $M =$ espacio base y TM es el espacio total, este es un fibrado vectorial cuya fibra es \mathbb{R}^m , [21].

Sea $\{U_i\}$ un cubrimiento abierto de M .

Si $x^u = \Psi_{u_i}(x)$ son las coordenadas sobre U_i , entonces un elemento de

$$TU_i \equiv \bigcup_{x \in U_i} T_x M$$

está especificado por (x, V) donde $x \in M$ y el vector $V = V^u(x) \frac{\partial}{\partial x^u} \Big|_x \in T_x M$.

Notemos que:

U_i es homeomorfo a un conjunto abierto $\varphi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^m$ y $T_x M$ es homeomorfo a \mathbb{R}^m .

Por lo que podemos identificar $TU_i \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ así:

$$(x, V) \mapsto (x^u(x), V^u(x)).$$

TU_i es entonces una variedad diferenciable de dimensión $2m$.

Si $u \in TU_i$ entonces $u = (x, V)$ con $x \in U_i \subset M$ y $V \in T_x M$ y la proyección π es tal que:

$$\begin{aligned} \pi : TU_i &\longrightarrow U_i \\ u = (x, V) &\longrightarrow x \end{aligned}$$

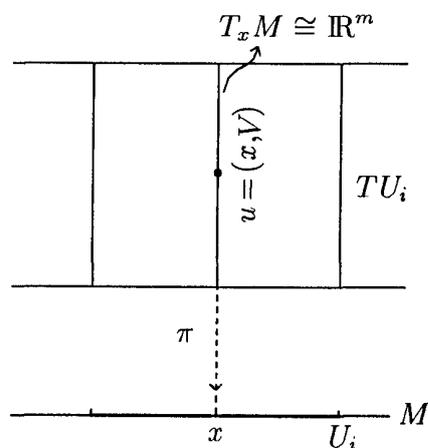


Figura 1.6:

donde $\pi^{-1}(x) = T_x M$ es la fibra sobre x .

Tomemos $y^u = \Psi_{U_j}(x)$ el sistema de coordenadas sobre U_j , el vector V correspondiente a $U = (x, V)$ se expresa:

$$V = V^u \frac{\partial}{\partial x^u} \Big|_x = \tilde{V}^u \frac{\partial}{\partial y^u} \Big|_x \quad x \in U_j.$$

Las trivializaciones locales serán:

$$\Psi_{U_i}^{-1} = (x, \{V^u\}), \quad \Psi_{U_j}^{-1} = (x, \{\tilde{V}^u\}) \quad x \in U_i \cap U_j.$$

Las coordenadas de las fibras $\{V^u\}$ y $\{\tilde{V}^u\}$ están relacionados por:

$$V^u = J_v^u(x) \tilde{V}^v.$$

donde $\{J_v^u(x)\} = \left\{ \left(\frac{\partial x^u}{\partial y^v} \Big|_x \right) \right\} \in GL(m, \mathbb{R})$ y

$$\left[\frac{\partial x_\alpha^u}{\partial y_\beta^v} \right]_{m \times n} = J_{\alpha\beta}(x)$$

serán entonces las funciones de transición.

Entonces el fibrado tangente es:

$$(TM, \pi, M, \mathbb{R}^m, GL(m, \mathbb{R}))$$

y las secciones de TM son los campos vectoriales sobre M :

$$X : M \longrightarrow TM \\ x \qquad X_x$$

donde $X_x \in T_x M$, ya que $\pi \circ X = I_M$.

Los cuales denotaremos por:

$$\mathfrak{X}(M) = \Gamma(M, TM)$$

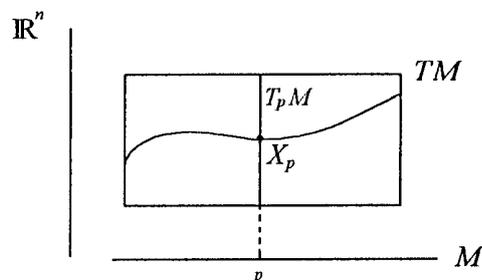


Figura 1.7:

1.3 Fibrados Principales

Estamos interesados particularmente, con aquellos fibrados, cuya fibra es un grupo de Lie, y que se llamarán fibrados principales. Nuestro objetivo principal es la teoría de calibre del tipo Yang-Mills (Teoría de calibre no abeliana), la cual se base en la teoría de conexiones sobre estos fibrados.

Definición 1.3.1 [3],[7],[16],[29] *Un fibrado principal (PFB) consiste en una variedad P , (llamada el espacio total). Un grupo de Lie G (grupo de estructura), la variedad base M y la aplicación proyección*

$$\pi : P \longrightarrow M$$

que satisfacen lo siguiente:

I) G actúa libremente (y diferenciablemente) sobre P , a la derecha esto es:

Para cada $g \in G$, existe un difeomorfismo $R_g : P \longrightarrow P$, donde $R_g(p) = pg$ y tal que $p(g_1g_2) = (pg_1)g_2 \quad \forall g_1, g_2 \in G$ y $p \in G$.

Si $e \in G$ es el elemento identidad de G entonces $pe = p \quad \forall p \in P$, donde la función:

$$\begin{aligned} P \times G &\longrightarrow P \\ (p, g) &\longrightarrow pg \end{aligned}$$

es una aplicación C^∞ y además si $pg = p$ para algún $p \in P$ y $g \in G$ entonces $g = e$.

II) La aplicación

$$\pi : P \longrightarrow M$$

es sobre y

$$\pi^{-1}(\pi(p)) = \{pg : g \in G\}$$

la cual es por definición la órbita de G a través de p .

Si $x \in M$, entonces la fibra sobre x , $\pi^{-1}(x)$ será denotada por G_x .

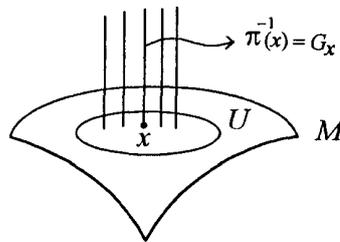


Figura 1.8:

Para cada $p \in \pi^{-1}(x)$, existe una aplicación

$$\begin{aligned} \Phi_p : G &\longrightarrow \pi^{-1}(x) \\ g &\longrightarrow pg. \end{aligned}$$

Entonces por I) dicha aplicación es un difeomorfismo entre el grupo G y la fibra $\pi^{-1}(x) = G_x$, pero depende de p . Así todas las fibras son difeomorfas a G .

III) P es localmente trivial, esto es, para cada $x \in M$, existe un abierto U tal que $x \in U$ y un difeomorfismo

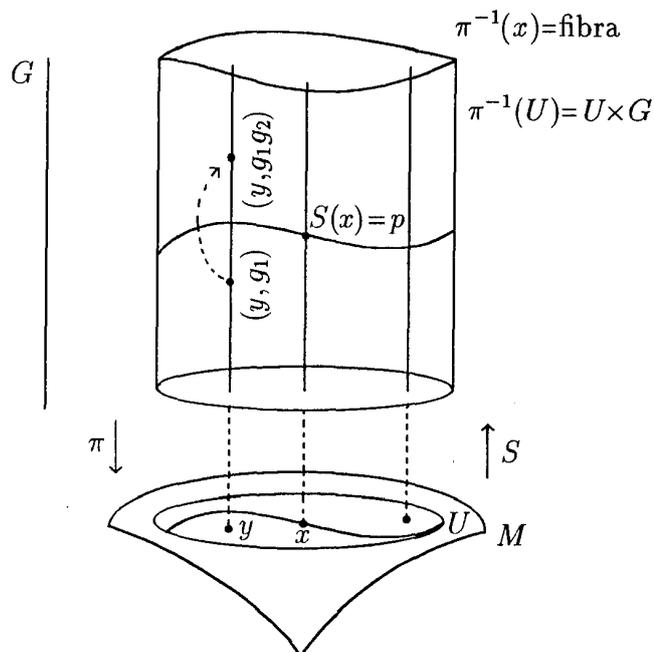
$$\begin{aligned} \Psi_U : \pi^{-1}(U) &\longrightarrow U \times G \\ p &\longmapsto (\pi(p), \varphi_U(p)) \end{aligned}$$

donde $\varphi_U : \pi^{-1}(U) \rightarrow G$ y satisface:

$$\varphi_U(pg) = \varphi_U(p)g \quad \forall g \in G, \quad p \in \pi^{-1}(U).$$

La aplicación Ψ_U es llamada una **trivialización local (TL)**, en el lenguaje de los físicos representa la selección de un **calibre**.

Figura 1.9:



Observaciones 1.3.2

a) Denotaremos $P(M, G)$ al fibrado principal con grupo G y generalmente se identifica con el espacio total P .

b) En los fibrados principales la variedad M puede ser considerada como el cociente del espacio total P por la acción del grupo G . Así:

Sea $\mathcal{R} = \{(p_1, p_2) \in P \times P / \exists g \in G \text{ tal que } p_1 g = p_2\}$ ésta es una relación de equivalencia y decimos que $M = \frac{P}{G}$.

Entonces
$$\pi : P \longrightarrow \frac{P}{G}.$$

c) Si consideramos un PFB $(P(M, G)$ por III), para cada $x \in M$ existe un entorno U de x tal que, si restringimos el PFB, $\pi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U$, podemos identificar (vía Ψ_U), $P(U, G)$ con el PFB, producto de U con G lo que nos dice que localmente:

$$P \Big|_U \cong U \times G.$$

Así, si $M = \bigcup U_i$, donde U_i entornos coordinados locales entonces P , se describe topológicamente en cada U_i , por la variedad producto $U_i \times G$.

Definición 1.3.3 [3] Sean $\Psi_{U_i} : \pi^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times G$ y $\Psi_{U_j} : \pi^{-1}(U_j) \longrightarrow U_j \times G$ dos trivializaciones locales (TL) de un PFB, $P(M, G)$. Las funciones de transición de Ψ_{U_i} a Ψ_{U_j} están dadas por las aplicaciones

$$\phi_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow G$$

definidas para $x = \pi(p) \in U_i \cap U_j$, así:

$$\phi_{ij}(x) = \varphi_{U_i}(p) \varphi_{U_j}^{-1}(p) \text{ donde } \varphi_{U_i} : \pi^{-1}(U_i) \longrightarrow G.$$

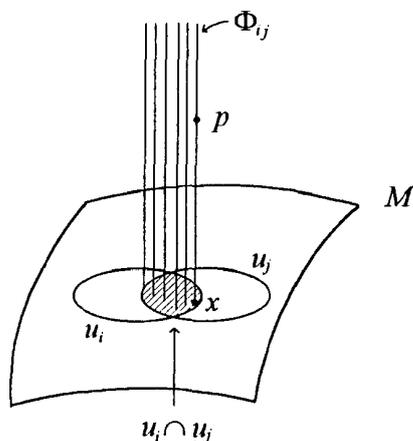


Figura 1.10:

Las funciones de transición definen las transformaciones de coordenadas de las fibras sobre U_i para aquellos sobre U_j en la región de solapamiento $U_i \cap U_j$.

Veamos que ϕ_{ij} no depende de la escogencia de $p \in \pi^{-1}(x)$.

$$\begin{aligned} \varphi_{U_i}(pg) \cdot \varphi_{U_j}(pg)^{-1} &= \varphi_{U_i}(p)g[\varphi_{U_j}(p)g]^{-1} \\ &= \varphi_{U_i}(p)gg^{-1}\varphi_{U_j}(p)^{-1} \\ &= \varphi_{U_i}(p) \cdot \varphi_{U_j}(p)^{-1}. \end{aligned}$$

Además las funciones ϕ_{ij} satisfacen:

- i) $\phi_{ij}(y) = e \quad \forall y \in U$.
- ii) $\phi_{ij}(y) = \phi_{ji}^{-1}(y) \quad \forall y \in U_i \cap U_j$.
- iii) $\phi_{ij}(y)\phi_{jk}(y) \cdot \phi_{ki}(y) = e \quad \forall y \in U_i \cap U_j \cap U_k$ (Condición de co-ciclo).

Las funciones de transición describen la forma en que los productos $U_i \times G$, $U_j \times G \dots$ al agruparse forman el espacio total P , y así, P puede

considerarse como el espacio obtenido de la unión disjunta

$$P = \bigcup_{i \in I} U_i \times G.$$

Identificando $(x, g) \in U_i \times G$ con $(x, g') \in U_j \times G$ si $g = \phi_{ij}(x)g'$, por *i*), *ii*) y *iii*) esta es una relación de equivalencia.

Definición 1.3.4 [3] Una *sección local* de un PFB, $P(M, G)$ es una aplicación

$$\sigma : U \longrightarrow P$$

$U \subset M$, U abierto, tal que $\pi \circ \sigma = I_U$ donde la identidad sobre $U(x \rightarrow x)$. Una sección $\sigma : U \rightarrow P$, se llama **sección global** si $U = M$.

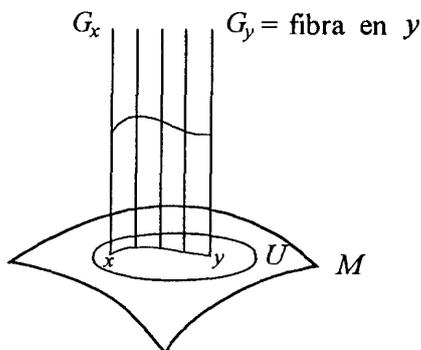


Figura 1.11:

Teorema 1.3.5 ([3]) Existe una correspondencia natural entre trivializaciones locales y secciones locales de un PFB.

Demostración. Sea $\sigma : U \rightarrow P$ una aplicación local.

Definamos

$$\Psi_U : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times G.$$

$\Psi_U(\sigma(x)g) = (x, g)$ que es una T.L.

Recíprocamente, dada una TL $\Psi_U : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times G$ definimos una sección local

$$\sigma : U \longrightarrow P$$

así $\sigma(x) = \Psi_U^{-1}(x, e)$. ■

Nota: Si Ψ_U es una trivialización local, si $U = M$, entonces Ψ_M se llama trivialización global.

Observación 1.3.6 Si $P(M, G)$ es el fibrado principal y sea $\{U_i\}$ un cubrimiento de M como antes. Consideremos las funciones de transición $\{\phi_{ij}\}$ correspondiente al cubrimiento $\{U_i\}$ y construyamos a partir de ellos un conjunto de secciones locales canónicas σ_i , dados por el teorema 1.3.5.

Decimos que $(M, G, \{U_i\}, \phi_{ij})$ constituye un **fibrado principal coordinado** ([7]).

La acción de grupo sobre el fibrado P nos lleva a obtener otros posibles fibrados coordinados. Construimos, usando la acción del grupo otro conjunto de secciones $\{\sigma'_i\}_{i \in I}$ locales esto es: $\sigma'_i(x) = \sigma_i(x)g_i(x)$, donde $g_i(x) \in G$ luego $\sigma_i(x)$ y $\sigma'_i(x)$ tienen la misma proyección y están sobre la misma fibra, de nuevo, usando el teorema 1.3.5, tenemos otras funciones de transición $\{\phi'_{ij}\}$ que están relacionados por:

$$\phi'_{ij}(x) = g_i^{-1}(x)\phi_{ij}(x)g_i(x) \tag{1.2}$$

Decimos que los fibrados principales coordinados

$$(M, G, \{U_i\}, \{\phi_{ij}\}) \quad \text{y} \quad (M, G, \{U_i\}, \{\phi'_{ij}\})$$

son equivalentes (donde la relación está dada por (1.2) y así el fibrado principal es la clase de equivalencia de esos fibrados coordinados.

Es de observar que el cubrimiento abierto del espacio base M , junto con las funciones de transición, que verifican la condición de co-ciclos, determinan completamente un fibrado principal. Véase [6],[7]).

Teorema 1.3.7 [3],[21] *Un fibrado principal $P(M,G)$ es trivial si admite una sección global.*

Demostración. Supongamos que $P(M,G)$ admite una sección global

$$\sigma : M \longrightarrow P$$

tal que $\pi \circ \sigma = Id_M$.

Por teorema anterior, existe una T.L.

$$\Psi_M : \pi^{-1}(M) \longrightarrow M \times G$$

difeomorfismo, esto es $P = M \times G$.

Recíprocamente, supongamos que el fibrado es trivial, entonces existe $\Psi_M : P \longrightarrow M \times G$ trivialización global y por el teorema anterior le corresponde una sección global, esto es, existe

$$\sigma : M \longrightarrow P$$

tal que $\pi \circ \sigma = Id_M$ y σ viene dada por

$$\sigma(x) = \Psi_M^{-1}(x, e).$$

■

b) Los ejemplos dados en 1.1.2 son casos particulares de fibrados principales.

c) **Fibrado de Sistemas de Referencias.**

Sea M una n -variedad. Un sistema referencial en $x \in M$ es una base ordenada $\{v_1, \dots, v_n\}$ de $T_x M$.

Podemos ver un sistema referencial en $x \in M$ como un isomorfismo lineal

$$u : \mathbb{R}^n \longrightarrow T_x M$$

entonces es fácil deducir que un sistema referencial determina una base $u(e_1), \dots, u(e_n)$ de $T_x M$ donde e_1, \dots, e_n es la base usual de \mathbb{R}^n .

Sea $\mathcal{F}(M)_x$ el conjunto de todos los sistemas referenciales en x y el conjunto

$$\mathcal{F}(M) = \bigcup_{x \in M} \mathcal{F}(M)_x.$$

Definamos el PFB, $\pi : \mathcal{F}(M) \longrightarrow M$ con grupo de estructura $G(n, \mathbb{R})$, tal que para $u \in \mathcal{F}(M)_x$, $\pi(u) \in M$.

Este fibrado es llamado **Fibrado de Sistemas de Referencias**.

Para $A \in G(n, \mathbb{R})$.

Definimos

$$\begin{aligned} R_A : \mathcal{F}(M) &\longrightarrow \mathcal{F}(M) \text{ la acción a derecha} \\ u &\longrightarrow u \cdot A. \end{aligned}$$

Esta acción a derecha $\mathcal{F}(M) \times Gl(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{F}(M)$ es libre, esto es: $u \cdot A = u$ para algún $u \in \mathcal{F}(M)$ y $A \in Gl(n, \mathbb{R})$ entonces $A = I$.

Necesitamos dotar a $\mathcal{F}(M)$ de una estructura diferenciable, para poder decir que

$$\pi : \mathcal{F}(M) \longrightarrow M$$

ó

$$\mathcal{F}(M) \times Gl(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{F}(M) \quad \text{son } C^\infty.$$

Sea $W \subset M$, un entorno coordinado con coordenadas x^1, \dots, x^n y asociado a campos coordinados $\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n$ sobre W_i .

Definimos una aplicación

$$\sigma : W_i \longrightarrow \mathcal{F}(M)$$

así $\sigma(y) : \mathbb{R}^n \longrightarrow T_y M$ es un isomorfismo tal que:

$$\sigma(y)(e_k) = (\partial_k)_y.$$

Sea $\varphi_\omega : \pi^{-1} \longrightarrow Gl(n, \mathbb{R})$ definidas por:

$$\varphi_\omega(u) = \sigma(\pi(u))^{-1} \circ u.$$

Observemos que: $\varphi_{\omega_i}(u \circ A) = \varphi_{\omega_i}(u) \circ A$.

Definamos

$$\begin{aligned} \Psi_{W_i} : \pi^{-1}(W_i) &\longrightarrow W_i \times Gl(n, \mathbb{R}) \\ u &\longmapsto (\pi(u), \varphi_{W_i}(u)). \end{aligned}$$

Puesto que $W_i \times Gl(n, \mathbb{R})$ tiene una estructura diferenciable, las aplicaciones Ψ_{W_i} para varios $W_i \subset M$, definen una estructura diferenciable sobre $\mathcal{F}(M)$, probando que

$$\Psi_{W_j} \circ \Psi_{W_i}^{-1} : (W_i \cap W_j) \times Gl(n, \mathbb{R}) \hookrightarrow \text{es } C^\infty.$$

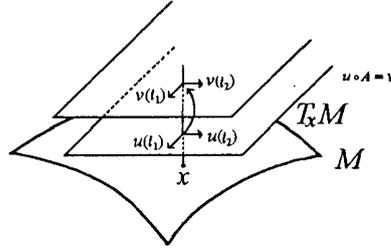


Figura 1.13:

d) $P(S^2, U(1))$ denotado también así $S^3 \rightarrow S^2$ donde $U(1) = S^1$ y

$$S^3 = \{(z_1, z_2), z_1, z_2 \in \mathbb{C} \mid z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 = 1\} \subset \mathbb{C}^2$$

y la proyección π está dada por

$$\pi : S^3 \rightarrow \frac{S^3}{U(1)} \cong S^2$$

tal que

$$\pi(z_1, z_2) = z_1 \in S^2 = \{(z_1, 0), z_1 \in \mathbb{C} \mid z_1 \bar{z}_1 = 1\} \subset S^3.$$

Se define la acción a derecha de $U(1)$ sobre S^3 así:

$$\begin{aligned} S^3 \times U(1) &\longrightarrow S^3 \\ ((z_1, z_2), e^{i\theta}) &\longmapsto (z_1 e^{i\theta}, z_2 e^{i\theta}). \end{aligned}$$

Así $P(S^2, U(1))$ es un fibrado principal con fibra $S^1 = U(1)$ (un grupo de Lie).

Entonces $\frac{S^3}{S^1} \cong S^2$, este fibrado es llamado **fibrado de Hopf** y se denota

$$S^1 \longrightarrow S^3 \longrightarrow S^2.$$

Análogamente se puede ver el fibrado de Hopf:

$$SU(2) \cong S^3 \longrightarrow S^7 \longrightarrow S^4$$

que describe los instantones ([21]), de longitud unitario, donde

$$G = SU(2) = \{A \in Gl(2, \mathbb{C}) / AA^* = A^*A = I \text{ y } \det A = 1\}$$

y $A^* = \overline{A^t}$. (Véase el siguiente ejemplo).

e) Identificando todos los puntos infinitos del Espacio euclideo \mathbb{R}^4 , tenemos la compactificación por un punto:

$$S^4 = \mathbb{R}^4 \cup \{\infty\}.$$

Si tenemos un G -fibrado trivial definido sobre \mathbb{R}^4 , podemos obtener un nuevo G -fibrado sobre S^4 después de la compactificación, el cual no es necesariamente trivial.

Sea P un fibrado principal sobre \mathbb{R}^4 , con $G = SU(2)$ como grupo de estructura, donde $SU(2) = \{A \in U(2) / \det A = 1\}$.

Este fibrado principal $P(S^4, SU(2))$ representa los $SU(2)$ -instantones ([21]).

Consideremos un cubrimiento abierto $\{U_N, U_S\}$ de S^4

$$U_N = \{(x, y, z, t) / x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \leq R^2 + \epsilon\}$$

$$U_S = \{(x, y, z, t) / R^2 - \epsilon \leq x^2 + y^2 + z^2 + t^2\}$$

donde $R = \text{cte} > 0$ y $\epsilon > 0$ infinitesimal y $U_N \cap U_S = S^3$.

Sea $\phi_{NS}(p)$ la función de transición definida en $p \in U_N \cap U_S$.

Puesto que

$$\phi_{NS}: U_N \cap U_S = S^3 \longrightarrow SU(2)$$

y sabiendo que $SU(2) \cong S^3$ (véase [1]).

Tenemos:

i) Si $\phi_{NS} = Id$, tenemos el fibrado trivial

$$P = S^3 \times SU(2).$$

ii) Se obtienen fibrados no triviales, como sigue:

Recordando que $S^3 \cong SU(2)$.

Un elemento $A \in SU(2) = \{A \in U(2)/\det A = 1\}$ tiene la siguiente forma:

$$A = \begin{pmatrix} u & v \\ -\bar{v} & \bar{u} \end{pmatrix}$$

donde $|u|^2 + |v|^2 = 1$.

Separando u y v en parte real e imaginaria, así:

$$u = t + iz \quad y \quad v = y + ix$$

obtenemos: $t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Así $SU(2)$ se identifica con la esfera unitaria S^3 .

La aplicación identidad

$$f: S^3 \longrightarrow S^3 \cong SU(2)$$

es

$$\begin{aligned} f: (x, y, z, t) &\longmapsto \begin{pmatrix} t + iz & y + ix \\ -y + ix & t - iz \end{pmatrix} \\ &= tI + i(x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z) \end{aligned}$$

$$\text{donde } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad y \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Las matrices σ_u son llamadas las matrices de Pauli.

Sea $p = (x, y, z, t) \in U_N \cap U_S$ y si $R = (x^2 + y^2 + z^2 + t^2)^{\frac{1}{2}}$ denota la longitud de p .

Entonces el vector $\left(\frac{x}{R}, \frac{y}{R}, \frac{z}{R}, \frac{t}{R}\right)$ tiene longitud 1.

Asignemos un elemento de $SU(2)$ al punto p , así:

$$\phi_{NS} = \frac{1}{R} \left(tI + i \sum_{i=1}^3 x^i \sigma_i \right).$$

Sean Ψ_N y Ψ_S las trivializaciones locales:

$$\Psi_N^{-1}(u) = (p, g_N) \quad \Psi_S(u) = (p, g_S)$$

donde $p = \pi(u)$ y $g_N, g_S \in SU(2)$,

luego: $g_N(p) = \frac{1}{R} \left(tI + i \sum_{i=1}^3 x^i \sigma_i \right) g_S(p)$ para $p \in U_N \cap U_S$

donde (t, x) barre S^3 una sólo vez y ϕ_{NS} recorre $SU(2)$ una sólo vez.

1.4 Fibrados Asociados

Para el desarrollo de la teoría de Yang-Mills (con campos de partículas), necesitamos introducir la noción de espacio fibrado asociado a un fibrado principal, en particular, será usado en el estudio de las transformaciones

de calibre (gauge), y en la interpretación geométrica de las Ecuaciones de Yang-Mills, ([7],[16],[27]).

Sea $\pi : P \rightarrow M$ con PFB con grupo G . Supongase que G actúa sobre una variedad F a la izquierda. Esto es, para cada $g \in G$ existe una aplicación

$$L_g : F \rightarrow F \quad (\text{escribimos } g \cdot f = L_g(f))$$

tal que

$$e \cdot f = f, \quad (g_1 g_2) f = g_1(g_2 f)$$

y la aplicación

$$\begin{aligned} G \times F &\rightarrow F \\ (g, f) &\mapsto g \cdot f \end{aligned}$$

es C^∞ .

Si F es un espacio vectorial V y

$$L_g : V \rightarrow V$$

es lineal entonces el homomorfismo

$$\begin{aligned} G &\rightarrow Gl(V) \\ g &\mapsto L_g \end{aligned}$$

es llamado una **representación de G** .

Dos representaciones

$$\begin{aligned} G &\rightarrow Gl(V) & \text{y} & & G &\rightarrow Gl(V') \\ g &\mapsto L_g & & & g &\mapsto L'g \end{aligned}$$

se llaman equivalentes si existe un isomorfismo lineal

$$T : V \longrightarrow V'$$

tal que

$$Lg' = T \circ Lg \circ T^{-1} \quad \forall g \in G.$$

Es posible usar cualquier fibrado principal $P(M, G)$ con el objeto de levantar sobre cada punto $x \in M$ una copia de F , pero de tal manera que la topología no trivial de P se preserve. El espacio E será una generalización de $M \times F$ y E será llamado el fibrado asociado a P , con fibra F .

Definición 1.4.1 ([7],[16]) *Sea $P(M, G)$ un fibrado principal con proyección*

$$\pi : P \longrightarrow M$$

y F una variedad, sobre la cual G actúa a izquierda:

$$\begin{aligned} G \times F &\longrightarrow F \\ (g, \xi) &\longmapsto g\xi \quad \text{con } g \in G \text{ y } \xi \in F. \end{aligned}$$

Se define la acción de G sobre $P \times F$ así:

$$\begin{aligned} G \times P \times F &\longrightarrow P \times F \\ (g, (p, \xi)) &\longmapsto (pg, g^{-1}\xi). \end{aligned}$$

Esta acción determina una relación de equivalencia, entre los puntos de $P \times F$.

Por definición el fibrado asociado a P , con fibra F , es el espacio:

$$E(M, G, F, P) = \frac{P \times F}{G}.$$

Equipada de la siguiente estructura diferenciable:

Se define la proyección π_E por

$$\pi_E : E \longrightarrow M$$

tal que $\pi_E(\overline{(p, \xi)}) = \pi(p)$ con $p \in P$, $\xi \in F$ donde $\overline{(p, \xi)}$ = clase de equivalencia de (p, ξ) .

Para E , se tiene de nuevo trivialidad local:

$$\forall x \in M, \exists U_x \subset M \text{ con } x \in U_x$$

tal que

$$\pi_E^{-1}(U_x) = U_x \times F$$

y así la proyección π_E es una aplicación diferenciable de E sobre M .

Las secciones del fibrado $E(M, G, F, P)$ son de nuevo aplicaciones:

$$\sigma : M \longrightarrow E$$

tal que $\pi_E \circ \sigma = I_M$.

Ejemplo 1.4.2

a) Sea P un fibrado principal con $G = \mathbb{Z}_2 = \{e, a\}$ y $M = S^1$, donde la acción

$$\mathbb{Z}_2 \times S^1 \longrightarrow S^1$$

es tal que:

$$\begin{aligned} (e, x) &\longrightarrow x \in S^1 \\ (a, x) &\longrightarrow -x \in S^1. \end{aligned}$$

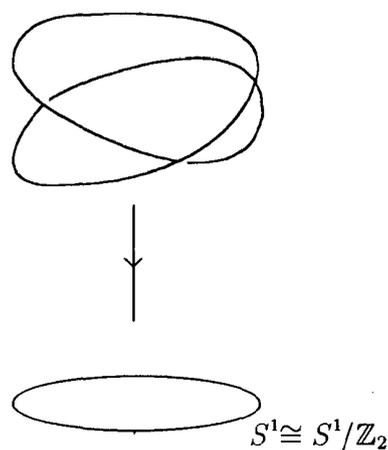


Figura 1.14:

El espacio base S^1 es difeomorfo a $\frac{S^1}{\mathbb{Z}_2}$ y P es simplemente el doble cubrimiento del círculo por un círculo.

A partir de este fibrado principal, se pueden obtener varios fibrados asociados:

i) Sea \mathbb{Z}_2 actuando sobre $F = [-1, 1]$ con la acción trivial:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_2 \times F &\longrightarrow F \\ (a, x) &\longrightarrow x. \end{aligned}$$

Entonces el fibrado asociado $E(M, G, F, P)$ es justamente el cilindro. (Ver figura 1.2).

ii) Sea \mathbb{Z}_2 actuando no trivialmente sobre $F = [-1, 1]$:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_2 \times F &\longrightarrow F \\ (a, x) &\longrightarrow -x. \end{aligned}$$

Entonces el fibrado asociado $E(M, G, F, P)$ es la banda de Möbius. (Ver figura 1.3).

b) Consideremos el fibrado principal $\mathcal{F}(M)$ de sistemas de referencia (Véase ejemplo 1.13 c)), donde M es una variedad de dimensión n y $G = GL(n, \mathbb{R})$.

Si $F = \mathbb{R}^n$ y la acción de $GL(n, \mathbb{R})$ es la del grupo lineal usual. Entonces el fibrado asociado

$$E = \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) = (M, GL(n, \mathbb{R}), \mathbb{R}^n, \mathcal{F}(M)) = \frac{\mathcal{F}(M) \times \mathbb{R}^n}{GL(n, \mathbb{R})}$$

el cual puede ser identificado con el fibrado tangente TM , vía la aplicación:

$$[b, r] \longrightarrow \sum_{i=1}^n b_i r^i \in T_x M$$

donde b es una base $(\in \mathcal{F}(M))$ para el espacio tangente $T_x M$ y $r = (r^1, r^2, \dots, r^n) \in \mathbb{R}^n$.

Con el propósito de completar la descripción de los fibrados asociados, daremos a continuación un lema que usaremos más adelante.

Lema 1.4.3 [7],[27]. *Sea $P(M, G)$ un fibrado principal con espacio base M y grupo de estructura G , y sea F una variedad sobre la cual actúa G a la izquierda. Existe una correspondencia 1-1 entre las secciones del fibrado asociado $E(M, G, F, P)$ y funciones $\varphi : P \rightarrow F$ que satisfacen la propiedad*

$$\varphi(pg) = g^{-1} \cdot \varphi(p) \quad \forall p \in P, \quad \forall g \in G \quad (1.3)$$

(decimos G -homomorfismo de P en F).

Las secciones S_φ correspondientes a cada φ , están definidas por:

$$S_\varphi(x) = [p, \varphi(p)] \quad (1.4)$$

donde p es cualquier punto en $\pi^{-1}(x)$.

Demostración. Supongamos $\varphi : P \rightarrow F$ tal que:

$$\varphi(pg) = g^{-1}\varphi(p) \quad \forall p \in P, \quad \forall g \in G.$$

$\forall x \in M$ podemos escoger $p \in P$ tal que $\pi(p) = x$, la pareja $(p, \varphi(p))$ determina un punto de E , llamémosle la clase de los puntos de $P \times F$ de la forma $[pg, g^{-1}\varphi(p)] = [p, \varphi(p)]$.

Se puede ver claramente que esta clase no depende de la escogencia de p en $\pi^{-1}(x)$, debido a la relación de equivalencia dada por la acción. Esto es,

$$[pg, \varphi(pg)] = [pg, g^{-1}\varphi(p)] = [p, \varphi(p)].$$

Así hemos construido, una sección S de E :

$$\begin{aligned} S_\varphi : M &\rightarrow E \\ x &\mapsto S(x) = [p, \varphi(p)]; \quad \text{para } p \in \pi^{-1}(x) \end{aligned}$$

y está bien definida debido a la observación anterior,

$$[\varphi pg, g^{-1}\varphi(p)] = [p, \varphi(p)]$$

y además $\pi_*(S_\varphi(x)) = \pi(p) = x$ por lo tanto S_φ es una sección de E .

Recíprocamente, dada una sección $S : M \rightarrow E$, podemos determinar una aplicación

$$\varphi_S : P \rightarrow F$$

tal que

$$\varphi_S(pg) = g^{-1}\varphi_S(p) \quad \forall p \in P, \quad \forall g \in G.$$

Así:

$$\varphi_S(p) = i_p^{-1}(S(x))$$

donde $p \in \pi^{-1}(x)$ y $i_p : F \rightarrow \pi_E^{-1}(x)$ es la inyección de F en E (y sobre $\pi^{-1}(x)$), definida por: $i_p(v) = [p, v]$ con $v \in F$

luego:

$$i_p(v) = [p, v] = [pg, g^{-1}v] \stackrel{\text{Def}}{=} i_{pg}(g^{-1}v)$$

de donde se tiene:

$$\varphi_S(pg) = i_{pg}^{-1}(S(x)) = i_{pg}^{-1} \cdot i_p(\varphi_S(p)) = g^{-1}\varphi_S(p)$$

que era lo deseado.

Finalmente notemos que las aplicaciones:

$$\begin{aligned} \varphi &\longmapsto S_\varphi \\ S &\longmapsto \varphi_S \end{aligned}$$

es una inversa de la otra, puesto que:

$$\begin{aligned} S_{\varphi_S}(x) &= [p, \varphi_S(p)] = [p, i_p^{-1}(S(x))] = S(x). \\ \varphi_{S_\varphi}(p) &= i_p^{-1}(S_\varphi(x)) = i_p^{-1}([p, \varphi(p)]) = \varphi(p). \end{aligned} \tag{1.5}$$

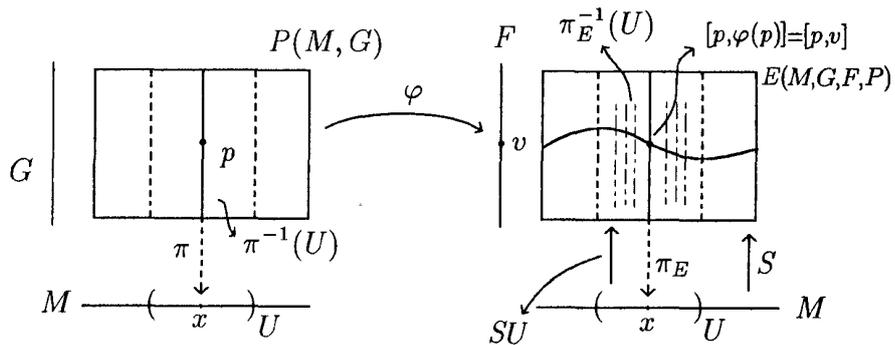


Figura 1.15:

Observaciones 1.4.4

a) Si $\sigma : U \subset M \rightarrow P$ es una sección local de $P(M, G)$ (correspondiente a una T.L. Ψ_U), podemos definir la **representación local**

$$S_U : U \longrightarrow F$$

de una sección $S : M \longrightarrow E$ por:

$$S_U(x) = \varphi_S(\sigma(x))$$

ahora, por (1.5) tenemos que:

$$S(x) = [\sigma(x), \varphi_S(\sigma(x))] \quad \forall x \in U.$$

Si usamos las trivializaciones locales:

$$\begin{aligned} \Psi : U \times G &\longrightarrow \pi^{-1}(U) \\ \Psi(x, g) &= \sigma(x)g \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi} : U \times G &\longrightarrow \pi_E^{-1}(U) \\ \tilde{\Psi}(x, v) &= [\sigma(x), v] \end{aligned}$$

Vemos que $S(x)$ y $S_U(x)$ están relacionados por:

$$\tilde{\Psi}(x, S_U(x)) = S(x) \quad \forall x \in U. \quad (\text{Véase [15]})$$

b) Si $\sigma_1 : U_1 \longrightarrow P$ y $\sigma_2 : U_2 \longrightarrow P$ son dos secciones locales de P con $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$.

Entonces existe alguna “función de calibre” (Véase capítulo 3) local $\gamma : U_1 \cap U_2 \rightarrow G$ tal que:

$$\sigma_2(x) = \sigma_1(x)\gamma(x) \quad \forall x \in U_1 \cap U_2.$$

Entonces:

$$S_{U_2}(x) = \varphi_S(\sigma_2(x)) = \varphi_S(\sigma_1(x)\gamma(x)) = \gamma(x)^{-1}\varphi_S(\sigma_1(x))$$

y de modo que las representaciones locales S_{U_1} y S_{U_2} están relacionados por una “transformación de calibre”:

$$S_{U_1}(x) = \gamma(x)S_{U_2}, \quad \forall x \in U_1 \cap U_2.$$

Notemos que las trivializaciones asociados; satisfacen:

$$\begin{aligned} \Psi_1(x, g) &= \sigma_1(x)g & y \\ \Psi_2(x, g) &= \sigma_2(x)g. \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \Psi_2^{-1} \circ \Psi_1(x, g) &= \Psi_2^{-1}(\sigma_1(x)g) \\ &= \Psi_2^{-1}(\sigma_2(x)\gamma(x)^{-1}g) \\ &= (x, \gamma(x)^{-1}g) \end{aligned}$$

y así vemos que $\gamma(x)$ es justamente la función de transición $\phi_{12}(x)$ (definición 1.3.3, ([21])).

Así se establece una correspondencia 1-1 entre el conjunto de secciones $\Gamma(E)$ y el espacio $C(P, F)$ de las aplicaciones $\varphi : P \rightarrow F$ tal que $\varphi(pg) = g^{-1}\varphi(p)$

$$\begin{aligned} \Gamma(E) &\longleftrightarrow C(P, F) \\ S : M \rightarrow F &\longleftrightarrow \varphi : P \rightarrow F. \end{aligned}$$

Si la variedad F es un espacio vectorial sobre la cual G actúa como un grupo de automorfismos de espacios vectoriales ($G \times F \rightarrow F$), el fibrado asociado E es llamado un fibrado vectorial $E(M, G, F, P)$ asociado a un fibrado principal $P(M, G)$.

$\Gamma(E)$ y $C(P, F)$ tienen entonces una estructura de espacio vectorial y la correspondencia

$$S \longleftrightarrow \varphi$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales entre $\Gamma(E)$ y $C(P, F)$, ([7],[27]).

En el caso donde la acción de G define una representación

$$G \rightarrow Gl(V)$$

los elementos de $C(P, V)$ son llamados **campos de partículas**, ([3]).

Teorema 1.4.5 [21] *Un fibrado vectorial E es trivial si y sólo si está asociado a un fibrado principal $P(M, G)$ que admite una sección global.*

Demostración. Sabemos que en cualquier fibrado vectorial, admite una sección global (por ejemplo la sección nula), entonces no podemos aplicar directamente el teorema 1.3.7 de los fibrados principales. Consideremos entonces un fibrado principal P del cual E es asociado, esto es

$$E = \frac{P \times F}{G}.$$

Por definición E y P utilizan las mismas funciones de transición y puesto que el producto (Twisting) de un fibrado se describe por dichas funciones, se tiene una sección global (como corolario del teorema 1.3.7.) ■

Conexión y Curvatura

2.1 Introducción

Las nociones de conexión y curvatura son fundamentales para la geometría diferencial moderna, análogamente para la física moderna. Para los físicos son nociones esenciales en el desarrollo de la Teoría Electromagnética y en la Teoría de Yang-Mills, entre otros.

Deseamos caracterizar de alguna manera la curvatura de una variedad M . Si M está “curvada” significa que los espacios tangentes T_xM , $T_{x'}M$ en dos entornos de x y x' respectivamente cambian cuando nos movemos de x a x' . Una conexión es esencialmente una estructura que nos dota de una habilidad para comparar dos de esos espacios tangentes en un par de puntos separados infinitesimalmente.

La conexión está dada, definiendo el llamado “transporte paralelo” o traslación paralela en M . Consideremos T_xM y $T_{x'}M$ y una curva γ que conecta x con x' .

Sea $X \in T_xM$ y tal que X_x es tangente a la curva γ en x , entonces X_x se dice transportado paralelamente a lo largo de γ si X_x es empujado (pushed) de x a x' de tal manera que permanezca paralelo a sí mismo.

Si la curva es $\gamma(t)$ entonces la derivada covariante de X_x es la rata de cambio de X_x con respecto a t . Esta derivada covariante difiere de la derivada parcial ordinaria, la cantidad que mide esa diferencia es justamente la conexión. Además esta derivada covariante, que es diferente a la derivada parcial, será en general no conmutativa, la curvatura es la cantidad que mide la no-conmutatividad de la diferenciación covariante ([22]).

Existe una variedad de enfoques diferentes para describir las conexiones en el lenguaje matemático. Daremos a conocer tres de esas presentaciones equivalentes en el contexto de los espacios fibrados.

Nos concentraremos a trabajar en lo que se refiere a conexiones y curvatura ([3]) sobre los fibrados principales y los fibrados vectoriales asociados a los fibrados principales que nos van a ayudar a visualizar la geometría de Yang-Mills ([32]) y las Ecuaciones de movimiento para dicha teoría, las cuales utilizan la noción de curvatura de una conexión.

Presentaremos las nociones básicas de grupos de Lie y álgebras de Lie en el Apéndice B.

2.2 Conexiones sobre fibrados principales

Consideremos un fibrado principal $P(M, G)$. Puesto que ambos, el grupo de Lie G y la variedad n -dimensional M son estructuras diferenciables entonces el fibrado P es también una variedad diferenciable. Así podemos hablar del fibrado tangente TP (ejemplo 1.2.4) y del fibrado cotangente T^*P de P con estas herramientas podemos definir la conexión de tres maneras diferentes, pero equivalentes.

Definición 2.2.1 ([3],[27]) *Una conexión asigna a cada $p \in P$ un subespacio $H_p \subset T_pP$ tal que:*

i) $\pi_ : H_p \rightarrow T_{\pi(p)}M$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.*

ii) $R_{g*}(H_p) = H_{pg}$.

Si $V_p = \{X \in T_p P / \pi_*(X) = 0\}$ entonces $T_p P = H_p \oplus V_p$.

Al subespacio $V_p \subset T_p P$ se le llama **subespacio vertical** y a H_p se le llama **subespacio horizontal**.

Se tiene entonces que H_p depende diferenciablemente de p , en el sentido que existen n campos vectoriales (definidos sobre un entorno U de p) que generan H_q para cada $q \in U$. (Ver figura 2.1)

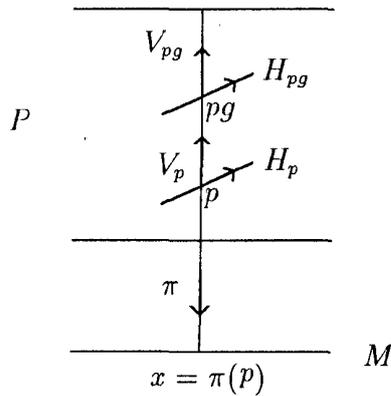


Figura 2.1:

Definición 2.2.2 ([3],[27]) Sea \mathcal{G} el álgebra de Lie del grupo G . Una **conexión** es una 1-forma ω con valores en \mathcal{G} , definida sobre P y que cumple:

a) Si $A \in \mathcal{G}$ y sea A^* el campo vectorial sobre P definido por:

$$A_p^* = \left. \frac{d}{dt}(p \exp(tA)) \right|_{t=0}$$

entonces

$$\omega(A_p^*) = A.$$

A^* es llamado **campo fundamental**.

b) Para $g \in G$, sea

$$\mathfrak{L}\delta_g : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G} \quad (\text{véase Apéndice B})$$

asumimos:

$$\omega_{pg}(R_g \cdot X) = \mathfrak{L}\delta_{g^{-1}}\omega_p(X) \quad \forall g \in G, p \in P$$

y $X \in T_pP$.

Esto es, $R_g \cdot \omega = \mathfrak{L}\delta_{g^{-1}}\omega$.

Decimos que ω es una **1-forma de conexión**.

Definición 2.2.3 ([3],[27]) Una **conexión asigna a cada trivialización local (TL)**

$$\Psi_{U_i} : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times G \quad (\text{escogencia de un calibre}).$$

una 1-forma ω_{U_i} con valores en \mathcal{G} sobre U_i

Si Ψ_{U_j} es otra TL. y

$$\Phi_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G$$

son las funciones de transición de Ψ_{U_i} a Ψ_{U_j} , asumimos que:

$$\omega_{u_j}(Y_x) = L_{\Phi_{ij}(x)}^{-1}(\Phi_{ij} \cdot (Y_x)) + \mathfrak{L}\delta_{\Phi_{ij}(x)^{-1}}(\omega_{u_i}(Y_x))$$

para todo $Y_x \in T_xM$ y $x \in U_i \cap U_j$.

Si G es un grupo de matrices, lo anterior se puede escribir usando notación matricial y con una curva γ para la cual $\gamma'(0) = Y_x$.

Tenemos en $t = 0$.

$$\begin{aligned} L_{\Phi_{ij}(x)}^{-1}(\Phi_{ij} \cdot (Y_x)) &= L_{\Phi_{ij}(x)}^{-1} \left(\frac{d}{dt}(\Phi_{ij}(\gamma(t))) \right) \\ &= \frac{d}{dt} \Phi_{ij}(x)^{-1} \Phi_{ij}(\gamma(t)) \\ &= \Phi_{ij}(x)^{-1} d\Phi_{ij}(Y_x) \end{aligned}$$

donde $d\Phi_{ij}$ es la derivada de la función Φ_{ij} con valores matriciales. Para un grupo de matrices. Escribimos

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}\delta_A(B) &= \left. \frac{d}{dt} I_A(\exp tB) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} (A^{-1} \exp tBA) \right|_{t=0} \\ &= A^{-1}BA \end{aligned}$$

y así

$$\mathfrak{L}\delta_{\Phi_{ij}(x)^{-1}\omega_{u_i}}(Y_x) = \Phi_{ij^{-1}(x)}\omega_{u_i}(Y_x)\Phi_{ij}(x).$$

De donde se deduce que ω_{u_i} se transforma en ω_{u_j} de la siguiente manera

$$\omega_{u_j} = \Phi_{ij^{-1}}d\Phi_{ij} + \Phi_{ij}^{-1}\omega_{u_i}\Phi_{ij}.$$

Observación 2.2.4 ([16]) Cualquier fibrado principal $P(M, G)$ admite una conexión si M es una variedad paracompacta (todo cubrimiento abierto de M , tiene un refinamiento localmente finito) y asumiremos que este es siempre el caso.

Teorema 2.2.5 Las definiciones 2.2.1 y 2.2.2 son equivalentes.

Demostración. Véase ([27],[30]).

Teorema 2.2.6 ([3],[27]). Las definiciones 2.2.2 y 2.2.3 son equivalentes.

Demostración. \Rightarrow) Sea ω una 1-forma de conexión en el sentido de la definición 2.2.2.

Sea $\Psi_{u_i} : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times G$ una T.L., con una sección local asociada $\sigma_{U_i} : U_i \rightarrow P$ dada por 1.1. Definamos:

$$\omega_{u_i} = \sigma_{u_i}^*\omega.$$

Probemos que la correspondencia

$$\Psi_{u_i} \rightarrow \omega_{u_i}$$

es una conexión como en la definición 2.2.3. Sea Ψ_{u_j} otra T.L con sección local σ_{u_j} .

Necesitamos verificar que la ecuación de transformación de 2.2.3, se satisface para

$$\omega_{u_i} = \sigma_{u_i}^* \omega \quad \text{y} \quad \omega_{u_j} = \sigma_{u_j}^* \omega$$

Sea $\Psi_{u_i}(p) = (\pi(p), \varphi_{u_i}(p))$, tenemos que

$$\begin{aligned} \Psi_{u_i}(\sigma_{u_i}(x) \cdot \varphi_{u_i}(p)) &= (x, \varphi_{u_i}(\sigma_{u_i}(x)\varphi_{u_i}(p))) \\ &= (x, \varphi_{u_i}(\sigma_{u_i}(x)\varphi_{u_i}(p))) \\ &= (x, e\varphi_{u_i}(p)) \\ &= (x, \varphi_{u_i}(p)) \\ &= \Psi_{u_i}(p) \end{aligned}$$

para $x = \pi(p) \in U_i$.

Así, $p = \sigma_{u_i}(x)\varphi_{u_i}(p)$ y similarmente, $p = \sigma_{u_j}(x)\varphi_{u_j}(p)$.

En consecuencia, tenemos:

$$\sigma_{u_j}(x) = \sigma_{u_i}(x)\varphi_{u_i}(p)\varphi_{u_j}(p)^{-1} = \sigma_{u_i}(x)\phi_{ij}(x).$$

Sea $Y \in T_x M$, y supongamos que $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ es una curva con $\gamma'(0) = Y$. En $t = 0$, se tiene

$$\begin{aligned} \sigma_{u_j*}(Y) &= \frac{d}{dt} \sigma_{u_j}(\gamma(t)) \\ &= \frac{d}{dt} [\sigma_{u_i}(\gamma(t))\phi_{ij}(\gamma(t))] \\ &= \frac{d}{dt} [\sigma_{u_i}(x)\phi_{ij}(\gamma(t))] + \frac{d}{dt} [\sigma_{u_i}(\gamma(t))\phi_{ij}(x)] \\ &= \frac{d}{dt} [\sigma_{u_j}(x)\phi_{ij}(x)^{-1}\phi_{ij}(\gamma(t))] + R_{\phi_{ij}(x)*}\sigma_{u_i*}(Y) \\ &= [L_{\phi_{ij}}^{-1}(x)*\phi_{ij*}(Y)]_{\sigma_{u_j}(x)} + R_{\phi_{ij}(x)*}\sigma_{u_i*}(Y) \end{aligned}$$

luego

$$\omega_{u_j}(Y) = \omega(\sigma_{u_j}(Y)) = L_{\phi_{ij}(x)}^{-1} \phi_{ij*}(Y) + \mathfrak{L} \delta_{\phi_{ij}(x)-1} \omega_{u_i}(Y)$$

insertando la expresión para $\sigma_{u_j*}(Y)$ y aplicando 2.2.2a) y b). Obtenemos que la correspondencia

$$\Psi_{u_i} \mapsto \omega_{u_i} \equiv \sigma_{u_i}^* \omega$$

es una conexión en el sentido 2.2.3.

Recíprocamente, supongamos que

$$\Psi_{u_i} \mapsto \omega_{u_i}$$

es una conexión como en la definición 2.2.3.

Sea $\sigma_{u_i} : U_i \rightarrow P$ la sección local asociada con Ψ_{u_i} .

Para cada $p = \sigma(x)$, $x \in U_i$, $Y \in T_x M$ y $A \in \mathcal{G}$, definimos:

$$\omega^{u_i} : T_p P \rightarrow \mathcal{G}$$

así, $\omega^{u_i}(\sigma_* Y + A^*) = \omega_{u_i}(Y) + A$.

Extendemos ω^{u_i} a todo $\pi^{-1}(U_i)$ vía la fórmula

$$\omega^{u_i}(X_{pg}) = \mathfrak{L} \delta_{g-1} \omega^{u_i}(R_{g-1} X_{pg})$$

para $X_{pg} \in T_{pg} P$.

Es fácil verificar que ω^{u_i} es una 1-forma de conexión sobre la restricción del PFB.

$$\pi : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i.$$

Si Ψ_{u_j} es otra T.L, podemos definir ω^{u_j} sobre U_j de manera similar. Probando que $\omega^{u_i} = \omega^{u_j}$ sobre $\pi^{-1}(U_i \cap U_j)$, y considerando una colección $\{\omega^{u_i}\}_{i \in I}$, podemos definir la 1-forma de conexión ω , en forma global como en la definición 2.2.2.

Si $\omega^{u_i} = \omega^{u_j}$ sobre $\sigma_{u_j}(U_i \cap U_j)$, entonces $\omega^{u_i} = \omega^{u_j}$ sobre $\pi^{-1}(U_i \cap U_j)$ por 2.2.2b) luego, por cumplirse que:

$$\omega^{u_i}(A^*) = A = \omega^{u_j}(A^*)$$

sólo falta verificar que:

$$\omega^{u_j}(\sigma_{u_j}^* Y) = \omega^{u_i}(\sigma_{u_j}^* Y) \text{ para } Y \in T_x M, \ x \in U_i \cap U_j.$$

Pero, $\omega^{u_j}(\sigma_{u_j}^* Y) = \omega_{u_j}(Y)$ por definición.

Mientras que:

$$\begin{aligned} \omega^{u_i}(\sigma_{u_j}^* Y) &= \omega^{u_i}([L_{\phi_{ij}(x)}^{-1} \phi_{ij}^*(Y)]_{\sigma_{u_j}(x)}^* + R_{\phi_{ij}(x) \circ \sigma_{u_j}^*}(Y)) \\ &= L_{\phi_{ij}(x)}^{-1} \phi_{ij}^*(Y) + \mathfrak{L} \delta_{\phi_{ij}(x)}^{-1} \omega_{u_i}(Y) \\ &= \omega_{u_j}(Y) \end{aligned}$$

por la regla de transformación de la definición 2.2.3.

Por lo tanto,

$$\omega^{u_j}(\sigma_{u_j}^* Y) = \omega^{u_i}(\sigma_{u_j}^* Y) = \omega_{u_j}(Y)$$

y así considerando una colección de la $\{\omega_{u_i}\}_{i \in I}$ podemos definir la conexión ω como en la definición 2.2.2. Por otra parte, vemos que

$$\omega_{u_i} = \sigma_{u_i}^* \omega \text{ para cada } i \in I$$

pues $(\sigma_{u_i}^* \omega)_x(Y) = \omega_p(\sigma_{u_i}^* Y) = \omega_{u_i}(Y)$, para $x \in U_i$, $p = \sigma(x)$, $Y \in T_x M$.

Observación 2.2.7 El teorema anterior es llamado teorema de construcción (y reconstrucción respectivamente) y si las formas locales $\omega_{U_\alpha} = \omega_\alpha$, llamamos a la expresión:

$$\omega_\beta = \mathfrak{L} \delta_{\phi_{\alpha\beta}}^{-1} \omega_\alpha + \phi_{\alpha\beta}^{-1} d\phi_{\alpha\beta} \quad (2.1)$$

sobre $U_\alpha \cap U_\beta$, “condición de compatibilidad”.

Así si consideramos coordenadas locales en el fibrado $P(M, G)$ dados por $P = (x, g)$, $x \in M$, $g \in G$. Entonces

$$\omega = g^{-1}dg + g^{-1}Ag$$

donde $A = A_u^a(x) \left(\frac{\sigma_a}{2i} \right) dx^u$ con σ_a =matrices de Pauli (ver ejemplo 1.3.8e)). Donde la base $\left\{ E_a = \frac{\sigma_a}{2i} \right\}$ de \mathcal{G} satisface

$$[E_a, E_b] = \left[\frac{\sigma_a}{2i}, \frac{\sigma_b}{2i} \right] = C_{ab}^c E_c$$

con C_{ab}^c = constantes de estructura de G ($G = SU(2)$).

$A_u^a(x)$ es llamada la conexión asociada al subespacio horizontal $H_p(T_pP = H_p \oplus V_p)$, $g^{-1}dg$ es la forma canónica (ω_0) y $A = A_u^a(x) \left(\frac{\sigma_a}{2i} \right) dx^u$ es llamada la **forma de conexión**, a $A_u^a(x)$ también se le llama **potencial de calibre**.

Como se vio en el teorema 2.2.6, bajo un cambio de coordenadas en el fibrado P , la 1-forma ω induce una cierta ley de transformación para la forma de conexión A .

Consideremos el fibrado coordinado (ver observación 1.3.6) que localmente cambia de $(x, g) \in U_i$ a $(x', g') \in U_j$ y tomemos solamente cambios en la fibra, esto es:

$$x = x' \quad \text{y} \quad g' \quad \text{dada por} \quad g' = hg.$$

La invarianza de ω significa que:

$$g^{-1}dg + g^{-1}Ag = (g')^{-1}dg' + (g')^{-1}A'g' \tag{2.2}$$

sobre $U_i \cap U_j$ pero $g' = hg$, de modo que

$$dg' = dhg + gdh.$$

Entonces el lado derecho de (2.2) nos queda:

$$g^{-1}h^{-1}(dhg + gdh) + g^{-1}h^{-1}A'hg$$

y si comparamos con el lado izquierdo de (2.2) deducimos que:

$$A = h^{-1}dh + h^{-1}A'h$$

pero $dh h^{-1} + h dh^{-1} = 0$, por lo que:

$$A' = h dh^{-1} + h A h^{-1}$$

que no es más que la ecuación (2.1) y ésta es la ley de transformación para la 1-forma de conexión A . Estas son las llamadas transformaciones de calibre en electromagnetismo ($h = e^{i\theta}$) y en la teoría de Yang-Mills.

Más adelante veremos en el contexto matemático que lo que en física es una transformación de calibre, no es más que un cambio de coordenada de un fibrado principal.

Definición 2.2.8 ([7]) *Consideremos $P(M, G)$ un fibrado principal, dotado de una conexión ω . Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$, el levantamiento \tilde{X} del campo vectorial X sobre M es el único campo vectorial sobre P , el cual se proyecta sobre X , es decir:*

$$\pi_*(\tilde{X}_p) = X_{\pi(p)} \quad \forall p \in P.$$

Veamos ahora la relación entre transporte paralelo y conexión.

Definición 2.2.9 ([29]) *Definimos el transporte paralelo, por levantamiento de cualquier curva $\gamma(t)$ sobre M a la única curva $\tilde{\gamma}(t)$ en el fibrado P . Un vector $X \in T_p P$ es transportado paralelamente a lo largo de $\tilde{\gamma}(t)$ si siempre permanece en H_p cuando es transportado a lo largo de $\tilde{\gamma}(t)$ (ver figura 2.2).*

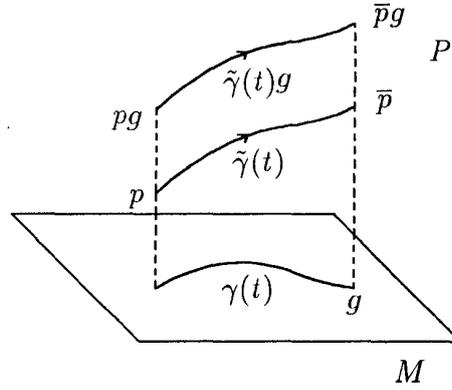


Figura 2.2:

Vamos esto en coordenadas ([16]):

Sea $\gamma(t) = (x_u(t))$ entonces $\tilde{\gamma}(t) = (x_u(t), g(t))$ las tangentes a $\tilde{\gamma}(t)$ están dadas por:

$$\frac{d}{dt} = \dot{x}_u \frac{\partial}{\partial x^u} + \dot{g} \frac{\partial}{\partial g} \in T_p P = H_p + V_p$$

y para que ellas permanezcan en $H_p \subset T_p P$, tendremos que:

$$\frac{d}{dt} = \dot{x}_u(t) \frac{\partial}{\partial x^u} + \dot{g}(t) \frac{\partial}{\partial g} = \beta^u \left(\frac{\partial}{\partial x^u} - A_u^a \frac{\sigma_a}{2i} g \frac{\partial}{\partial g} \right)$$

para algún β^u .

Por lo que $\dot{x}_u(t) = \beta^u$ y

$$\dot{g}(t) = -\beta^u A_u^a \frac{\sigma_a}{2i} g = -\dot{x}_u A_u^a \frac{\sigma_a}{2i} g \quad (2.3)$$

y la ecuación (2.3) nos lleva a una ecuación diferencial de 1er. orden:

$$\dot{g}(t) + \beta^u A_u^a \frac{\sigma_a}{2i} g(t) = 0$$

llamada **Ecuación del transporte paralelo** y la **derivada covariante** D_u , es la rata de cambio con respecto a t , cuando nos movemos a lo

largo del levantamiento horizontal $\tilde{\gamma}(t)$, así:

$$D_u = \frac{\partial}{\partial x^u} - A_u^a \frac{\sigma_a}{2i} g \frac{\partial}{\partial g}.$$

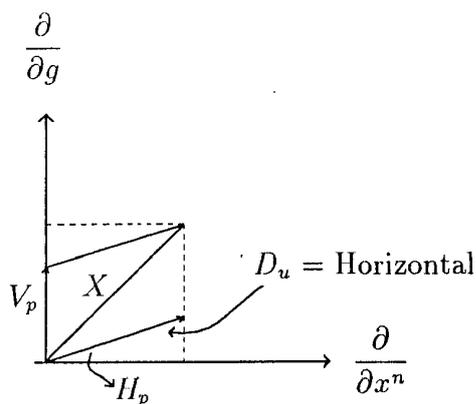


Figura 2.3:

Por lo que $\{D_u\}$ es una base para H_p y cualquier X en $T_p P = V_p + H_p$ (véase definición 2.2.1), está dado por:

$$X = \alpha \frac{\partial}{\partial g} + \beta^u D_u. \quad (\text{véase figura 2.3.})$$

Si $A_u^a(x) = 0 \Rightarrow D_u = \frac{\partial}{\partial x^u}$ (derivada parcial ordinaria a ∂_u).

2.3 Curvatura sobre Fibrados Principales

La curvatura de una conexión, corresponde a la noción física de campos de fuerzas de un potencial de calibre.

Un campo de fuerzas locales obedece a reglas simples de transformación, a diferencia de los potenciales.

Ambos, el potencial de calibre y los campos de fuerzas son ejemplos de formas con valores en el álgebra de Lie \mathcal{G} . Consideraremos el álgebra de todas esas formas, está es un álgebra de Lie de dimensión infinita. La razón de introducir ésta álgebra, es que, los cálculos que involucran potenciales de calibre y campos de fuerzas, se resuelven con gran facilidad, y el uso de las constantes de estructuras y los índices, pueden obviarse. Además, la prueba de las Ecuaciones Homogéneas (Identidad de Bianchi) resulta muy sencilla.

2.3.1 Algebra de Lie de los k -formas con valores en \mathcal{G}

Sea N una variedad y \mathcal{G} un álgebra de Lie.

Denotemos el conjunto de todos los k -formas sobre N , con valores en \mathcal{G} por $\wedge^k(N, \mathcal{G})$.

Definición 2.3.1.1 Sea $\varphi \in \wedge^i(N, \mathcal{G})$ y $\Psi \in \wedge^j(N, \mathcal{G})$.

Definimos $[\varphi, \Psi] \in \wedge^{i+j}(N, \mathcal{G})$ por

$$[\varphi, \Psi](X_1, \dots, X_{i+j}) = \frac{1}{i!j!} \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} [\varphi(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(i)}), \Psi(X_{\sigma(i+1)}, \dots, X_{\sigma(i+j)})]$$

donde

σ es el rango de las permutaciones de $\{1, 2, \dots, i+j\}$; $(-1)^{\sigma} = \pm 1$ dependiendo si σ es par o impar.

$[\ , \]$ de la derecha, es el corchete de \mathcal{G} , y $\{X_1, \dots, X_{i+j}\}$ son campos vectoriales sobre N .

Notación en componentes 2.3.1.2

Sea $A \in \mathcal{G}$ y $\bar{\varphi}$ una k -forma sobre N con valores en \mathbb{R} .

Definimos

$$\bar{\varphi} \otimes A \in \wedge^k(N, \mathcal{G})$$

así:

$(\bar{\varphi} \otimes A)(X_1, \dots, X_k) = \bar{\varphi}(X_1, \dots, X_k)A$ para X_1, \dots, X_k en $T_y N$ está es una forma simple de verificar que:

$$[\bar{\varphi} \otimes A, \bar{\Psi} \otimes B] = (\bar{\varphi} \wedge \bar{\Psi}) \otimes [A, B]$$

para otra r -forma $\bar{\Psi}$ sobre N con valores en \mathbb{R} y $B \in \mathcal{G}$.

Sea E_1, \dots, E_n una base para \mathcal{G} , con **constantes de estructuras** $C_{\alpha\beta}^\gamma$ definidas por $[E_\alpha, E_\beta] = \sum_\gamma C_{\alpha\beta}^\gamma E_\gamma$. Para $\varphi \in \wedge^i(N, \mathcal{G})$ y $\Psi \in \wedge^j(N, \mathcal{G})$ existen únicas formas φ^α y Ψ^β ($\alpha, \beta = 1, \dots, n$) con valores en \mathbb{R} tal que:

$$\varphi = \sum \varphi^\alpha \otimes E_\alpha \quad \text{y} \quad \Psi = \sum \Psi^\beta \otimes E_\beta.$$

Entonces tenemos:

$$\begin{aligned} [\varphi, \Psi] &= \sum_{\alpha, \beta} (\varphi^\alpha \wedge \Psi^\beta) \otimes [E_\alpha, E_\beta] \\ &= \sum_{\alpha, \beta, \gamma} C_{\alpha, \beta}^\gamma (\varphi^\alpha \wedge \Psi^\beta) \otimes E_\gamma. \end{aligned}$$

Teorema 2.3.1.3 Para $\varphi \in \wedge^i(N, \mathcal{G})$, $\Psi \in \wedge^j(N, \mathcal{G})$ y $\rho \in \wedge^k(N, \mathcal{G})$, tenemos:

- 1) $[\Psi, \varphi] = -(-1)^{ij}[\varphi, \Psi]$.
- 2) $(-1)^{ik}[[\varphi, \Psi], \rho] + (-1)^{kj}[[\rho, \varphi], \Psi] + (-1)^{ji}[[\Psi, \rho], \varphi] = 0$.

Demostración. La parte 1), se sigue de

$$\varphi^\alpha \wedge \Psi^\beta = (-1)^{ij} \Psi^\beta \wedge \varphi^\alpha \quad \text{y} \quad [E_\alpha, E_\beta] = -[E_\beta, E_\alpha],$$

junto con la notación, vista anteriormente, esto es,

$$\begin{aligned}
 [\Psi, \varphi] &= \sum_{\alpha, \beta} (\Psi^\beta \wedge \varphi^\alpha) \otimes [E_\beta, E_\alpha] \\
 &= \sum_{\alpha, \beta} (-1)^{ij} (\varphi^\alpha \wedge \Psi^\beta) \otimes -[E_\alpha, E_\beta] \\
 &= -(-1)^{ij} \sum_{\alpha, \beta} (\varphi^\alpha \wedge \Psi^\beta) \otimes [E_\alpha, E_\beta] \\
 &= -(-1)^{ij} [\varphi, \Psi]
 \end{aligned}$$

Para la parte 2), tenemos:

$$\begin{aligned}
 &(-1)^{ik} [[\varphi, \Psi], \rho] + (-1)^{kj} [[\rho, \varphi], \Psi] + (-1)^{ji} [[\Psi, \rho], \varphi] \\
 &= \sum_{\alpha, \beta, \gamma} \{ (-1)^{ik} (\varphi^\alpha \wedge \Psi^\beta \wedge \rho^\gamma) \otimes [[E_\alpha, E_\beta], E_\gamma] + (-1)^{kj} \rho^\gamma \wedge \varphi^\alpha \wedge \Psi^\beta \otimes [[E_\gamma, E_\alpha], E_\beta] \\
 &\quad + (-1)^{ji} \Psi^\beta \wedge \rho^\gamma \wedge \varphi^\alpha \otimes [[E_\beta, E_\gamma], E_\alpha] \\
 &= \sum_{\alpha, \beta, \gamma} (-1)^{ik} \varphi^\alpha \wedge \Psi^\beta \wedge \rho^\gamma \otimes \{ [[E_\alpha, E_\beta], E_\gamma] + [[E_\gamma, E_\alpha], E_\beta] + [[E_\beta, E_\gamma], E_\alpha] \} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

por la identidad de Jacobi para \mathcal{G} .

Este teorema nos prueba que el álgebra de formas diferenciables sobre N con valores en \mathcal{G} es un álgebra de Lie.

Teorema 2.3.1.4 Para $\varphi \in \wedge^i(N, \mathcal{G})$ y $\Psi \in \wedge^j(N, \mathcal{G})$ tenemos:

$$d[\varphi, \Psi] = [d\varphi, \Psi] + (-1)^i [\varphi, d\Psi]$$

Demostración. Usando notación 2.3.1.2, el teorema se sigue de:

$$d(\varphi^\alpha \wedge \Psi^\beta) = d\varphi^\alpha \wedge \Psi^\beta + (-1)^i \varphi^\alpha \wedge d\Psi^\beta$$

para $\varphi = \sum \varphi^\alpha \otimes E_\alpha$ y $\Psi = \sum \Psi^\beta \otimes E_\beta$, entonces:

$$\begin{aligned}
 d[\varphi, \Psi] &= \sum_{\alpha, \beta, \gamma} C_{\alpha, \beta}^\gamma d(\varphi^\alpha \wedge \Psi^\beta) \otimes E_\gamma \\
 &= \sum_{\alpha, \beta, \gamma} C_{\alpha, \beta}^\gamma \{d\varphi^\alpha \wedge \Psi^\beta + (-1)^i \varphi^\alpha \wedge d\Psi^\beta\} \otimes E_\gamma \\
 &= \sum_{\alpha, \beta, \gamma} C_{\alpha, \beta}^\gamma (d\varphi^\alpha \wedge \Psi^\beta) \otimes E_\gamma + (-1)^i \sum_{\alpha, \beta, \gamma} C_{\alpha, \beta}^\gamma (\varphi^\alpha \wedge d\Psi^\beta) \otimes E_\gamma \\
 &= [d\varphi, \Psi] + (-1)^i [\varphi, d\Psi]. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

2.3.2 Curvatura

Dada una 1-forma de conexión ω sobre un fibrado principal (PFB)

$$\pi : P \rightarrow M \quad \text{con grupo } G.$$

En cualquier $p \in P$ y para cualquier $X_p \in T_p P$, tenemos una descomposición única

$$X_p = X_p^V + X_p^H$$

donde

X_p^V es la parte vertical ($\pi_*(X^V) = 0$) y X_p^H es la parte horizontal ($\omega(X^H) = 0$).

Definición 2.3.2.1 Si $\varphi \in \wedge^k(P, \mathcal{G})$ entonces definimos $\varphi^H \in \wedge^k(P, \mathcal{G})$ así:

$$\varphi_p^H(X_1, \dots, X_k) = \varphi_p(X_1^H, \dots, X_k^H).$$

para cualquier $p \in P$.

Definición 2.3.2.2 ([3],[27]) Definimos la derivada exterior covariante de $\varphi \in \wedge^k(P, \mathcal{G})$ por:

$$D^\omega \varphi \equiv (d\varphi)^H \in \wedge^{k+1}(P, \mathcal{G})$$

donde $d\varphi$ es la derivada exterior usual de φ . Esto es:

$$(D^\omega\varphi)_p(X_1, \dots, X_k) \equiv (d\varphi)_p^H(X_1, \dots, X_k) = (d\varphi)_p(X_1^H, \dots, X_k^H)$$

para $X_i \in T_pP$, $p \in P$.

Aunque, el operador D^ω depende de ω , usualmente omitimos el ω .

Definición 2.3.2.3 ([11]) *La curvatura de una conexión $\omega \in \Lambda^1(P, \mathcal{G})$ se define como:*

$$\Omega^\omega \equiv D^\omega\omega \in \Lambda^2(P, \mathcal{G})$$

cuando la conexión ω está considerada como un potencial, Ω^ω es llamada el campo de fuerzas de ω .

El teorema que sigue, nos va a permitir escribir una expresión para los campos de fuerzas, que para los físicos, resulta mucho más familiar.

Teorema 2.3.2.4 (Ecuación de Estructura)

La 2-forma de curvatura Ω^ω , está dada por:

$$\Omega^\omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]$$

es decir,

$$D^\omega\omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega].$$

Para probar este teorema, procederemos probando varios lemas preliminares.

Lema 2.3.2.5 Dado un campo vectorial X sobre M , existe un único campo vectorial \tilde{X} sobre P tal que $\omega(\tilde{X}) \equiv 0$ y $\pi_*(\tilde{X}_p) = X_{\pi(p)}$ $\forall p \in P$.

Necesariamente,

$$R_{g*}\tilde{X} = \tilde{X} \text{ para cada } g \in G$$

El campo \tilde{X} es llamado el levantamiento horizontal de X .

Demostración. De la definición 1.2.1 se tiene que

$$\pi_* : H_p \mapsto T_{\pi(p)}M$$

es un isomorfismo.

Se puede ver que \tilde{X} es diferenciable, pues X lo es, ya que $\pi_*(\tilde{X}_p) = X_{\pi(p)}$.

Veamos que:

$$\pi_*(R_{g*}\tilde{X}_p) = (\pi \circ R_g)_*(\tilde{X}_p) = \pi_*(\tilde{X}_p) = X_{\pi(p)}.$$

Así $R_{g*}\tilde{X}_p = \tilde{X}_{pg}$.

Se puede visualizar, usando diagramas.

$$\begin{array}{ccccc}
 H_p \subset T_p P & \xrightarrow{R_{g*}} & H_{pg} \subset TP & \xrightarrow{\pi_*} & T_{\pi(p)}M \\
 \updownarrow \tilde{X}_p & & \updownarrow \tilde{X}_{pg} & & \updownarrow \tilde{X}_{\pi(p)} \\
 P & \xrightarrow{R_g} & P & \xrightarrow{\pi} & M \\
 p & & pg & & \pi(p)g
 \end{array}$$

para cada $p \in P$ $\tilde{X}_p \in H_p$ y $R_{g*}\tilde{X}_p = \tilde{X}_{pg}$.

Lema 2.3.2.6 Si $A, B \in \mathcal{G}$ entonces $[A, B]^* = [A^*, B^*]$ como campos vectoriales sobre P (ver definición 2.2.2.a).

Demostración. Sea $\varphi_t : P \rightarrow P$ dada por

$$\varphi_t(p) = p \exp(tA).$$

Entonces φ_t es el grupo mono-paramétrico de difeomorfismos generado por A^* .

Calculando las derivadas en cero, se tiene:

$$\begin{aligned}
 [A^*, B^*]_p &= \frac{d}{dt} \varphi_t^{-1} (B_{\varphi_t}^*(p)) \\
 &= \frac{d}{dt} \frac{d}{ds} \varphi_t(p) \exp(sB) \exp(tA)^{-1} \\
 &= \frac{d}{dt} \frac{d}{ds} p \exp(tA) \exp(sB) \exp(tA)^{-1} \\
 &= \frac{d}{dt} \frac{d}{ds} p \exp(s \mathfrak{L}_{\exp tA} B) \\
 &= \frac{d}{ds} p \exp \left(s \frac{d}{dt} [\mathfrak{L}_{\exp tA} B] \right) \\
 &= \frac{d}{ds} \exp(s[A, B]) \\
 &= [A, B]_p^*.
 \end{aligned}$$

Lema 2.3.2.7 Si $A \in \mathcal{G}$ y $X \in \mathfrak{X}(M)$ entonces $[A^*, \tilde{X}] = 0$ donde \tilde{X} es el levantamiento horizontal de X .

Demostración. Definimos φ_t como en la prueba del lema anterior:

$$\varphi_t : P \rightarrow P$$

así $\varphi_t(p) = p \exp(tA)$

luego

$$\varphi_t^{-1}(\tilde{X}) = \tilde{X} \quad \text{por lema 2.3.2.5}$$

por lo tanto

$$[A^*, \tilde{X}] = \frac{d}{dt} \varphi_t^{-1}(\tilde{X}) \Big|_{t=0} = 0.$$

Demostración del Teorema 2.3.2.4.

Observemos que:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}[\omega, \omega](Y, Z) &= \frac{1}{2}\{[\omega(Y), \omega(Z)] - [\omega(Z), \omega(Y)]\} \\
 &= [\omega(Y), \omega(Z)]
 \end{aligned}$$

De modo tal que es suficiente probar:

$$d\omega(Y^H, Z^H) = d\omega(Y, Z) + [\omega(Y), \omega(Z)] \quad \forall Y, Z \in T_p P. \quad (2.4)$$

Por linealidad, consideraremos sólo los siguientes casos:

Caso 1: Si Y y Z son horizontales.

La ecuación (2.4) se sigue de:

$$\omega(Y) = \omega(Z) = 0 \quad \text{y} \quad Y^H = Y \quad \text{y} \quad Z^H = Z$$

por lo tanto

$$d\omega(Y^H, Z^H) = d\omega(Y, Z).$$

Caso 2: Si Y y Z son verticales.

Supongamos que $Y = A_p^*$ y $Z = B_p^*$ para $A, B \in \mathcal{G}$.

Entonces

$$\begin{aligned} d\omega(Y, X) &= A^*[\omega(B^*)] - B^*[\omega(A^*)] - \omega([A^*, B^*]) \\ &= -\omega([A^*, B^*]) \quad \text{pues } \omega(B^*) = B \text{ es cte. y } \omega(A^*) = A \text{ cte.} \\ &= -\omega([A, B]^*) \quad \text{usando lema 2.3.2.6} \\ &= -[A, B] \\ &= -[\omega(A^*), \omega(B^*)] \\ &= -[\omega(Y), \omega(Z)] \end{aligned}$$

luego

$$d\omega(Y, Z) = -[\omega(Y), \omega(Z)]$$

Por tanto,

$$d\omega(Y, Z) + [\omega(Y), \omega(Z)] = 0.$$

Por ser Y, Z verticales $Y^H = Z^H = 0$, se tiene $d\omega(Y^H, Z^H) = 0$.

Se satisface entonces (2.4)

$$d\omega(Y^H, Z^H) = d\omega(Y, Z) + [\omega(Y), \omega(Z)] = 0.$$

Caso 3: Si Y es vertical y Z es horizontal.

Supongamos que $Z_p = \tilde{X}_p$ donde \tilde{X} es el levantamiento horizontal de algún campo vectorial X sobre M .

Sea $Y = A_p^*$ para algún $A \in \mathcal{G}$, luego

$$d\omega(Y, Z) = A^*[\omega(\tilde{X})] - \tilde{X}[\omega(A^*)] - \omega([A^*, \tilde{X}])$$

pero $\omega(\tilde{X}) = 0$ y $\omega(A^*) = A$ constante por lo que se satisface el lema 2.3.2.7. (esto es $[A^*, \tilde{X}] = 0$) de donde

$$d\omega(Y, Z) = 0.$$

Por otra parte

$$d\omega(Y^H, Z^H) = 0 \quad (\text{pues } Y \text{ es vertical, } Y^H = 0)$$

así $d\omega(Y, Z) = d\omega(Y^H, Z^H) = 0$, y ambos lados de (2.4) son ceros. ■

Teorema 2.3.2.8 (Identidad de Bianchi o Ecuaciones para Campos Homogéneos)

Si ω es una 1-forma de conexión sobre P , con curvatura Ω^ω . Entonces

$$D^\omega \Omega^\omega = 0.$$

Demostración. Puesto que $\omega(Y) = 0$ para $Y \in H_p$ (vector Horizontal) se tiene

$$D^\omega \Omega^\omega = 0 \tag{2.5}$$

donde $\Omega^\omega = D^\omega \omega = (d\omega)^H$.

Para visualizar (2.5), probemos que:

$$d\Omega^\omega = [\Omega^\omega, \omega]$$

Tenemos:

$$\begin{aligned} d\Omega^\omega &= d\left(d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]\right) \\ &= d^2\omega + \frac{1}{2}[d\omega, \omega] - \frac{1}{2}[\omega, d\omega] \end{aligned}$$

pero $d^2\omega = 0$ y $[d\omega, \omega] = -[\omega, d\omega]$ por teorema 2.3.1.3(1) por tanto

$$d\Omega^\omega = [d\omega, \omega]$$

usando teorema 2.3.1.3(2), tenemos:

$$[[\omega, \omega], \omega] = 0$$

y así

$$\begin{aligned} d\Omega^\omega &= [d\omega, \omega] + \frac{1}{2}[\omega, \omega], \omega \\ &= \left[d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega], \omega\right] \\ &= [\Omega^\omega, \omega] \end{aligned}$$

esto es $d\Omega^\omega = [\Omega^\omega, \omega]$.

Pero $D^\omega \Omega^\omega = (d\Omega^\omega)^H$ y

$$\begin{aligned} (d\Omega^\omega)^H(X_1, X_2, X_3) &= d\Omega^\omega(X_1^H, X_2^H, X_3^H) \\ &= [\Omega^\omega, \omega](X_1^H, X_2^H, X_3^H) \\ &= [\Omega^\omega(X_1^H, X_2^H), \omega(X_3^H)] = 0 \end{aligned}$$

donde $X_i \in T_p P$; $i = 1, 2, 3$ y $X_i = X_i^V + X_i^H$ por lo que $\omega(X_3^H) = 0$. Con esto se prueba (2.5).

Teorema 2.3.2.9 Para cada $g \in G$

$$R_g^* \Omega^\omega = \mathfrak{L} \delta_{g^{-1}} \Omega^\omega.$$

Demostración. De la definición de $[\cdot, \cdot]$ sobre formas con valores en \mathcal{G} , se sigue que el $[\cdot, \cdot]$ se preserva bajo el pull-back (esto es: $F^*[\varphi, \Psi] = [F^*\varphi, F^*\Psi]$).

Así:

$$\begin{aligned} R_g^* \Omega^\omega &= R_g^* \left(d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] \right) \\ &= d \left(R_g^* \omega + \frac{1}{2}[R_g^* \omega + R_g^* \omega] \right) \\ &= d \mathfrak{L} \delta_{g^{-1}} \omega + \frac{1}{2}[\mathfrak{L} \delta_{g^{-1}} \omega, \mathfrak{L} \delta_{g^{-1}} \omega] \\ &= \mathfrak{L} \delta_{g^{-1}} \left(d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] \right) \\ &= \mathfrak{L} \delta_{g^{-1}} \Omega^\omega. \end{aligned}$$

Por tanto

$$R_g^* \Omega^\omega = \mathfrak{L} \delta_{g^{-1}} \Omega^\omega.$$

Expresión Local 2.3.2.10

Recordando la demostración del teorema 2.2.6 donde los potenciales de calibre ω_u de la definición 2.2.3 están relacionados con la 1-forma de conexión ω de 2.2.2 por

$$\omega_{u_i} = \sigma_{u_i}^* \omega \in \wedge^1(U_i, \mathcal{G}).$$

El campo de fuerzas asociado a ω_{u_i} es

$$\Omega_{u_i} = \sigma_{u_i}^* \Omega^\omega.$$

Deseamos poder hacer los cálculos de Ω_{u_i} directamente, en términos de ω_{u_i} .

Observación 2.3.2.11 En términos de ω_{u_i}

$$\Omega_{u_i} = d\omega_{u_i} + \frac{1}{2}[\omega_{u_i}, \omega_{u_i}].$$

Puesto que:

$$\begin{aligned} \Omega_{u_i} &= \sigma_{u_i}^*(\Omega^\omega) \\ &= \sigma_{u_i}^*\left(d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]\right) \\ &= d(\sigma_{u_i}^*\omega) + \frac{1}{2}[\sigma_{u_i}^*\omega, \sigma_{u_i}^*\omega] \\ &= d\omega_{u_i} + \frac{1}{2}[\omega_{u_i}, \omega_{u_i}]. \end{aligned}$$

Veamos la siguiente caracterización de $[\ , \]$, usando grupos de matrices, los más usados en la física.

Proposición 2.3.2.12 Si N es una variedad y G es un grupo de Lie de matrices (con álgebra de Lie de matrices).

Entonces, para $\varphi \in \wedge^i(N, \mathcal{G})$ y $\Psi \in \wedge^j(N, \mathcal{G})$ tenemos

$$[\varphi, \Psi] = \varphi \wedge \Psi - (-1)^{ij} \Psi \wedge \varphi.$$

Aquí φ y Ψ son consideradas como matrices de formas con valores en \mathbb{R} y $\varphi \wedge \Psi$ es la multiplicación de matrices donde las entradas son multiplicados vía \wedge .

Demostración. Sabiendo que $[A, B] = AB - BA$ para $A, B \in \mathcal{G}$, tenemos

$$\begin{aligned} [\varphi, \Psi](X_1, \dots, X_{i+j}) &= \frac{1}{i!j!} \left\{ \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} \varphi(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(i)}) \Psi(X_{\sigma(i+1)}, \dots, X_{\sigma(i+j)}) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} \Psi(X_{\sigma(i+1)}, \dots, X_{\sigma(i+j)}) \varphi(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(i)}) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (\varphi \wedge \Psi)(X_1, \dots, X_{i+j}) - \frac{1}{i!j!} \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} (-1)^{ij} \\
 &\quad \Psi(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(i)}) \cdot \varphi(X_{\sigma(i+1)}, \dots, X_{\sigma(i+j)}) \\
 &= (\varphi \wedge \Psi - (-1)^{ij} \Psi \wedge \varphi)(X_1, \dots, X_{i+j})
 \end{aligned}$$

■

Corolario 2.3.2.13 Si G es un grupo de matrices, entonces

$$\begin{aligned}
 \Omega^{\omega} &= d\omega + \omega \wedge \omega \quad y \\
 \Omega_{u_i} &= d\omega_{u_i} + \omega_{u_i} \wedge \omega_{u_i}.
 \end{aligned}$$

Demostración. Puesto que $\omega \in \Lambda^1(P, \mathcal{G})$, tenemos:

$$\frac{1}{2}[\omega, \omega] = \frac{1}{2}(\omega \wedge \omega - (-1)^1 \omega \wedge \omega) = \omega \wedge \omega$$

por teorema anterior.

Análogamente para $\omega_{u_i} \in \Lambda^1(u_i, \mathcal{G})$

$$\frac{1}{2}[\omega_{u_i}, \omega_{u_i}] = \omega_{u_i} \wedge \omega_{u_i}$$

Por lo que:

$$\begin{aligned}
 \Omega^{\omega} &= d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] = d\omega + \omega \wedge \omega \quad y \\
 \Omega_{u_i} &= d\omega_{u_i} + \frac{1}{2}[\omega_{u_i}, \omega_{u_i}] = d\omega_{u_i} + \omega_{u_i} \wedge \omega_{u_i}.
 \end{aligned}$$

Las reglas de transformaciones para los campos de fuerzas locales, bajo un cambio de calibre, son relativamente simples comparadas con las correspondientes reglas para los potenciales (definición 2.2.3 de conexión).

Teorema 2.3.2.14 Sean Ψ_{u_i} y Ψ_{u_j} dos trivializaciones locales (TL_s) y funciones de transición

$$\phi_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G.$$

Entonces sobre $U_i \cap U_j$

$$\Omega_{u_j} = \mathfrak{L}\delta_{\phi_{ij}^{-1}}\Omega_{u_i}.$$

En el caso, del grupo de matrices, esto es:

$$\Omega_{u_j} = \phi_{ij}^{-1}\Omega_{u_i}\phi_{ij}.$$

Demostración. Si σ_{u_i} y σ_{u_j} son las secciones locales asociadas con Ψ_{u_i} y Ψ_{u_j} , entonces, de la prueba 2.2.6, se tiene para $Y \in T_xM$.

$$\sigma_{u_j} * (Y) = [L_{\phi_{ij}^{-1}}(x) * \phi_{ij} * (Y)]_{\sigma_{u_j}(x)}^* + R_{\phi_{ij}(x)} * \sigma_{u_i} * (Y).$$

Por la definición de Ω^ω , se tiene:

$\Omega^\omega(Z, W) = 0$ si Z ó W son verticales.

Así,

$$\begin{aligned} \Omega_{u_j}(X, Y) &\equiv \Omega^\omega(\sigma_{u_j} * (X), \sigma_{u_j} * (Y)) \\ &= \Omega^\omega(R_{\phi_{ij}(x)} * \sigma_{u_i} * (X), R_{\phi_{ij}(x)} * \sigma_{u_i} * (Y)) \\ &= \mathfrak{L}\delta_{\phi_{ij}(x)}^{-1}\Omega_{u_i}(X, Y). \end{aligned}$$

■

Observación 2.3.2.15 ([21]) Si denotamos por $\mathcal{F} = \Omega_U$, la forma local de la curvatura Ω , definida por

$$\mathcal{F} \equiv \sigma^*\Omega \tag{2.6}$$

donde σ es una sección local definida sobre la carta U_i de M ($\mathcal{A} = \sigma^*\omega$).

Del corolario 2.3.2.13, se deduce que

$$\mathcal{F} = d\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A}$$

donde d es la derivada sobre M y la acción de \mathcal{F} sobre los vectores de M está dada por

$$\mathcal{F}(X, Y) = d\mathcal{A}(X, Y) + [\mathcal{A}(x), \mathcal{A}(y)].$$

Sea $\mathcal{A} = \mathcal{A}_u dx^u$ ($\mathcal{A}_u \in \mathcal{G}$) un potencial de calibre. Si escribimos

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \mathcal{F}_{uv} dx^u dx^v$$

tenemos:

$$\mathcal{F}_{uv} = \partial_u \mathcal{A}_v - \partial_v \mathcal{A}_u + [\mathcal{A}_u, \mathcal{A}_v].$$

Llamaremos a Ω la curvatura del campo de fuerzas (Yang-Mills) \mathcal{F} .

Si \mathcal{A}_u y $\mathcal{F}_{uv} \in \mathcal{G}$, se pueden expresar en término de la base $\left\{ E_a = \frac{\sigma_a}{2i} \right\}$ de \mathcal{G} como:

$$\mathcal{A}_u = \mathcal{A}_u^a E_a; \quad \mathcal{F}_{uv} = F_{uv}^a E_a$$

y se obtiene la expresión bien conocida

$$F_{uv}^a = \partial_u \mathcal{A}_v^a - \partial_v \mathcal{A}_u^a + C_{\beta\gamma}^a \mathcal{A}_u^\beta \mathcal{A}_v^\gamma$$

donde $C_{\beta\gamma}^a$ son las constantes de estructura y usando teorema 2.3.2.14 se tiene que para dos cartas U_i y U_j , sean \mathcal{F}_i y \mathcal{F}_j los campos de fuerzas de esas cartas. Entonces sobre $U_i \cap U_j$ ellas satisfacen la condición de compatibilidad:

$$\mathcal{F}_i = \mathfrak{L}_{\phi_{ij}^{-1}} \mathcal{F}_j = \phi_{ij}^{-1} \mathcal{F}_j \phi_{ij}$$

donde ϕ_{ij} son las funciones de transición. La forma local de la identidad de Bianchi ($D\Omega = 0$), se reduce a:

$$D\mathcal{F} = d\mathcal{F} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{F} - \mathcal{F} \wedge \mathcal{A} = d\mathcal{F} + [\mathcal{A}, \mathcal{F}] = 0.$$

Teorema 2.3.2.16 Considerando una T.L. $\Psi_{u_i} : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times G$, tenemos una forma local para la ecuación de campos homogéneos (Identidad de Bianchi).

$$d\Omega_{u_i} = [\Omega_{u_i}, \omega_{u_i}]$$

Para el grupo de matrices, se tiene;

$$d\Omega_{u_i} = \Omega_{u_i} \wedge \omega_{u_i} - \omega_{u_i} \wedge \Omega_{u_i}.$$

Demostración. Es fácil deducirlo, del teorema 2.3.2.8. (Identidad de Bianchi).

$$d\Omega^\omega = [\Omega^\omega, \omega]$$

$\omega_{u_i} = \sigma_{u_i}^* \omega$ y del hecho que el $[\ , \]$ es preservado por el pull-back.

Usando proposición 2.3.2.12, tenemos:

$$\begin{aligned} [\Omega_{u_i}, \omega_{u_i}] &= \Omega_{u_i} \wedge \omega_{u_i} - (-1)^{2 \cdot 1} \omega_{u_i} \wedge \Omega_{u_i} \\ [\Omega_{u_i}, \omega_{u_i}] &= \Omega_{u_i} \wedge \omega_{u_i} - \omega_{u_i} \wedge \Omega_{u_i} \end{aligned}$$

■

2.4 Conexión y Curvatura sobre Fibrados Asociados

En física, una partícula se describe en término de un campo de partículas (o función de ondas) $\Psi : M \rightarrow V$ donde V es un espacio vectorial (típicamente sobre los complejos).

Se escoge una base fija de V , con la correspondiente base para ciertos estados de la partícula.

En la determinación de $\Psi(x)$ esta explícita la escogencia de un sistema de referencia en x .

Denotemos por P_x el espacio de todos los posibles sistemas de referencia en x .

Cualquiera dos sistemas de referencia están unívocamente relacionados por el elemento de algún grupo G de transformaciones (pueden ser rotaciones).

Si $p \in P_x$ y $g \in G$ entonces pg significa un sistema transformado.

Ahora bien, g también produce una transformación de V ($v \rightarrow g \cdot v \quad \forall v \in V$).

Si $\Psi(p)$ es el valor de Ψ relativo a $p \in P_x$. Entonces $\Psi(pg) = g^{-1}\Psi(p)$ es el valor relativo a pg .

Una reunión suave P de varios P_x , $x \in M$ forman un fibrado principal con grupo G y P_x como fibra al x , recordemos que P es el fibrado de los sistemas de referencia. (Ver ejemplo 1.13.(c)).

Una función de ondas Ψ , puede ser considerada como una función sobre $P : \Psi : P \rightarrow V$ tal que

$$\Psi(pg) = g^{-1}\Psi(p).$$

Por lo tanto dado una sección local (calibre)

$$\sigma_{U_i} : U_i \rightarrow P.$$

Podemos bajar Ψ hasta $U \subset M$, para obtener la función de onda local

$$\Psi_{U_i} : U_i \rightarrow V \quad (\Psi_U = \Psi_0 \sigma_{U_i})$$

dada por:

$$\Psi_U(y) = \Psi(\sigma_U(y)) \quad \forall y \in U_i.$$

Si $\sigma_{U_j} : U_j \rightarrow P$ es otro calibre, entonces podemos escribir

$$\sigma_{U_j}(y) = \sigma_{U_i}(y)\phi_{ij}(y)$$

donde $\phi_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G$ (funciones de transición).

En consecuencia:

$$\begin{aligned}\Psi_{U_j}(y) &= \Psi(\sigma_{U_j}(y)) \\ &= \Psi(\sigma_{U_i}(y)\phi_{ij}(y)) \\ &= \phi_{ij}^{-1}\Psi(\sigma_{U_i}(y)) \\ &= \phi_{ij}^{-1}(y)\Psi_{U_i}(y)\end{aligned}$$

el cual nos muestra como cambian localmente las funciones de onda bajo un cambio de calibre.

Estas aplicaciones $\Psi : M \rightarrow V$, se identifican con secciones $\varphi : M \rightarrow \mathcal{E}$ del fibrado asociado \mathcal{E} (lema 1.4.3).

A continuación extenderemos las nociones dadas para fibrados principales de conexiones, transporte paralelo, derivada covariante y curvatura a los fibrados asociados.

Sea $P(M, G)$ un fibrado principal, dotado de una conexión ω y sea \mathcal{E} un fibrado asociado a P con fibra F , esto es:

$$\mathcal{E} = \frac{P \times F}{G}.$$

Sea $\Gamma(\mathcal{E})$ el conjunto de secciones de \mathcal{E} ($\varphi : M \rightarrow \mathcal{E}$). Consideremos fibrados asociados cuya fibra ∇ es un espacio vectorial.

Definición 2.4.1 ([15]) *Sea ω una conexión en el fibrado principal $P(M, G)$, V es un espacio vectorial y sea $\mathcal{E} = \frac{P \times V}{G}$ un fibrado asociado a P vía la acción a izquierda de G sobre V .*

El subespacio vertical de $T_y(\mathcal{E})$, $y \in \mathcal{E}$ está definido (ver definición 2.2.1) como:

$$V_y(\mathcal{E}) = \{\tau \in T_y(\mathcal{E}) / \pi_{\mathcal{E}*}\tau = 0\} \subset T_y(\mathcal{E}).$$

Sea $k_v : P \rightarrow \mathcal{E}$, $v \in V$ definido por:

$$K_v(p) = [p, v]$$

donde $[p, v]$ son las clases de equivalencia.

Entonces el subespacio horizontal de $T_y(\mathcal{E})$ se define como:

$$H_{[p,v]}(\mathcal{E}) \equiv K_{v*}(H_p) \subset T_{[p,v]}\mathcal{E}$$

donde H_p es el subespacio horizontal en P . ($H_p \subset T_p P$).

Observaciones 2.4.2 ([15])

a) Puesto que $k_{g^{-1}} \circ L_g = k_g$ la definición de $H_{[p,v]}(\mathcal{E})$ es independiente de la escogencia de elementos (p, v) en la clase de equivalencia de $y \in \mathcal{E}$.

b) Sea $\alpha : [t_0, t_1] \rightarrow M$, $[p, v] \in \pi_{\mathcal{E}}^{-1}(x_0)$ con $x_0 = \alpha(t_0)$.

Sea $\tilde{\alpha}$ el único levantamiento horizontal (definición 2.2.8) de α en P , tal que $\tilde{\alpha}(t_0) = p$. Entonces la curva:

$$\tilde{\alpha}_{\mathcal{E}}(t) \equiv K_v(\tilde{\alpha}(t)) = [\tilde{\alpha}(t), v]$$

es el levantamiento horizontal de α en \mathcal{E} que pasa por $[p, v]$ para $t = t_0$.

Esto nos lleva a la siguiente definición:

Definición 2.4.3 ([15]) *La aplicación de transporte paralelo, se define como:*

$$\tau_{\mathcal{E}} : \pi_{\mathcal{E}}^{-1}(x_0) \rightarrow \pi_{\mathcal{E}}^{-1}(x_1) \quad \text{con } x_1 = \alpha(t_1)$$

que se obtiene tomando cada $g \in \pi_{\mathcal{E}}^{-1}(x_0)$ y llevado hasta $\tilde{\alpha}_{\mathcal{E}}(t_1) \in \pi_{\mathcal{E}}^{-1}(x_1)$, donde la aplicación:

$$t \rightarrow \tilde{\alpha}_{\mathcal{E}}(t)$$

es el levantamiento horizontal de α en \mathcal{E} que pasa por $y \in \pi_{\mathcal{E}}^{-1}(x_0)$.

Observación 2.4.4 ([15]) Si $\sigma : U \longrightarrow P$ es una sección del fibrado principal $P(M, G)$. Una escogencia natural para un levantamiento de α en P es

$$\beta(t) = \sigma(\alpha(t))$$

entonces $\tilde{\alpha}(t) = \beta(t)g(t)$ donde $g : [t_0, t_1] \longrightarrow G$ satisface la ecuación diferencial:

$$0 = g(t)^{-1} \mathcal{A}_u(\alpha(t))g(t) \frac{dx^u}{dt}(\alpha(t)) + g(t)^{-1} \frac{dg}{dt}(t)$$

donde x^u son las coordenadas locales en la carta U ella se deduce del hecho que si ω es una conexión en P entonces $\omega([\tilde{\alpha}(t)]) = 0$.

Recordando que las secciones locales generan trivializaciones locales (teorema 1.3.5), se tiene una trivialización:

$$\begin{aligned} h : U \times G &\longrightarrow \pi^{-1}(U) \quad \text{tal que} \\ h(x, g) &= \sigma(x)g \end{aligned}$$

con inversa

$$\begin{aligned} \Psi : \pi^{-1}(U) &\longrightarrow U \times G \quad \text{tal que} \\ \Psi(p) &= (\pi(p), \varphi_U(p)) \end{aligned}$$

donde $\varphi_U : \pi^{-1}(U) \longrightarrow G$ es la única aplicación que satisface:

$$P = \sigma(\pi(p))\varphi_U(P) \quad \forall p \in \pi^{-1}(U).$$

Entonces la imagen de $\tilde{\alpha}$ en $U \times G$ es:

$$\begin{aligned} \Psi \circ \tilde{\alpha}(t) &= (\alpha(t), \varphi_U(\beta(t)g(t))) \\ &= (\alpha(t), \varphi_U(\beta(t))g(t)) \\ &= (\alpha(t), g(t)). \end{aligned}$$

Analogamente, usando la trivialización local $\Psi' : \pi_{\mathcal{E}}^{-1}(U) \longrightarrow U \times V$ la imagen de $\tilde{\alpha}_{\mathcal{E}}(t)$ es la curva:

$$t \rightsquigarrow (\alpha(t), g(t)v) \in U \times V.$$

Definición 2.4.5 ([15]) *Sea $P(M, G)$ un fibrado principal y sea V un espacio vectorial que lleva una representación lineal de G . Sea $\alpha : [0, \delta] \longrightarrow M$ una curva en M tal que $\alpha(0) = x_0 \in M$ y*

$$\varphi : M \longrightarrow E$$

una sección del fibrado vectorial asociado. Entonces la derivada covariante de φ en la dirección de α en x_0 es:

$$\nabla_{[\alpha]}\varphi \equiv \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tau_{\mathcal{E}}^{-1}\varphi(\alpha(t)) - \varphi(x_0)}{t} \in \pi_{\mathcal{E}}(x_0)$$

donde $\tau_{\mathcal{E}}^{-1}$ es la aplicación del transporte paralelo del espacio vectorial $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(\alpha(t))$ a el espacio vectorial $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(x_0)$.

Definición 2.4.6 ([20]) *Si $v \in T_x M$, la derivada covariante de $\varphi : M \longrightarrow \mathcal{E}$ en v se define como:*

$$\nabla_v \varphi \equiv \nabla_{[\alpha]}\varphi$$

donde α es la curva en M tal que $v \in [\alpha]$ (clase de equivalencia).

Así, cualquier sección $\varphi \in \Gamma(\mathcal{E})$ podemos asociarla con una 1-forma sobre M con valores en $\Gamma(\mathcal{E})$:

$$\varphi \longleftrightarrow \nabla\varphi \in \wedge^1(M, \Gamma(\mathcal{E}))$$

como sigue:

Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$, X tiene un único levantamiento \tilde{X} sobre P . Por lema 1.4.3, podemos asociar una función $f : P \rightarrow V$ (tal que $f(pg) = g^{-1}f(p)$).

Sea $f' = \tilde{X}f$, es también una función de $P \rightarrow V$ que verifica: $f'(pg) = g^{-1}f'(p)$. De nuevo podemos aplicar el lema 1.4.3 y asociar a $f' : P \rightarrow V$ una sección de \mathcal{E} , denotada por $\nabla_x \varphi$.

Si usamos definición anterior, tenemos:

$$\nabla_x \varphi(x) \equiv \nabla_{\tilde{X}} \varphi.$$

Así, se ha construido a partir de la sección φ una 1-forma $\nabla \varphi$ sobre M con valores en $\Gamma(\mathcal{E})$:

$$\begin{aligned} \nabla_x : \Gamma(\mathcal{E}) &\longrightarrow \Gamma(\mathcal{E}) \\ \varphi &\longrightarrow \nabla_x \varphi \end{aligned}$$

∇ es llamada la **derivada covariante** y asocia cualquier elemento $\varphi \in \nabla(E)$ con una 1-forma $\nabla \varphi \in \wedge^1(M, \Gamma(E))$.

Observaciones 2.4.7

a) Si $\mathcal{E} = E = \frac{P \times \mathcal{G}}{G}$ y $X = \partial_u$ entonces localmente

$$\nabla_{\partial_u} \varphi(x) = \nabla_u \varphi = \partial_u \varphi(x) + [A_u(x), \varphi(x)].$$

b) ∇_x es un operador lineal sobre $\Gamma(\mathcal{E})$ y posee una propiedad de derivación:

$$\nabla_x(f\varphi) = f\nabla_x \varphi + X(f) \quad \forall f \in C^\infty(M).$$

c) ∇_x es lineal en X (con respecto a $\mathfrak{X}(M)$):

i) $\nabla_{x+y} \varphi = \nabla_x \varphi + \nabla_y \varphi.$

ii) $\nabla_{fX} \varphi = f\nabla_x \varphi.$

2.5 Derivada Exterior Covariante en un Fibrado Asociado

Definición 2.5.1 *Definimos la derivada exterior covariante como sigue:*

$$D : \wedge^r(M, \Gamma(\mathcal{E})) \longrightarrow \wedge^{r+1}(M, \Gamma(\mathcal{E})).$$

Si $\varphi : M \longrightarrow \Gamma(\mathcal{E})$ ($\varphi \in \wedge^0(M, \Gamma(\mathcal{E}))$) entonces $D\varphi \equiv \nabla\varphi$.

Si α es una r -forma

$$D\alpha(X_1, \dots, X_{r+1}) = \sum (-1)^{j+1} \nabla_{X_j} \alpha(X_1, \dots, X_{j-1}, X_{j+1}, \dots, X_{r+1}) + \sum (-1)^{i+j} \alpha([X_i, X_j], X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_{j-1}, X_{j+1}, \dots, X_{r+1})$$

donde la derivada covariante, esta definida usando la conexión sobre \mathcal{E} y la conexión Riemanniana sobre M .

Observaciones 2.5.2 ([7])

a) Si M es compacta y dotada de la métrica Riemanniana, el conjunto de formas sobre M con valores en $\Gamma(\mathcal{E})$ posee un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$. El operador D , tiene un adjunto D^* tal que si α es r -forma y β es $r+1$ forma:

$$\langle D\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, D^* \beta \rangle$$

se tiene entonces

$$D^* \alpha(X_1, \dots, X_{r-1}) = - \sum_{i=1}^n \nabla_{e_i} \alpha(e_i, X_1, \dots, X_{r-1})$$

donde $\{e_i\}$ es una base ortogonal de TM .

2.6 Curvatura en un Fibrado Asociado

Definición 2.6.1 *La 2-forma de curvatura en un fibrado asociado se definirá como una sección con valores en $\Gamma(E)$ sobre el espacio tiempo M , ([7]).*

Sea E un fibrado asociado al fibrado principal $P(M, G)$, con fibra \mathcal{G} y sobre la cual G actúa con la acción adjunta:

$$\begin{aligned} G \times \mathcal{G} &\longrightarrow \mathcal{G} \\ (g, X) &\longrightarrow g^{-1}Xg. \end{aligned}$$

Así, localmente $E \Big|_{loc} = \pi_E^{-1}(U) = M \times \mathcal{G}$.

Sea $\Gamma(E)$ el conjunto de secciones de E . Asociamos a cada conexión ω sobre P una 2-forma $R(\omega)$ sobre M con valores en $\Gamma(E)$

$$\omega \longrightarrow R(\omega).$$

Sea $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Entonces los levantamientos $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathcal{G} \equiv \mathcal{R}(\mathcal{G})$ (campos vectoriales invariantes a derecha); si Ω es la 2-forma de curvatura sobre P tenemos:

$$\Omega(\tilde{X}, \tilde{Y}) : P \longrightarrow \mathcal{G}$$

y satisface

$$\begin{aligned} \Omega(\tilde{X}, \tilde{Y}) \Big|_{pg} &= \mathfrak{L}_{\delta_{g^{-1}}} \Omega(\tilde{X}, \tilde{Y}) \Big|_p \\ &= g^{-1} \Omega(\tilde{X}, \tilde{Y}) \Big|_p \\ &= g^{-1} \Omega(\tilde{X}, \tilde{Y}) \Big|_p \end{aligned}$$

esto es:

$$\Omega(\tilde{X}, \tilde{Y}) \Big|_{pg} = g^{-1} \Omega(\tilde{X}, \tilde{Y}) \Big|_p.$$

Usando la invarianza a derecha de X, Y .

Aplicando el lema 1.4.3, podemos asociar Ω con una sección \mathcal{S} de E :

$$\Omega \longleftrightarrow \mathcal{S}.$$

Entonces definimos una 2-forma R con valores en $\Gamma(E)$:

$$R(X, Y) = \mathcal{S}$$

Así,

$$\begin{aligned} R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \Gamma(E) \\ (X, Y) &\longmapsto R(X, Y). \end{aligned}$$

Observación 2.6.2 ([7])

a) Estrictamente hablando R tiene valores en E , pero cuando se aplica a campos vectoriales tiene valores en $\Gamma(E)$. La relación entre Ω y R es bien simple pues localmente se puede describir Ω por una proyección:

$$\Omega_\alpha = \sigma_\alpha^* \Omega = \mathcal{F}_{uv}^\alpha dx^u \wedge dx^v$$

donde $\mathcal{F}_{uv}^\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathcal{G}$.

Por otra parte:

$$\pi_\varepsilon^{-1}(U_\alpha) \cong U_\alpha \times \mathcal{G}.$$

Así, podríamos también escribir R localmente como:

$$R = \mathcal{F}_{uv}^\alpha dx^u \wedge dx^v.$$

b) Se puede extender la operación $*$ y el producto escalar para las formas sobre M con valores en $\Gamma(E)$.

Para definir el producto escalar de dos p -formas α y β con valores en el álgebra de Lie \mathcal{G} , reemplazamos

$$\int_M \alpha \wedge * \beta \quad \text{por} \quad \int \text{tr}(\alpha \wedge * \beta)$$

donde tr =traza. Esto es, se define el producto escalar:

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \int_M \text{tr}(\alpha \wedge * \beta).$$

Se puede probar fácilmente que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto escalar. Este producto hace esencial el uso de la estructura riemanniana de M y el producto interior sobre \mathcal{G} .

Si consideramos la 2-forma R definida anteriormente, se conoce la forma $*R$ y el producto escalar será:

$$\langle R, R \rangle = \int_M \text{tr}(R \wedge *R).$$

En término de componentes:

$$\langle F, F \rangle = \int \text{tr}(F \wedge *F) = \int_M \text{tr} F^2.$$

c) Notemos también que la identidad de Bianchi

$$D\Omega = 0$$

ilustra también $DR = 0$.

Geometría de Yang-Mills

3.1 Introducción

Estamos interesados en visualizar las relaciones básicas entre la teoría matemática de conexiones en fibrados principales ([16]) y asociados ([27]) y la teoría de los campos de Yang-Mills y sus transformaciones de calibre, bien manejadas por los físicos ([22]). Veremos que las transformaciones de calibre (que corresponden a cambios de secciones en un fibrado principal) y las ecuaciones de movimiento tienen un carácter global, cuando se definen en término de operaciones en un espacio fibrado ([7]).

Particularmente, consideramos una teoría de calibre no abeliana ($G = SU(2)$), definida sobre $M = \mathbb{R}^4$ y donde el fibrado principal que describe esta teoría (teoría de Yang-Mills), [32] es $P(M, G) = P(\mathbb{R}^4, SU(2))$, ([7],[8],[9],[15],[21]).

3.2 Grupo de Calibre

Sea M una variedad orientada, Riemanniana ([4]), compacta y G un grupo de Lie compacto y denotemos por \mathcal{G} el álgebra de Lie de G . Consideremos $P(M, G)$ un fibrado principal sobre M .

Definición 3.2.1 ([7]) *Una transformación de calibre en P es una aplicación $f : P \longrightarrow P$ tal que:*

- a) $\forall p \in P, \exists g(p) \in G$ tal que $f(p) = pg(p)$ (preserva la fibra).
 b) $g(pa) = a^{-1}g(p)a \quad \forall p \in P \quad \forall a \in G$.

Notemos que $f(pa) = f(p)a$, ya que

$$f(pa) = pag(pa) = paa^{-1}g(p)a = pg(p)a = f(p)a,$$

es decir, f es **equivariante**.

Equivalentemente podemos dar la siguiente definición.

Definición 3.2.2 ([8]) *Una transformación de calibre en P es una aplicación $\gamma : P \longrightarrow G$ tal que:*

- a) $\forall p \in P, \exists f(p) \in P$ tal que $f(p) = p\gamma(p)$.
 b) $\gamma(pa) = a^{-1}\gamma(p)a \quad \forall p \in P, \quad \forall a \in G$.

basta recordar que:

$$\begin{aligned} f(p) &= p\gamma(p) & \forall p \in P \\ \text{y } \gamma(pa) &= a^{-1}\gamma(p)a & \forall p \in P, a \in G. \end{aligned}$$

Denotemos por \mathfrak{G} al conjunto de transformaciones de calibre.

Definición 3.2.3 ([7]) *Sea $f_1 : P \longrightarrow P$ y $f_2 : P \longrightarrow P$ transformaciones de calibre en P , se define un producto en \mathfrak{G} así:*

Sean $f_1(p) = p\gamma_1(p)$ y $f_2(p) = p\gamma_2(p)$. Entonces

$$f_1 \circ f_2(p) = p(\gamma_1 \circ \gamma_2)(p) \quad \text{para } p \in P.$$

donde

$$\gamma_1\gamma_2(p) = \gamma_1(p)\gamma_2(p) \quad (\text{producto en } G).$$

(\mathfrak{G}, \cdot) adquiere estructura de grupo y lo llamaremos **grupo de calibre**.

Si $M = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$ (cubrimiento por abiertos de M). La trivialización local de P nos provee de una colección de sucesiones locales (ver teorema 1.3.5)

$$\sigma_{\alpha} : U_{\alpha} \longrightarrow P$$

definidas por:

$$\sigma_{\alpha}(x) = p\varphi_{\alpha}^{-1}(p) \quad \text{independiente de la escogencia de } p \in \pi^{-1}(x)$$

donde $\varphi : \pi^{-1}(U_{\alpha}) \longrightarrow G$, y así la operación:

$$\gamma : P \longrightarrow G$$

puede ser dada en término de una familia $\{\gamma_{\alpha}\}$ de aplicaciones locales:

$$\gamma_{\alpha} : U_{\alpha} \longrightarrow G$$

así

$$\gamma_{\alpha}(x) = \gamma \circ \sigma(x)$$

y junto a las **relaciones de compatibilidad** (observación 2.2.7):

$$\gamma_{\beta}(x) = \phi_{\alpha\beta}^{-1}(x)\gamma_{\alpha}(x)\phi_{\alpha\beta}(x) \quad \forall x \in U_{\alpha} \cap U_{\beta}$$

donde

$$\phi_{\alpha\beta} : U_{\alpha} \cap U_{\beta} \longrightarrow G \quad (\text{funciones de transición})$$

Esta descripción de las transformaciones de calibre es equivalente a la siguiente construcción:

Consideremos el fibrado B asociado a P , con fibra G , G actuando sobre sí mismo por conjugación:

$$I : G \times G \longrightarrow G$$

$$I(a, g) = I_a(g) = aga^{-1}$$

ésto es:

$$\mathcal{B} = \frac{P \times G}{G}$$

usando lema 1.4.3, existe una correspondencia 1-1 entre las aplicaciones $\gamma : P \rightarrow G$ que describen las transformaciones de calibre y las secciones de \mathcal{B} :

$$\sigma : M \rightarrow \mathcal{B}$$

En consecuencia podemos enunciar el siguiente teorema.

Teorema 3.2.4 ([7]) *El grupo \mathfrak{G} de las transformaciones de calibre en P puede ser identificado con el conjunto $\Gamma(\mathcal{B})$ de secciones del fibrado asociado \mathcal{B} .*

Observaciones 3.2.5

a) *Para ver la operación producto en $\Gamma(\mathcal{B})$ se usa la trivialización local de \mathcal{B} (relativa al cubrimiento $\{U_\alpha\}$ de M) y se utiliza el producto punto de G :*

$$(\gamma_1 \cdot \gamma_2)(y) = \gamma_1(y) \cdot \gamma_2(y) \quad \forall y \in U_\alpha$$

nótese que la buena definición sobre $U_\alpha \cap U_\beta$ se debe a la propiedad

$$I_{\varphi_{\alpha\beta}}^{-1}(\gamma_1 \cdot \gamma_2) = I_{\varphi_{\alpha\beta}}^{-1}(\gamma_1) \cdot I_{\varphi_{\alpha\beta}}^{-1}(\gamma_2)$$

b) *El fibrado \mathcal{B} no es el fibrado principal aunque la fibra sea el grupo G :*

– *La acción de G sobre sí mismo no es libre.*

– *\mathcal{B} tiene secciones globales:*

Supongamos que algún punto $b \in \pi_B^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$ tiene coordenadas (x, e) ($e =$ identidad de G) sobre U_α entonces necesariamente tiene coordenadas (x, e) sobre U_β pues:

Si (x, e') son coordenadas sobre U_β entonces $e' = aea^{-1}$ para algún $a \in G$. Luego

$$e'a = ae = ea \Rightarrow e' = e.$$

En consecuencia la palabra **elemento unitario** tiene un significado global en este fibrado y se puede definir la sección global:

$$S : M \longrightarrow \mathcal{B}$$

así $S(x) = (x, e)$. llamada **sección nula**, este es el **elemento identidad** de \mathfrak{g} .

3.3 Algebra de Lie de \mathfrak{g}

Consideremos la sección constante nula (elemento identidad de \mathfrak{g}) del fibrado asociado \mathcal{B} :

$$\begin{aligned} S : M &\longrightarrow \mathcal{B} \\ S(x) &= (x, e) \quad \text{con } x \in M \text{ y } e = \text{Identidad de } G. \end{aligned}$$

Puesto que cualquier punto de \mathcal{B} pasa por una fibra, usamos la trivialización local de \mathcal{B} (véase definición 1.4.1) sobre el abierto U_α e identificamos esta fibra con G .

Podemos tomar vectores A_α tangentes a la fibra en cualquier punto del grafo de S (ver fig. 3.1)

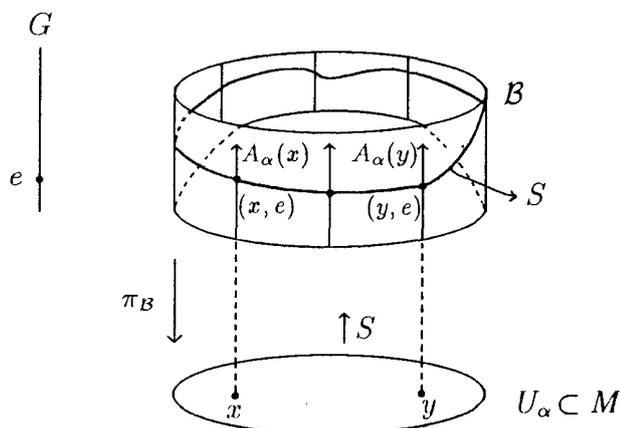


Figura 3.1:

La operación $I_a(g) = a^{-1}ga$ del grupo G y su diferencial $\mathfrak{L}\delta_a : T_eG \rightarrow T_eG$, nos lleva a “transportar” los vectores A_α a cualquier punto de \mathcal{B} y definir vectores tangentes sobre \mathcal{B} (véase).

Se puede identificar un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}M$

$$X \Big|_{\pi_B^{-1}(x)} \longleftrightarrow A_\alpha(x) \in \mathfrak{G} \cong T_eG \quad (x \in U_\alpha).$$

Si $x \in U_\alpha \cup U_\beta$ entonces el mismo X se identifica así:

$$X \Big|_{\pi_B^{-1}(x)} \longleftrightarrow A_\beta.$$

Usando la trivialización de $\pi_B^{-1}(U_\beta)$ tenemos:

$$A_\beta = \mathfrak{L}\delta\phi_{\alpha\beta}^{-1}A_\alpha = \phi_{\alpha\beta}^{-1}A_\alpha\phi_{\alpha\beta}$$

en consecuencia el campo vectorial X determinado sobre \mathcal{B} :

$$\begin{aligned} X : M &\longrightarrow \mathcal{B} \\ x &\longrightarrow X(x) = (x, A_\alpha(x)) \in U_\alpha \times \mathcal{G} \end{aligned}$$

se puede identificar con una sección σ ,

$$\begin{aligned} \sigma : M &\longrightarrow E \\ \sigma(x) &= (x, A_\alpha(x)) \end{aligned}$$

del fibrado E asociado a P con fibra \mathcal{G} y con la acción de la adjunta de G sobre \mathcal{G} :

$$\begin{aligned} G \times \mathcal{G} &\longrightarrow \mathcal{G} \\ (g, X) &\longrightarrow g^{-1}X_g \end{aligned}$$

y donde

$$E \Big|_{U_\alpha} = U_\alpha \times \mathcal{G} \quad \text{y} \quad E \Big|_{\pi^{-1}(x)} = x \times \mathcal{G}.$$

Definición 3.3.1 ([7]) Sea $E = \frac{P \times \mathcal{G}}{G}$ el fibrado asociado a P con la acción conjugada de G sobre \mathcal{G} . Al conjunto de las secciones de E lo llamaremos $\Gamma(E)$.

Por definición de álgebra de Lie (Apéndice B) se tiene que $\Gamma(E)$ es el álgebra de Lie de \mathfrak{g} (ó $\Gamma(B)$) y denotaremos por $\Gamma(E) = \tilde{\mathfrak{g}}$.

Deseamos expresar la sección global S en función de secciones locales, para ello definimos una aplicación

$$S_\alpha : U_\alpha \longrightarrow G$$

tal que $S_\beta = \phi_{\alpha\beta}^{-1} S_\alpha \phi_{\alpha\beta}$.

Usando la aplicación

$$\exp : \mathcal{G} \longrightarrow G$$

se tiene:

$$S_\alpha = \exp \circ \sigma_\alpha.$$

Estas aplicaciones verifican las relaciones de compatibilidad (observación 2.2.7) sobre $U_\alpha \cap U_\beta$ cualquiera.

Así, ellas definen una sección S de B :

$$S : M \longrightarrow B$$

$$S = \exp \circ \sigma \quad \text{para } \sigma : M \longrightarrow E^1$$

lo que si $S \in \Gamma(B)$ entonces

$$S = \exp(\sigma) \quad \text{para } \sigma \in \Gamma(E).$$

3.4 Conexión de Yang-Mills

Recordemos que una conexión (llamadas también potencial de calibre), definición 2.2.2 es una 1-forma

$$\omega : TP \longrightarrow \mathcal{G}$$

sobre P con valores en \mathcal{G} tal que:

$$a) \quad L_g * \omega = \mathfrak{L}\delta(g)\omega \quad \text{ó} \quad R_g * \omega = \mathfrak{R}\delta_{g^{-1}}\omega.$$

b) Si $x \in \mathcal{G}$ y $\tilde{X} = X_v + X_h$ es el correspondiente campo vectorial sobre P entonces

$$\omega(\tilde{X}) = X.$$

¹Si G es conexo (como es nuestro caso $G = SU(2)$), cualquier elemento de G puede ser escrito como la exponencial de algún elemento de \mathcal{G} ([16]).

El conjunto $C(P)$ de todas las conexiones sobre P es un espacio afín. En efecto, la diferencia $\omega - \omega'$ de dos conexiones ω, ω' tiene las siguientes propiedades:

- i) $Lg * (\omega - \omega') = \mathfrak{L}\delta_g(\omega - \omega')$.
- ii) $\omega - \omega' = 0$ sobre V_p (vectores verticales).

Así, $\frac{\omega - \omega'}{G}$ es una 1-forma sobre M con valores en el fibrado vectorial $E = \frac{P \times \mathfrak{G}}{G}$ esto es, $\omega - \omega' \in \wedge^1(M, E) = \Gamma(T^* \otimes E)$.

El grupo \mathfrak{G} actúa sobre $C(P)$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathfrak{G} \times C(P) &\longrightarrow C(P) \\ (\varphi, \omega) &\longrightarrow (\varphi^{-1})^*\omega \end{aligned}$$

Denotaremos por

$$\mu(P) = \frac{C(P)}{\mathfrak{G}}$$

al espacio de las órbitas correspondientes.

Consideremos las conexiones de un fibrado principal $P(M, G)$ donde $M = \mathbb{R}^4$ y el grupo de estructura $G = SU(2)$. Sea ω una conexión sobre P y $\sigma : M \rightarrow P$ una sección de P entonces $A = \sigma^*\omega$ es una conexión sobre $M = \mathbb{R}^4$ que llamaremos **conexión de Yang-Mills**; usualmente se escribe en la forma:

$$A_u^\alpha$$

donde $u = 1, 2, 3, 4$ (índices del espacio tiempo).

$$\alpha = 1, 2, 3, 4 = \dim G.$$

Así podemos escribir

$$A_u = A_u^\alpha(x) E_\alpha dx^u$$

donde $E_1, \dots, E_{\dim G=4}$, es una base de $\mathcal{G} = su(2)$.

Podemos ver que localmente la conexión de Yang-Mills puede ser identificada con la 1-forma ω_U sobre M con valores en el álgebra de Lie de G . Esta relación entre la conexión de Yang-Mills y la 1-forma de conexión del fibrado P , está dada por el siguiente teorema.

Teorema 3.4.1 ([15]) *Sea $\sigma : U \subset M \rightarrow P$ una sección local del fibrado principal $P(M, G)$ dotado de una 1-forma de conexión ω . Definimos la σ -representación local de ω como la 1-forma de conexión ω_U sobre el abierto $U \subset M$, dada por:*

$$\omega_U = \sigma^* \omega.$$

Sea $\Psi : U \times G \rightarrow \pi^{-1}(U) \subset P$ una T.L. de P , inducida por σ , de acuerdo a:

$$\Psi(x, g) = \sigma(x)g.$$

Entonces si

$$(X, Y) \in T_{(x,g)}(U \times G) \approx T_x U \oplus T_g G.$$

La representación local $\Psi^* \omega$ de ω sobre $U \times G$ se puede escribir en término de la conexión local de "Yang-Mills" ω_U , así:

$$(\Psi^* \omega)_{(x,g)}(X, Y) = \mathfrak{L} \delta_{g^{-1}}(\omega_x^U(X)) + \omega_0 g(Y) \quad (3.1)$$

donde ω_0 es la 1-forma canónica (Maurer-Cartan) sobre G con valores en \mathcal{G} (Véase Apéndice B) y $\omega_0 g(Y) = g^{-1} dg$. Por lo que (3.1) se puede reescribir así:

$$(\Psi^* \omega)_{(x,g)}(X, Y) = \mathfrak{L} \delta_{g^{-1}}(\omega_{U_x}(X)) + g^{-1} dg.$$

Demostración. Interpretemos la aplicación

$$\Psi : U \times G \longrightarrow P$$

como

$$\begin{array}{ccccc} U \times G & \xrightarrow{\sigma \times id} & P \times G & \xrightarrow{R} & P \\ (x, g) & \longrightarrow & (\sigma(x), g) & \longrightarrow & \sigma(x)g. \end{array}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} (\Psi^*\omega) &= ((\sigma \times id)^* R_*\omega)(X, Y) \\ &= (R_*\omega)_{(\sigma(x), g)}(\sigma_*X, Y) \\ &= \omega_{\sigma(x)g}(R \circ i_g)_*\sigma_*X + (R \circ j_{\sigma(x)})_*Y \end{aligned}$$

donde para $g \in G$ y $p \in P$ definimos:

$$\begin{array}{ccc} i_g : P \longrightarrow P \times G & & j_p : G \longrightarrow P \times G \\ p \longrightarrow (p, g) & \text{y} & g \longrightarrow (p, g) \end{array}$$

Así:

$$R \circ i_g(p) = R(p, g) = R_g(p) = pg$$

esto es

$$\begin{array}{ccc} R \circ i_g = R_g : P & \longrightarrow & P \\ p & \longrightarrow & pg \end{array}$$

y

$$R \circ j_p(g) = R(p, g) = P_p(g) = pg$$

esto es

$$\begin{array}{ccc} R \circ j_p = P_p : G & \longrightarrow & P \\ g & \longrightarrow & pg. \end{array}$$

Por lo tanto,

$$(\Psi^*\omega) = (R_g * \omega_{\sigma(x)g})(\sigma_*X) + \omega_{\sigma(x)g}(P_{\sigma(x)} * Y). \quad (3.2)$$

Puesto que $R_g * \omega_{\sigma(x)g} = \mathfrak{L}\delta_{g^{-1}}(\omega_{\sigma(x)})$ y además $Y = L_g^A$ para algún $A \in \mathcal{G}$ en efecto $A = \omega_{0g}(Y)$ (forma canónica ω_0), se tiene

$$P_{\sigma(x)} * (L_g^A) = X_{\sigma(x)g}^A$$

y

$$\omega(X^A) = A \in \mathcal{G}.$$

Sustituyendo en (3.2), obtenemos:

$$\begin{aligned} (\Psi^*\omega)(X, Y) &= \mathfrak{L}\delta_{g^{-1}}(\omega_{\sigma(x)})(\sigma_*X) + \omega_{0g}(Y) \\ &= \mathfrak{L}\delta_{g^{-1}}(\omega_{U_x}(x)) + \omega_{0g}(Y) \end{aligned}$$

y usando que $\omega_{0g}(Y) = g^{-1}dg$ se puede escribir

$$(\Psi^*\omega)(X, Y) = \mathfrak{L}\delta_{g^{-1}}(\omega_{U_x}(x)) + g^{-1}dg.$$

Por lo que localmente la 1-forma de conexión ω sobre P se descompone como la suma de una conexión de Yang-Mills sobre $M(\omega_{U_x}(x))$ más una 1-forma canónica sobre G con valores en \mathcal{G} .

Podemos decir entonces que localmente dar una conexión ω sobre P es equivalente a dar una **conexión de Yang-Mills**.

Todo esto, nos lleva a algo interesante: ¿cómo las transformaciones de calibre encajan dentro del formalismo global de los fibrados?

En general, se vio que las transformaciones de calibre en un fibrado principal $P(M, G)$ están definidas como automorfismos del fibrado P . Si $\varphi : P \rightarrow P$ es una transformación de calibre sobre P y ω una conexión sobre P .

Veamos que $\varphi^*\omega$ es una 1-forma de conexión. Sea $A \in \mathfrak{g}$ y sea A^* es correspondiente campo fundamental sobre P . Se tiene 2.2.2a) para $\varphi^*\omega$, porque

$$\begin{aligned} (\varphi\omega)(A_p^*) &= \omega(\varphi_*A_p^*) = \omega\left(\frac{d}{dt}\varphi(p \exp tA)\Big|_{t=0}\right) \\ &= \omega\left(\frac{d}{dt}\varphi(p) \exp tA\Big|_{t=0}\right) = \omega(A_{\varphi(p)}^*) = A \end{aligned}$$

Puesto que $R_g \circ \varphi = \varphi \circ \mathbb{R}_g$, se tiene que

$$R_g^*\varphi^*\omega = (\varphi \circ R_g)^*\omega = (R_g \circ \varphi)^*\omega = \varphi^*R_g^*\omega = \varphi^*\mathfrak{L}\delta_{g^{-1}}\omega = \mathfrak{L}\delta_{g^{-1}}\varphi^*\omega$$

con lo que satisface la definición 2.2.2b), de modo que $\varphi^*\omega$ es una 1-forma de P con valores en \mathfrak{g} que satisface los axiomas para una conexión. $\varphi^*\omega$ se define como una transformación de calibre de ω por la transformación de calibre φ de P .

Para ver la relación exacta entre la transformación

$$\omega \longrightarrow \varphi^*\omega$$

y la correspondiente transformación en coordenadas locales, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.4.2 [15] *Sea ω una conexión sobre el fibrado $P(M, G)$ y sean*

$$\sigma_1 : U_1 \longrightarrow P \quad \text{y} \quad \sigma_2 : U_2 \longrightarrow P$$

dos trivializaciones locales sobre los conjuntos abiertos $U_1, U_2 \subset M$ tal que $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Sean $A_u^{(1)}$ y $A_u^{(2)}$ las representaciones locales de ω con respecto a σ_1 y σ_2 respectivamente.

Entonces

Si $\gamma : U_1 \cap U_2 \rightarrow G$ es la única función de calibre local definida por

$$\sigma_2(x) = \sigma_1(x)\gamma(x) \quad (3.3)$$

entonces las $\mathcal{A}_u^{(1)}(x)$ y $\mathcal{A}_u^{(2)}(x)$ están relacionadas sobre $U_1 \cap U_2$ por

$$\mathcal{A}_u^{(2)}(x) = \mathfrak{L}\delta_{\gamma(x)^{-1}}(\mathcal{A}_u^{(1)}(x)) + (\gamma^*\omega_0)_u(x).$$

Demostración. Si $\partial_u = \frac{\partial}{\partial x^u}$. Entonces

$$\mathcal{A}_u^{(2)}(x) = (\sigma_2^*\omega)_x(\partial_u)$$

y pensando la relación (3.3) como:

$$\begin{array}{ccccc} U_1 \cap U_2 & \xrightarrow{\sigma_1 \times \gamma} & P \times G & \xrightarrow{R} & P \\ x & \rightsquigarrow & (\sigma_1(x), \gamma(x)) & \rightsquigarrow & \sigma_1(x)\gamma(x). \end{array}$$

Obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_u^{(2)}(x) &= ((\sigma_1 \times \gamma)^*R^*\omega)_x(\partial_u) \\ &= (R^*\omega)_{(\sigma_1(x), \gamma(x))}(\sigma_1^*(\partial_u)_x, \gamma_*(\partial_u)_x). \end{aligned}$$

Si usamos el mismo argumento de la prueba del teorema anterior, se puede escribir así:

$$\mathcal{A}_u^{(2)}(x) = \mathfrak{L}\delta_{\gamma(x)^{-1}}(\mathcal{A}_u^{(1)}(x)) + (\gamma^*\omega_0)_x(\partial_u).$$

Corolario 3.4.3 Si G es un grupo de matrices (y usando $\gamma_*\omega_0 = \gamma_{(x)}^{-1}d\gamma(x)$) el resultado anterior se puede escribir:

$$\mathcal{A}_u^{(2)}(x) = \gamma(x)^{-1}\mathcal{A}_u^{(1)}\gamma(x) + \gamma(x)^{-1}\partial_u\gamma(x). \quad (3.4)$$

Nota: Tanto los dos teoremas anteriores como el corolario se puede ver directamente aplicando las definiciones de conexión del capítulo 2 y las equivalencias entre ellos (teoremas 2.2.5 y 2.2.6), donde en la definición 2.2.3 los 1-forma ω_u sobre U corresponde localmente a la conexión de Yang-Mills.

Observaciones 3.4.4

a) La ecuación (3.4) luce como la transformación de calibre de Yang-Mills, familiar para los físicos. Pero notemos que está relacionada a la conexión de Yang-Mills sobre regiones localmente diferentes sobre M , ésta no se refiere a una única potencial de Yang-Mills.

b) La relación con las transformaciones, para un único potencial, es como sigue:

Si $\sigma : U \rightarrow P$ es una sección local de $P(M, G)$ con $\mathcal{A} = \sigma^*(\omega)$ entonces la transformación de calibre

$$\varphi : P \rightarrow P$$

induce una transformación

$$\mathcal{A} \rightsquigarrow \sigma^*(\varphi^*\omega) = (\varphi \circ \sigma)^*\omega.$$

Pero existe, alguna $\gamma : U \rightarrow G$ tal que

$$\sigma(x) = (\varphi \circ \sigma)(x)\gamma(x) \quad \forall x \in U$$

y el argumento usado en el teorema 3.4.2 muestra que la transformación de la representación local (\mathcal{A}_u) de \mathcal{A} se escribe:

$$\mathcal{A}_u(x) \rightarrow \gamma(x)^{-1}\mathcal{A}_u\gamma(x) + \gamma(x)\partial_u\gamma(x)^{-1}. \quad (3.5)$$

Así, si el fibrado $P(M, G)$ es trivial, una sección σ puede ser definida sobre todo M y entonces (3.5) se refiere a una definición global de los 1-formas sobre M con valores en \mathcal{G} .

c) Si el fibrado $P(M, G)$ no es trivial, no es posible describir la 1-forma de conexión ω en términos del único potencial (conexión) de Yang-Mills.

Podemos cubrir M con cartas de trivializaciones locales y entonces los potenciales locales de Yang-Mills relacionarlos, para cualquier par de cartas solapados U_i, U_j por la relación (3.4) sobre $U_i \cap U_j$, con las correspondientes funciones de calibre $\gamma_{ij}(x)$ que satisfacen la relación:

$$\sigma_i(x) = \sigma_j(x)\gamma_{ij}(x)$$

donde las funciones $\gamma_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow G$ son justamente las funciones de transición del fibrado principal $P(M, G)$.

Recordando que estamos considerando el fibrado

$$P(\mathbb{R}^4, SU(2))$$

y puesto que \mathbb{R}^4 es trivial, el único potencial de calibre (potencial de Yang-Mills) es:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_u^\alpha E_\alpha dx^u$$

donde $E_\alpha = \frac{\sigma_\alpha}{2i}$ generan el algebra de $SU(2)$ ($su(2)$) con σ_α =matrices de Pauli y $\{E_\alpha\}$ satisface

$$[E_\alpha, E_\beta] = C_{\alpha\beta}^\gamma E_\gamma$$

con $C_{\alpha\beta}^\gamma =$ constantes de estructuras de G .

Usando el corolario 2.3.2.13 tenemos que el campo de fuerzas (identificadas con la curvatura Ω^ω) \mathcal{F} es:

$$\mathcal{F} \equiv d\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} = \frac{1}{2} \mathcal{F}_{uv} dx^u \wedge dx^v$$

donde $\mathcal{F}_{uv} = \partial_u \mathcal{A}_v - \partial_v \mathcal{A}_u + [\mathcal{A}_u, \mathcal{A}_v] = \mathcal{F}_{uv}^\alpha E_\alpha$ y

$$\mathcal{F}_{uv}^\alpha = \partial_u \mathcal{A}_v^\alpha - \partial_v \mathcal{A}_u^\alpha + C_{\beta\gamma}^\alpha \mathcal{A}_u^\beta \mathcal{A}_v^\gamma$$

y usando identidad de Bianchi (teorema 2.3.2.8), para \mathcal{F} , tenemos:

$$D\mathcal{F} = d\mathcal{F} + [\mathcal{A}, \mathcal{F}] = 0.$$

Si $\varphi : P \rightarrow G^2$ el campo de partículas se transforma bajo $g \in G$ como:

$$\varphi \longrightarrow g^{-1}\varphi \quad ; \quad \bar{\varphi} \longrightarrow \bar{\varphi}g \quad (3.6)$$

y sabemos que el potencial de Yang-Mills se transforma así:

$$\mathcal{A}_u \longrightarrow \mathcal{A}'_u = g^{-1}\mathcal{A}_u g + g^{-1}\partial_u g. \quad (3.7)$$

La derivada covariante localmente está definida por:

$$\nabla_u = \mathcal{A}_u + \partial_u.$$

Así, $\nabla_u \varphi \longrightarrow \nabla'_u \varphi' = \nabla_u(g^{-1}\varphi) = g^{-1}\nabla_u \varphi.$

Entonces $\nabla_u \varphi$ se transforma covariantemente bajo las transformaciones de calibre

$$\nabla'_u \varphi' = g^{-1}\nabla_u \varphi = g^{-1}\mathcal{A}_u g + g^{-1}\partial_u g.$$

Si definimos el campo de fuerzas dual

$$*\mathcal{F}_{uv} \equiv \frac{1}{2}\mathcal{E}_{uvk\lambda}\mathcal{F}^{k\lambda}$$

entonces, éste satisface la identidad de Bianchi:

$$D_u * \mathcal{F}^{uv} \equiv \partial_u * \mathcal{F}^{uv} + [\mathcal{A}_u, * \mathcal{F}^{uv}] = 0.$$

Usando (3.6) y (3.7) se puede ver que \mathcal{F}_{uv} se transforma como:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{uv} \longrightarrow \mathcal{F}'_{uv} &= \partial_u \mathcal{A}'_v - \partial_v \mathcal{A}'_u + [\mathcal{A}'_u, \mathcal{A}'_v] \\ &= g^{-1}\partial_u \mathcal{A}_v g - g^{-1}\partial_v \mathcal{A}_u g + [g^{-1}\mathcal{A}_u g, g^{-1}\mathcal{A}_v g] \\ &= g^{-1}(\partial_u \mathcal{A}_v - \partial_v \mathcal{A}_u + [\mathcal{A}_u, \mathcal{A}_v])g \end{aligned}$$

²Estrictamente hablando, se debe especificar la representación de G al cual φ pertenece.

$$\mathcal{F}_{uv} \longrightarrow g^{-1} \mathcal{F}_{uv} g.$$

por lo tanto

Además en general usando (2.6) la relación entre \mathcal{F} y Ω se tiene

$$\Omega \rightsquigarrow \Omega' = g^{-1} \Omega g \tag{3.8}$$

3.5 Ecuaciones de Yang-Mills

Sea $\omega : TP \longrightarrow \mathcal{G}$ una conexión sobre $P(M, G)$.

En el capítulo 2 se vio que la forma de curvatura $\Omega = D\omega$ de una conexión ω es una 2-forma sobre P , tal que:

$$\Omega(X, Y) = 0 \quad \text{para} \quad X, Y \in V_p. \quad (\text{Vectores Verticales}).$$

Por lo que podemos considerar Ω como una 2-forma sobre M con valores en $E \Big|_U = U \times \mathcal{G}$, $\Omega \in \Gamma(\wedge^2 \otimes E)$.

Ahora fijemos un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ invariante por la adjunta en el algebra de Lie \mathcal{G} y definamos la longitud de Ω como sigue:

Definición 3.5.1 [18] *Se define la longitud de la 2-forma Ω por*

$$|\Omega|_x^2 = \sum_{i < j} |\Omega(e_i, e_j)|^2$$

donde e_1, \dots, e_n es una base ortonormal en x de M .

Sobre el espacio $C(P)$ de las conexiones sobre P podemos considerar la funcional (Véase apéndice sobre Lagrangiano) de Yang-Mills:

$$\begin{aligned} L : C(P) &\longrightarrow [0, +\infty) \\ L_{YM}(\omega) &= \frac{1}{2} \int_M |\Omega|^2 dM. \end{aligned}$$

Teorema 3.5.2 [18] Si ω y ω' son equivalentes (esto es ω' es una transformación de calibre de ω) entonces $L_{YM}(\omega) = L_{YM}(\omega')$.

Demostración. Se deduce del hecho que Ω y Ω' están relacionados por

$$\Omega' = g^{-1}\Omega g \quad (\text{Ver (3.8)})$$

y del hecho que el producto $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es invariante por la adjunta.

Por lo que:

$$|\Omega'(e_i, e_j)| = |g^{-1}\Omega(e_i, e_j)g| = |\Omega(e_i, e_j)|$$

y así la funcional es invariante por las transformaciones de calibre \mathfrak{g} , por lo tanto la funcional L_{YM} se puede definir en el espacio de las órbitas $\mu(P) = \frac{C(P)}{\mathfrak{g}}$

$$L_{YM} : \mu(P) \longrightarrow [0, +\infty).$$

Definición 3.5.3 [18] Un punto crítico ω de la funcional L_{YM} de Yang-Mills es llamado un campo de Yang-Mills.

Para obtener las ecuaciones diferenciables que definen los campos de Yang-Mills necesitamos algunos operadores diferenciables.

Una conexión ω introduce una derivación covariante

$$\nabla^\omega : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(T^* \otimes E)$$

en el fibrado vectorial asociado $E = \frac{P \times \mathcal{G}}{G}$.

Si $\alpha^p = \beta^p \otimes S \in \Gamma(\wedge^p \otimes E)$ es una p -forma con valores en E .

Se define $D^\omega \alpha^p = D\beta^p \otimes S + (-1)^p \beta^p \otimes \nabla^\omega S$.

Así,

$$D^\omega : \Gamma(\wedge^p \otimes E) \longrightarrow \Gamma(\wedge^{p+1} \otimes E)$$

es un operador diferencial de 1er orden.

Llamemos δ^ω al operador adjunto, esto es:

$$\langle D^\omega \alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, \delta^\omega \beta \rangle$$

para $\alpha \in \wedge^p(E)$ $\beta \in \wedge^{p+1}(E)$.

Observaciones 3.5.4

a) Denotemos por $*$: $\wedge^p \longrightarrow \wedge^{n-p}$ el operador de hodge entonces

$$\delta^\omega = (-1)^{p+1} * D^\omega * \quad (\text{Véase [3]})$$

b) Usando D^ω , la identidad de Bianchi (teorema 2.3.2.8) se puede escribir en la forma:

$$D^\omega \Omega = 0.$$

Proposición 3.5.5 [18] ω es un campo de Yang-Mills si y sólo si $\delta^\omega \Omega = 0$.

Demostración. Sea ω_t una familia de conexiones con $\omega_{t=0} = \omega$ y $A_t = \omega_t - \omega \in \Gamma(T^* \otimes E)$ $B = \frac{d}{dt}(A_t)_{t=0} \in \Gamma(T^* \otimes E)$ entonces

$$\Omega_t = \Omega + D^\omega A_t + \frac{1}{2}[A_t, A_t]$$

pues usando la ecuación de estructura (teorema 2.3.2.4) se tiene

$$\begin{aligned} \Omega_t &= D^\omega(\omega_t) = d\omega_t + \frac{1}{2}[\omega_t, \omega_t] \\ \Omega &= D^\omega(\omega) = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] \end{aligned}$$

luego,

$$\Omega_t - \Omega = d(\omega_t - \omega) + \frac{1}{2}[\omega_t - \omega, \omega_t - \omega]$$

y de allí

$$\Omega_t = \Omega + D^\omega A_t + \frac{1}{2}[A_t, A_t]$$

ya que $dA_t = (dA_t)^H = D^\omega A_t$ por ser $A_t = 0$ sobre los vectores verticales.

Sustituyendo en el funcional L_{YM} y derivando con respecto a t , se tiene:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} L_{YM}(\omega_t) \right|_{t=0} &= \frac{1}{2} \int_M \frac{d}{dt} |\Omega_t|^2 dM \\ &= \frac{1}{2} \int_M 2 \left\langle \frac{d}{dt} \Omega_t, \Omega_t \right\rangle \Big|_{t=0} \\ &= \int_M \left\langle \frac{d}{dt} \left(\Omega + D^\omega A_t + \frac{1}{2}[A_t, A_t], \Omega + D^\omega A_t + \frac{1}{2}[A_t, A_t] \right) \right\rangle \Big|_{t=0} dM \\ &= \int_M \langle D^\omega B, \Omega \rangle dM \\ &= \int \langle B, \delta^\omega \Omega \rangle dM. \end{aligned}$$

Esto prueba que ω es un punto crítico de L_{YM} si y sólo si $\delta^\omega \Omega = 0$. Así, la ecuación $\delta^\omega \Omega = 0$, llamada **Ecuación de Yang-Mills**, no es más que la **Ecuación de Euler-Lagrange** para el lagrangiano

$$L_{YM} = \int_M |\Omega|^2 dM$$

definido sobre $\mu(P) = \frac{C(P)}{\mathfrak{g}}$.

Además, la ecuación de Yang-Mills:

$$\delta^\omega \Omega = 0$$

es equivalente a la ecuación:

$$D^\omega(*\Omega) = 0$$

pues, usando la observación 3.5.4 se tiene

$$\delta^\omega \Omega = (-1)^{p+1} * D^\omega * \Omega = 0$$

entonces

$$\delta^\omega \Omega = 0 \iff D^\omega(*\Omega) = 0.$$

Definición 3.5.6 [18] *Una conexión ω sobre una variedad euclídeana M 4-dimensional es llamada auto-dual si $*\Omega = \Omega$.*

Corolario 3.5.7 [18] *Toda conexión auto-dual sobre una variedad euclídeana 4-dimensional, es un campo de Yang-Mills.*

Demostración. Usando la identidad de Bianchi ($D^\omega \Omega = 0$), tenemos que si ω es auto dual,

$$D^\omega(*\Omega) = D^\omega \Omega = 0$$

entonces ω es un campo de Yang-Mills. ■

Ecuaciones de Euler-Lagrange

A.1 Introducción

La deducción de las ecuaciones de Lagrange es posible partiendo de un principio que considere el movimiento completo de un sistema entre los tiempos t_1 y t_2 y tenga en cuenta pequeñas variaciones virtuales de ese movimiento completo con relación al movimiento real. La configuración instantánea de un sistema está determinada por los valores de n coordenadas generalizadas q_1, \dots, q_n y corresponde a un hiperespacio cartesiano en el que los q forman los n ejes coordenados. Este espacio n -dimensional suele llamarse “espacio de configuración”. El estado del sistema variará con el tiempo, y el punto que la representa describirá, por tanto en el espacio de configuración una curva llamada “trayectoria del movimiento” y se refiere al movimiento del punto representativo a lo largo de esta trayectoria en el espacio de configuración. Una referencia básica para este apéndice es Arnold V.I., [2].

Llamemos M =espacio de configuración (espacio de las posiciones)= $\{q\}$.

TM = espacio de fase (posición-velocidad)

= $\{(q, \dot{q})\}$.

Se mostrará que los movimientos de un sistema (o partículas) son extremos

de un principio variacional, **principio de mínima acción de “Hamilton”**.

El cálculo de Variaciones esta relacionado con los extremales de funciones cuyo dominio Ω , es un espacio de dimensión infinita: el espacio de las curvas. Tales funciones son llamadas **funcionales**.

Esto es:

$$\Omega = \{\gamma / \gamma : [t_1, t_2] \longrightarrow TM, \text{ con } \gamma(t_1) = q_1, \text{ y } \gamma(t_2) = q_2, \}$$

así, una **funcional** es una aplicación lineal:

$$\phi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Ejemplo A.1.1 La longitud de una curva en el plano euclideo:

Si $\gamma = \{(t, x) : x(t) = x, \quad t_0 < t < t_1\}$ entonces

$$\phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + \dot{x}^2} dt$$

es una funcional.

Consideremos una aproximación $\gamma' \longrightarrow \gamma$

$$\gamma' = \{(t, x) : x = x(t) + h(t)\}$$

y la llamaremos $\gamma' = \gamma + h$, consideremos el incremento de ϕ ;

$$\phi(\gamma + h) - \phi(\gamma).$$

A.2 Cálculo de Variaciones

Definición A.2.1 Una funcional ϕ es llamada diferencial si

$$\phi(\gamma + h) - \phi(\gamma) = \delta + R$$

donde δ depende linealmente de h (esto es, fijado γ , $\delta(ch_1 + h_2) = c\delta(h_1) + \delta(h_2)$) y $R(h, \gamma) = O(h^2)$ en el siguiente sentido: para $|h| < \epsilon$ y $\left| \frac{dh}{dt} \right| < \epsilon$ se tiene $|R| < C\epsilon^2$.

La parte lineal del incremento, $\delta(h)$, es llamada la diferencial.

Se puede probar que si ϕ es diferenciable, su diferencial es única. La diferencial δ de una funcional diferenciable es también llamado su **variación**, y h es llamada la variación de la curva.

Si consideramos $\gamma = \{(t, x) : x = x(t), t_0 \leq t \leq t_1\}$ una curva en el plano (t, x) ; $\dot{X} = \frac{dx}{dt}$; $L = L(X, Y,)$ una función diferenciable de 2 variables.

Definimos una funcional ϕ :

$$\phi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

por

$$\phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(x(t), \dot{x}(t)) dt$$

donde

$$\begin{aligned} L : TM &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, \dot{x}) &\longrightarrow L(x, \dot{x}) \end{aligned}$$

Si $L = \sqrt{1 + v^2}$, obtenemos la longitud de γ .

Teorema A.2.2 La funcional $\phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(x, \dot{x}(t)) dt$ es diferenciable, y su derivada está dada por la fórmula:

$$\delta(h) = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right] h dt + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} h \right) \Big|_{t_0}^{t_1}.$$

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned}\phi(\gamma + h) - \phi(\gamma) &= \int_{t_0}^{t_1} [L(x + h, \dot{x} + \dot{h}) - L(x, \dot{x})] dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial x} h + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{h} \right] dt + o(h^2) \\ &= \delta(h) + R\end{aligned}$$

donde

$$\delta(h) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial x} h + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{h} \right) dt \quad \text{y} \quad R = o(h^2)$$

si integramos por partes, obtenemos:

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{h} dt = \int_{t_0}^{t_1} h \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) dt + \left(h \frac{dL}{d\dot{x}} \right) \Big|_{t_0}^{t_1}.$$

Por lo tanto

$$\delta(h) = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \right] h dt + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} h \right) \Big|_{t_0}^{t_1}.$$

A.3 Extremales

Definición A.3.1 *Un extremal de una función diferenciable $\phi(\gamma)$ es una curva γ tal que $\delta(h) = 0 \forall h$.*

Lema A.3.2 *Si una función continua $f(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$ satisface*

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t)h(t)dt = 0$$

y para cualquier función continua $h(t)$ con $h(t_0) = h(t_1) = 0$ entonces $f(t) \equiv 0$.

Demostración. Véase [].

Teorema A.3.3 La curva $\gamma : x = x(t)$ es un extremal de una funcional

$$\phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(x, \dot{x}) dt$$

sobre el espacio Ω de las curvas que pasan a través de los puntos $x(t_0) = e_0$ y $x(t_1) = e_1$ son:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

a lo largo de $x(t)$.

Demostración. Tenemos que:

$$\delta(h) = - \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} \right] h dt + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} h \right) \Big|_{t_0}^{t_1}$$

puesto que $h(t_0) = h(t_1) = 0$ se tiene $\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} h \right) \Big|_{t_0}^{t_1} = 0$. Si γ es un extremal, entonces $\delta(h) = 0 \forall h$ con $h(t_0) = h(t_1) = 0$. Por lo tanto, se tiene:

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t) h(t) dt = 0$$

donde $f(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} \forall h$.

Por el lema, $f(t) \equiv 0$.

Recíprocamente si $f(t) \equiv 0$ entonces claramente $\delta(h) \equiv 0$. ■

A.4 Ecuación Euler-Lagrange

Definición A.4.1 La ecuación

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

es llamada la Ecuación de Euler-Lagrange para la funcional

$$\phi = \int_{t_0}^{t_1} L(x, \dot{x}) dt$$

con esta definición y el teorema anterior se tiene:

Teorema A.4.2 La curva γ es un extremal de la funcional $\phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(x, \dot{x}) dt$ sobre el espacio de curvas que conecta (t_0, x_0) y (t_1, x_1) si la Ecuación de Euler-Lagrange se satisface a lo largo de γ .

A.5 Principio de “Hamilton” de Acción Mínima

Comparemos las Ecuaciones de dinámica:

$$\frac{d}{dt}(m_i \dot{r}_i) + \frac{\partial U}{\partial r_i} = 0$$

con las Ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x}$$

Teorema A.5.1 Los movimientos del sistema $\dot{x} = f(x)$ coincide con los extremales de la funcional

$$\phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L dt$$

donde $L = T - U$

diferencia entre la energía cinética y energía potencial.

Demostración. Sea $U = U(r)$ y $T = \sum m_i \frac{\dot{r}_i^2}{2}$

Tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} &= \frac{\partial T}{\partial \dot{r}_i} = m_i \dot{r}_i & \text{y} \\ \frac{\partial L}{\partial r_i} &= \frac{-\partial U}{\partial r_i}.\end{aligned}$$

Así,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} - \frac{\partial L}{\partial r_i} = \frac{d}{dt}(m_i \dot{r}_i) + \frac{\partial U}{\partial r_i} = 0 \quad \blacksquare$$

Corolario A.5.2 Sea (q_1, \dots, q_{3n}) cualquier coordenadas en el espacio de configuración de un sistema de n punto-masa. Entonces la evolución de q en el tiempo esta sujeta a las Ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad \text{donde} \quad L = T - U.$$

Demostración. Por teorema A.4.1, un movimiento es un extremal de la funcional $\int L dt$. ■

Notación. En mecánica, se usa la siguiente terminología:

$L(q, \dot{q}) = T - U$ es la función de Lagrange o Lagrangiano,

$q_i =$ coordenadas generalizadas,

$\dot{q}_i =$ velocidad generalizada,

$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i$ momentos generalizados,

$\frac{\partial L}{\partial q_i} =$ fuerzas generalizadas;

$\int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}) dt$ es la acción y

$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \right) = 0$ son las Ecuaciones de Lagrange.

Grupo de Lie y Algebras de Lie

B.1 Introducción

A continuación damos las nociones de geometría diferencial referente a grupos de Lie y álgebras de Lie usadas en el Capítulo 2 en teorías de conexiones sobre fibrados. Este apéndice fue tomado esencialmente de Bleeker, D. [3]. y Bootby, W. H. [4].

Definiciones B.1.1 [4]

a) *Un grupo de Lie G es una variedad diferenciable de dimensión finita y donde las operaciones:*

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \longrightarrow & G \\ (ag) & \longrightarrow & ag \end{array} \quad y \quad \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ a & \longrightarrow & a^{-1} \end{array}$$

son aplicaciones C^∞ .

Denotemos por $L_a : G \longrightarrow G$, la acción a izquierda de a esto es:

$$L_a(g) = a \cdot g$$

y e es el elemento identidad de G .

Análogamente, para la acción a derecha de a en G :

$$R_a : G \longrightarrow G$$

así: $R_a(g) = ga$.

Dado cualquier vector $X_e \in T_e G$, construimos un vector que pertenece a $T_a G$ aplicando la diferencial lineal sobre X :

$$\begin{aligned} L_{a*} : T_e G &\longrightarrow T_a(G) \\ X_e &\longrightarrow X_a \end{aligned}$$

cuando a recorre G obtenemos un campo vectorial sobre G . Tal campo vectorial es por construcción invariante a izquierda:

$$L_{g*} X = X \quad \forall g \in G$$

o así

$$L_{g*}(X_{g'}) = X_{gg'} \quad \forall g, g' \in G.$$

Del mismo modo se pueden construir campos vectoriales invariantes a derecha; con la acción a derecha:

$$R_{g*} X = X \quad \forall g \in G$$

ó

$$R_{g*}(X_{g'}) = X_{g'g} \quad \forall g, g' \in G.$$

b) El álgebra de Lie de G , es por definición el conjunto de campos vectoriales invariantes a izquierda (a derecha), lo denotaremos por \mathcal{G} .

Si G es un grupo de dimensión n , \mathcal{G} es un espacio vectorial de dimensión n isomorfo a $T_e G$, [3]. Esto es

$$\mathcal{G} \cong T_e G.$$

Además $\hat{\mathcal{G}}$ es cerrado respecto a una operación corchete ($[\ ,]$). En otras palabras:

Si X y Y son campos a izquierda sobre G , entonces $[X, Y]$ es un campo invariante a izquierda sobre G .

En consecuencia, dada una base $\{X_1, \dots, X_n\}$ de \mathcal{G} , existen constantes de estructura f_{ij}^k tal que:

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^n f_{ij}^k X_k.$$

Cualquier elemento $a \in G$, se puede asociar con una aplicación (llamada **conjugada**) I_a , tal que:

$$\begin{aligned} I_a : G &\longrightarrow G \\ g &\longrightarrow aga^{-1} \end{aligned}$$

Vía su diferencial lineal:

$$I_{a*} = \mathfrak{L}\delta_a : T_e G \longrightarrow T_e G$$

esta aplicación induce un automorfismo de $\mathcal{G} = T_e G$ esto es: $\mathfrak{L}\delta_a$ es un isomorfismo de \mathcal{G} en sí mismo, [3].

Por lo tanto la aplicación:

$$\mathfrak{L}\delta : G \longrightarrow \text{Aut}(\mathcal{G})^1$$

define la: **representación adjunta de G** .

c) *Definición ([8]). Una forma ω sobre G se dice **invariante a izquierda** si:*

$$L_{a*}\omega = \omega \quad \forall a \in G$$

Sea $\xi \in \mathcal{G} = T_e G$ construyamos el campo vectorial a izquierda sobre G :

$$\begin{aligned} X_\xi : G &\longrightarrow T_g G \\ g &\longrightarrow L_{g*}\xi \end{aligned}$$

¹Aut(\mathcal{G}) denota el grupo de automorfismos de \mathcal{G} es un homomorfismo de grupos.

luego la aplicación $X_\xi \longrightarrow \xi$ es un isomorfismo y llamamos a esa aplicación **1-forma canónica sobre \mathcal{G}** (forma de Maurer-Cartan) luego definamos

$$\begin{aligned}\omega_0 : TG &\longrightarrow \mathcal{G} \\ X_\xi(g) &\longrightarrow \xi\end{aligned}$$

como $\omega_0(g, X_\xi(g)) = \xi_{(e)}$.

Otra Notación (física). $\omega_0 = dg \cdot g^{-1} = X_\xi(g) \cdot g^{-1}$ tal como esta definida ω_0 es una **1-forma** invariante a izquierda sobre G . Al espacio de todas las 1-formas invariantes a izquierda se denota por \mathcal{G}^* (dual de \mathcal{G}).

Observación B.1.2 Si $X_e \in \mathcal{G}$ entonces es $\omega_0(X_e)$ constante sobre G .

Conclusiones

Se considera el fibrado principal $P(\mathbb{R}^4, SU(2))$, el cual define la teoría de calibre de Yang-Mills, donde la idea básica de dicha teoría es una rotación isospin de cada punto del espacio tiempo $(x, t) \in \mathbb{R}^4$, el cual afecta potenciales de calibre $(\mathcal{A}_u(x))$ y campos de partículas $|\varphi|$, así:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_u(x) &\rightsquigarrow g^{-1}(x)\mathcal{A}_u(x)g(x) + g^{-1}(x)\partial_u g(x) \\ \varphi &\rightsquigarrow g^{-1}\varphi.\end{aligned}$$

La teoría de los espacios fibrados sirve de marco teórico para el desarrollo de la teoría de calibre no-abeliana de Yang-Mills. Entre lo que se pudo observar lo siguiente:

a) Una geometrización de los potenciales de calibre $\mathcal{A}_u(x)$ a través de una conexión ω de un fibrado principal $P(M, G)$, esto es:

$$\mathcal{A}_u(x) \text{ (potencial de calibre)} \longleftrightarrow \begin{array}{l} \text{conexión } \omega \text{ de un} \\ \text{fibrado principal } P(M, G). \end{array}$$

b) Identificación de los campos de fuerzas \mathcal{F} con la curvatura de la conexión de un fibrado PFB $P(M, G)$:

$$\mathcal{F}_{uv}(x) \text{ (Campo de fuerzas)} \longleftrightarrow \Omega_\omega \text{ del } P(M, G).$$

c) Identificación de las transformaciones de calibre \mathcal{G} (corresponden a cambios de secciones del fibrado principal) con las secciones de un fibrado asociado \mathcal{B} de $P(M, G)$:

$$\varphi : P \longrightarrow V \longleftrightarrow \sigma : M \longrightarrow \mathcal{B}.$$

d) Se presentan las Ecuaciones de Yang-Mills de una manera sencilla y elegante, considerando un lagrangiano L_{YM} particular sobre el espacio de las conexiones $C(P)$ y definiendo una forma de curvatura Ω sobre M con valores en el espacio de las secciones $\Gamma(E)$ de un espacio asociado. Además se define los campos de Yang-Mills como puntos críticos de L_{YM} y donde las Ecuaciones de movimiento para dichos campos no son más que las Ecuaciones de Euler-Lagrange para L_{YM} :

$$D * \Omega = 0.$$

e) Culminamos este trabajo, probando que toda conexión auto dual ($*\Omega = \Omega$) es un campo de Yang-Mills, usando la identidad de Bianchi:

$$D\Omega = 0.$$

Bibliografía

- [1] ABRAHAM / MARSDEN / RATIU-(1988): Manifolds, Tensor Analysis and Applications. 2da. Edition. Springer-Verlag. Applied Mathematical Sciences. Vol, 75.
- [2] ARNOLD V.I. (1989). Mathematical Methods of classical Mechanics. Second edition, Springer-Verlag. New York.
- [3] BLEECKER, David. (1981). Gauge theory and Variational Principles. Global Analysis. Pure and applied. Addison-Wesley Publishing. Company Advanced Book. Program.
- [4] BOOTHBY, William M. (1975). An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry. Academic Press. New York.
- [5] CHERN S.S (1978). Selected papers New York.
- [6] DALE, Husemoller. (1975). Fiber Bundles, 2nd ed. Springer-Verlag, New York.
- [7] DANIEL M. and VIALLET M. (1980). The geometrical setting of gauge theories of the Yang-Mills type. Reviews of Modern Physics. Vol. 52 No. 1, January 1980.
- [8] DRECHSLER, W, and MAYER M. E. . (1977). Fiber Bundle Techniques in Gauge theories lecture Notes in Physics, Vol 67. Springer-Verlag. Berlin.

-
- [9] EGUCHI, T., GILKEY P., HANSON A. (1980). Gravitation, Gauge theories and Differential Geometry. Physics Reports. Review. Section of physics, Letters 66.
- [10] FADDIEV L.D. and SLAVNOV A.A. (1980). Gauge Fields: Introduction to Quantum Theory-The Benjamin / Cummings Publishing Company, Inc.
- [11] FELSAGER, Bjrørn. (1981). Geometry Particles and Fields. Odense University.
- [12] GARCIA P. Pedro L (1978). Critical principal conections and gauge invariance. Reports on Math. Phy. Vol. 13337-344.1978.
- [13] GARCIA P. Pedro L / PEREZ R. Antonio (1978). Reducibility of the symplectic structure of minimal interactions. Lecture Notes in Math. Springer-Verlag. Vol. 676. pp. 409-433. 1978.
- [14] GARCIA P. Pedro L (1980). Tangent structure of Yang-Mills equations and Hodge theory. Lecture Notes in Math Springer Verlag. Vol. 836 292-312. 1980.
- [15] ISHAM, Chris J. (1989). Modern Differential Geometry for Physicists World Scientific. Lecture Notes in physics. Vol. 32.
- [16] KOBAYASHI AND NOMIZU. (1963). Foundations of Differential Geometry. Interscience Tracts in Pure and applied Mathematics. Number 15, Vol. I.
- [17] LUNEV F.A. (1992). Three dimensional Yang-Mills theory in gauge invariant variables. Physics letters B. 295 (1992)99-103.

-
- [18] MARTINI R. and DEJAGER E.M. (1981). Geometric Techniques in gauge theories. Lecture Notes in Phy. Vol. 67. Springer Verlag.
- [19] MINZONI A.A. / MUCINO J. / M ROSENBAUM (1994). On the structure of Yang-Mills fields in compactified Minkowski space J. Math, Phy. 35(11) Nov. 1994. 5642-5659.
- [20] MISNER Ch. / THORNE K. /WHEELER I. (1973) Gravitation. W. H. Freeman and company.
- [21] NAKAHARA, M. (1991). Geometry, Topology and physics. Graduate Student series in physics. Institute of physics publishing Bristol and Philadelphia.
- [22] NASH- CHARLES SIDDHARTHA Sen. (1990). Topology and Geometry for Physicists. Academic Press, Inc.
- [23] SCHAWRTZ F. (1982). Symetrics of $SU(2)$ invariant Yang-Mills theories. Letters in Math. Phy. 6(1982).355-359.
- [24] SOCOLOVSKY M. (1991). Gauge Transformations and fiber bundle theory. J. math. Phys. 32 (9). Sept. 11. pp. 2522.
- [25] SPIVAK, M. (1979). A Comprehensive Introduction to Differential Geometry. Second Edition. Vol. I-II. Publish or Perish, Inc. Berkeley.
- [26] STEENROD, Norman. (1974). The Topology of fibre Bundles. Princeton Mathematical Series. New Jersey.
- [27] TRAUTMAN, A. (1970). Fibre Bundles Associated with space-time. Reports on Math. Phy. Vol. 1 (1970) No. 1 pp. 29-62.
- [28] VERGELES S.N. (1983). Some propierties of orbit space in Yang-Mills. Theory. Letters in Math Phy. 7(1983).399-406.

- [29] VILCHEZ G., Nieves (1995). Espacios fibrados principales y algunas aplicaciones. Trabajo de Ascenso. NURR-ULA.
- [30] WANG L.L /YANG C.N (1975). Classification of $SU(2)$ gauge fields. Physical Review D. Vol. 17. Number 10.
- [31] WU. T.T/ YANG C.N. (1975). Concep of nonintegrable phase factores and global formulation of gauge fields. Physical Review D. Vol. 12 number 12. 15 December 1975.
- [32] YANG C.N./MILLS R.L., Phys. Rev. 96. (1954) 191.
- [33] P.A.M. Dirac. (1931). Proc. Royal Soc. A133, 60. 1931.

Símbolos

V	:	Espacio vectorial.
\mathbb{R}	:	Los números reales.
\mathbb{C}	:	Los números complejos.
E, M, N, P	:	Variedades.
$\wedge^k(E, F)$:	k -formas con valores en F .
$\wedge^k(E)$:	k -formas con valores en R .
$\wedge^k(N, \mathcal{G})$:	k -formas en N con valores en \mathcal{G} .
$C^\infty(M)$:	Espacio de las funciones infinitamente diferenciales sobre M .
$M_n(\mathbb{R})$:	Conjunto de las matrices reales $n \times n$.
$Gl(n, \mathbb{R})$:	Conjunto de las matrices reales invertibles $n \times n$.
$Gl(n, \mathbb{C})$:	Conjunto de las matrices complejas de $n \times n$.
$Gl(V)$:	Grupo de automorfismo de V .
$SO(n)$:	Grupo especial ortogonal.
$U(n)$:	Grupo unitario.
$SU(n)$:	Grupo especial unitario.
S^1	:	Círculo unitario.
$\mathcal{U}(n)$:	Álgebra de Lie de $U(n)$.
G	:	Grupo de Lie.
L_g	:	Traslación a izquierda.
R_g	:	Traslación a derecha.
\mathcal{G}	:	Álgebra de Lie del Grupo G .
$T_e G$:	Espacio tangente al grupo G en e .
$\mathcal{R}(\mathcal{G})$:	Conjunto de campos invariantes a derecha.
I	:	Aplicación conjugada de G en G .

$\mathfrak{L}\delta$: Representación adjunta de G .
π	: Proyección.
$P(M, G)$: Fibrado principal (PFB).
$E(M, G, F, P)$: Fibrado asociado a $P(M, G)$.
$\mathcal{F}(M)$: Fibrado de sistema de referencia.
S_U	: Representación local de una sección S .
$C(P, F)$: Espacio de las aplicaciones $\varphi : P \rightarrow F$.
$C(P, V)$: Campo de partículas.
$T_x M$: Conjunto de todos los vectores tangentes en x .
$Y_x[f]$: Derivada de f a lo largo de Y_x .
$T_x f$: Diferencial de f en x .
TM	: Espacio fibrado tangente.
$\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$: Grupo de las aplicaciones lineales de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^n .
$\mathfrak{X}(M)$: Conjunto de todos los campos vectoriales sobre M .
$[X, Y]$: Corchete de Lie de X y Y .
$L_Y Z$: Derivada de Lie de Z a lo largo de Y .
$\varphi^* \omega$: Pull-back de la forma ω vía φ .
$\varphi_* X$: Push-forward del campo X por φ .
P	: Espacio total de un fibrado.
Ψ_u	: Trivialización local (TL) de un fibrado.
φ_{ij}	: Funciones de transición de U_i a U_j .
σ_{u_i}	: Sección local de un fibrado.
ω	: k -formas (1-formas de conexión).
ω_0	: 1-forma canónica sobre \mathfrak{g} . "Maurer Cartan".
H_p	: Subespacio horizontal de $T_p P$.
V_p	: Subespacio vertical de $T_p P$.
$H_{[p,v]} \mathcal{E}$: Subespacio de horizontal de $T_{[p,v]} \mathcal{E}$.
$V_{[p,v]} \mathcal{E}$: Subespacio de vertical de $T_{[p,v]} \mathcal{E}$.

A^*	: Campo fundamental.
σ_a	: Matrices de Pauli.
E_a	: Base de \mathcal{G} .
$A_u^a(x)$: Potencial de calibre.
Ω_U	: Forma local de curvatura.
A	: Potencial de Yang-Mills.
\mathcal{F}	: Campo de fuerzas de Yang-Mills.
τ_ϵ	: Aplicación de transporte paralelo.
$\nabla_{[\alpha]}\varphi$: Derivada covariante de φ en la dirección de α .
∇_X	: Derivada covariante en la dirección de X .
D	: Derivada exterior covariante.
D^*	: Adjunta de D .
R	: 2-formas con valores en $\Gamma(E)$.
\mathfrak{g}	: Conjunto de las transformaciones de calibre.
$\tilde{\mathfrak{g}}$: Algebra de Lie de \mathcal{G} .
$\Gamma(U, E)$: Conjunto de secciones locales sobre U en E .
$\Gamma(E)$: Conjunto de secciones globales.
$\Gamma(\wedge^2 \otimes E)$: 2-formas sobre M con valores en E .
$d\varphi$: Derivada exterior de la forma φ .
$D^\omega\varphi$: Derivada exterior covariante de la forma φ .
L_{YM}	: Funcional de Yang-Mills.
Ω^ω	: Curvatura de una conexión ω .
$*\Omega$: Forma dual de Ω .

Indice

- σ -representación local, 84
- álgebra de Lie, 51
- órbita de G , 13
- órbitas, 83
- 1-forma de conexión, 40
- Ecuación de Yang-Mills, 95
- auto-dual, 96
- calibre, 14
- campo de fuerzas, 53
- campo de Yang-Mills, 93
- campo fundamental, 40
- campos de partículas, 36
- condición de compatibilidad, 44
- conexión, 38–40
- conexión de Yang-Mills, 83, 86
- conjunto $C(P)$ de todas las conexiones sobre P , 83
- conjunto de las secciones, 81
- constantes de estructuras, 50
- curvatura de una conexión, 53
- derivada covariante, 47, 69, 70
- derivada exterior covariante, 52
- Ecuación de Euler-Lagrange, 95, 102
- Ecuación del transporte paralelo, 47
- Ecuación Euler-Lagrange, 101
- Ecuaciones de Euler-Lagrange, 97, 102, 103
- Ecuaciones de Lagrange, 103
- elemento unitario, 79
- equivariante, 76
- espacio base, 2
- espacio total, 2
- extremal, 100, 101
- fibra, 2
- fibrado, 81
- fibrado asociado, 28
- fibrado de Hopf, 23
- Fibrado de Sistemas de Referencias, 21
- fibrado diferenciable, 1
- fibrado principal, 12
- fibrado principal coordinado, 18
- fibrado principal trivial, 20
- fibrado tangente TM , 9
- forma de conexión, 45
- funcional, 98
- funcionales, 98

- funciones de transición, 3, 8, 15
- grupo de calibre, 76
- grupo de estructura, 2
- Identidad de Bianchi, 57
- levantamiento, 46
- levantamiento horizontal, 53, 67
- operador adjunto, 94
- potencial, 53
- potencial de calibre, 45
- principio de mínima acción de “Hamilton”, 98
- proyección, 2
- relaciones de compatibilidad, 77
- representación de G , 27
- representación local, 34
- sección, 4, 17
- sección global, 4, 7, 17
- sección local, 6
- sección nula, 8, 79
- sistema referencial, 21
- subespacio horizontal, 39, 67
- subespacio vertical, 39, 66
- transformación de calibre, 76
- transportado paralelamente, 46
- transporte paralelo, 67
- trivial, 4
- trivialización global, 4
- trivialización local, 2, 4, 14
- variación, 99