UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
FACULTAD DE HUMANIDADES Y EDUCACIÓN
ESCUELA DE EDUCACIÓN

ANÁLISIS MATEMÁTICO DE UNA VARIABLE REAL CON CD – ROM

REINALDO CADENAS

Trabajo de Ascenso presentado por el Profesor Reinaldo Cadenas como credencial de mérito para ascender a la categoría de Profesor Titular, según lo establecido en el artículo 165 del Estatuto de Personal Docente y de Investigación de la Universidad de los Andes.

NOVIEMBRE 2002
MÉRIDA-VENEZUELA

A mi esposa Isaura

A mis hijos Reina Isamar y
Reinaldo José

A mis padres

El objetivo central del presente trabajo es de presentar un texto (teórico-practico) de Análisis Matemático de una variable dirigido a todos los interesados en obtener una formación matemática en esta área. El texto esta acompañado de un CD-ROM el cual complementa el estudio de éste, y además le permitirá al docente desarrollar su actividad pedagógica utilizándolo con tecnologías multimedia.

Para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje del Análisis Matemático, es necesario que el desarrollo del presente texto este enmarcado dentro de la propuesta pedagógica de que el estudiante en este proceso logre obtener un sólido esquema de conocimiento conceptual lo cual le permitirá obtener un aprendizaje significativo (este permite adquirir nuevos conocimientos a través de la construcción de significados), es decir, se perciben nuevos conocimientos estableciendo relaciones con lo que ya se sabe y este nuevo conocimiento se incorpora a la estructura mental formando parte de la memoria comprensiva (esta recuerda lo que se comprende); de esta manera los nuevos conocimientos son aplicados en la solución de problemas.

Así en este material, presentamos un estudio de los conceptos y resultados básicos del Análisis Matemático de una variable, mostrando los detalles que los textos generalmente omiten, y que los estudiantes por tener lagunas o falta de adiestramiento no pueden aclarar por sus propios medios. La estructura del texto se adapta al desarrollo de los contenidos clásicos de los diversos programas de las asignaturas que estudian los tópicos del análisis matemático de una variable, el texto consta de siete (7) capítulos, los cuales contienen 183 problemas resueltos y 386 problemas propuestos (ver [7]); estos problemas permitirán que el estudiante logre consolidar los nuevos conocimientos. Además, para la mayoría de los problemas propuestos hemos dado pequeñas indicaciones las cuales pueden facilitar la solución de los mismos y al final de los capítulos 2,3,4,5,6 y 7 damos una miscelánea de problemas que el lector con los conocimientos adquiridos puede atacar sin mucha dificultad.

El material presentado pretende ser lo más autocontenido posible, así le permitirá al lector concentrarse en un estudio completo de este siguiendo el proceso lógico-formal que requiere el estudio del Análisis.

En el presente material se presentan algunos tópicos no usuales en la literatura clásica del Análisis Matemático, como por ejemplo: las sucesiones paralelas y equivalentes (ver capítulo 4), funciones secuencialmente regular de Cauchy (ver capítulo 5) y la derivada simétrica (ver capítulo 6).

El primer capítulo lo dedicamos a resumir los conceptos y resultados previos que el estudiante debe saber para afrontar el estudio de los capítulos siguientes.

El capítulo 2, trata sobre el desarrollo axiomático del cuerpo ordenado y completo de los números reales. En éste, se hace énfasis en el estudio del Axioma Fundamental del Análisis y sus aplicaciones.

En el capítulo 3, se desarrollan las nociones básicas sobre la topología de la recta, estas nociones son fundamentales por las implicaciones que tienen en el desarrollo de los capítulos siguientes.

El capítulo 4, trata sobre las sucesiones de números reales, las cuales permitirán caracterizar las nociones topológicas sobre subconjuntos de la recta. Además, abordamos el estudio sobre límites de funciones.

En el capítulo 5, estudiamos un concepto crucial del análisis, el de continuidad de una función y algunos resultados clásicos como los teoremas de Bolzano, Weierstrass y Heine. También estudiamos el concepto de continuidad uniforme de una función.

En el capítulo 6, se desarrolla el concepto básico del Cálculo Diferencial el de la derivada. Además, se trata el Teorema del Valor Medio, el cual es uno de los teoremas más importantes del Cálculo.

En el capítulo 7, estudiamos la integral de Riemann siguiendo el enfoque presentado por Michael Spivak en [17]. Aquí, se estudia el Teorema Fundamental del Cálculo el cual relaciona la derivada con la integral.

Algunos comentarios adicionales sobre la estructura del texto:

- Cada capítulo contiene una variedad de problemas resueltos donde se incluyen contraejemplos y algunas consecuencias de los conceptos y teoremas. Al final de cada capítulo se da una sección de problemas propuestos con algunas sugerencias y por último se propone una miscelánea de problemas.

- Como es usual presentamos un listado de bibliografía y en general las referencias bibliográficas se mencionan utilizando corchetes; por ejemplo, [17] indica el libro "Cálculo Infinitesimal"de Michael Spivak.
- El final de la prueba de cada resultado se indica con el símbolo ∎
- En el comienzo de cada capítulo se presentan breves reseñas históricas que permitirán al estudiante ubicar en el tiempo los momentos en los cuales surgieron los principales conceptos y resultados del Análisis.

El cd-rom contiene la versión electrónica del texto y adicionalmente contiene algunos rasgos interactivos como el glosario y la biografía de los matemáticos que se mencionan en el texto.

Cualquier sugerencia o corrección del presente material será bienvenida, pues de esta manera, se dará un mejoramiento continuo de este.

Por último pretendemos que el presente trabajo pueda ser una referencia en español muy útil a nuestros estudiantes y profesores.

Reinaldo Cadenas
Noviembre de 2002

Índice general

"Entre los matemáticos existe la anécdota siguiente:

"El físico cree -dijo el matemático- que el número 60 es divisible por todos los números. El anota que 60 se divide por 1, 2, 3, 4, 5, y 6. Comprueba unos cuantos números más, por ejemplo, 10, 15, 20 y 30, cogidos como dice él al azar. En vista que 60 se divide también por esos números, cree que los datos experimentales son suficientes."

"Sí, pero fíjese en el caso del ingeniero -replicó el físico-. El ingeniero cree que todos los números impares son simples (es decir, que no se dividen por entero con nada, a excepción de por sí mismo y la unidad). En todo caso, el 1 puede considerarse como un número simple -demuestra él-. Depués van el 3, el 5 y el 7, y todos ellos, sin duda alguna, son simples también. Después va el 9 -un caso fastidioso-, y este por lo visto, no es un número simple. Pero el 11 y el 13, desde luego, son simples. Volvamos al 9 -dice él-. Yo considero que el 9 tiene que ser un error del experimento".

"Pero -dice el ingeniero-, observen al médico. El ha permitido a un enfermo de uremia, el cual se encontraba en estado gravísimo, que comiera sopa de col, y el paciente ha recobrado su salud. El médico está escribiendo un trabajo científico acerca de que la sopa de col ayuda a curar la uremia. Pero luego él mismo recomienda a otro paciente similar sopa de col y el enfermo fallece. Entonces el médico señala: "La sopa de col ayuda en un 50 por ciento de los casos".

"Sí, pero está bueno ese matemático -dice el médico-. A la pregunta: "¿Cómo cazar un león en un desierto?" él contesta: "¿Qué significa cazar un león?" Eso quiere decir aislarse del león por medio de una reja. Yo me meto detrás de la reja y el león, según la definición, ya está cazado". **Ya Jurguin**

"Aunque haga muchos experimentos mi hipótesis no queda confirmada pero basta un sólo experimento para confirmar mi error". **Albert Einstein**

"... la precisión y el rigor no constituyen ni obstáculos para la intuición ni tampoco fines en sí mismos, sino simplemente es el medio natural para formular y tratar las cuestiones matemáticas". **Michael Spivak**

OBJETIVOS (Capítulo 1)

- Resumir y sistematizar las nociones básicas sobre los tópicos matemáticos estudiados en cursos previos.
- Adquirir, analizar y asociar los conceptos y resultados estudiados en asignaturas previas.
- Aplicar los conocimientos previos utilizando la memoria comprensiva en la solución de problemas.

Capítulo 1

Generalidades

Este capítulo se dedica a recopilar algunas definiciones y resultados básicos que serán utilizados en el desarrollo del texto. Estos pertenecen a variados tópicos de las matemáticas previamente estudiados, para consultas adicionales hacemos un llamado al lector a consultar la bibliografía correspondiente. Además, se proponen una gran cantidad de ejercicios que permitirán consolidar y repasar la parte teórica.

Nota para el Estudiante
Los tópicos a desarrollar en el presente capítulo representan requisitos indispensables para que el estudiante pueda afrontar con éxito el estudio de la asignatura Análisis Matemático. Por lo tanto, el estudiante debe estar familiarizado con las definiciones y resultados de este capítulo ya que estos representan conocimientos previos y son el punto de partida para el estudio del Análisis. Así, invitamos a los estudiantes que tengan fallas en los tópicos resumidos en el presente capítulo a dedicar mayor tiempo en su estudio para que de esta forma los conceptos y resultados lleguen a establecerse en un esquema de conocimiento, formando parte de él, de esta manera cada estudiante estará en capacidad de aplicarlos adecuadamente.

Nota para el Profesor
Sugerimos al profesor aplicar una prueba que le permita diagnosticar cuales son los tópicos de este capítulo donde los estudiantes presentan la mayor cantidad de fallas. Además, sugerimos que el profesor desarrolle un repaso activo con el estudiante de todo el capítulo; destacando de manera primordial los tópicos donde los estudiantes tengan mayores dificultades.

1.1. Notaciones Básicas

A continuación procedemos a enumerar las diversas definiciones y resultados que forman parte de este capítulo.

- Los símbolos $\forall$, $\exists$, $:$, $\wedge$, $\vee$, expresan el significado de "para todo", "existe", "tal que", "y", "o" respectivamente.
- El conjunto $\mathbb{R}^+$ denota al conjunto de todos los números reales positivos.
- La notación $i = \overline{1,n}$ nos indicará que i toma cada uno de los elementos del conjunto $\{1, 2, 3, \ldots n\}$.
- El símbolo $\max A$ (respectivamente, $\min A$) denota al elemento máximo (respectivamente, mínimo) del conjunto A. Es decir, $\max A \geq x$ (respectivamente, $\min A \leq x$) para todo x en A.
- La notación $[x]$ se refiere a la parte entera del número x, es decir, $[x] = n$ donde n satisface, $n \leq x < n + 1$, n es un número entero.
- Usaremos letras mayúsculas A,B,C, etc, para denotar a los conjuntos y las letras minúsculas a,b,c, etc, para denotar a los objetos o elementos de un conjunto. Cuando un objeto está en un conjunto A, escribimos $a \in A$ y en caso contrario escribimos $a \notin A$.

1.2. Conjuntos

Cuando escribimos $A \neq B$, entendemos que A y B son conjuntos diferentes y $a \neq b$ representa a elementos diferentes.

1. Se dice que un conjunto A es un **subconjunto** de B si todo elemento de A es también un elemento de B y escribimos $A \subset B$.
   Si $A = B$, es cierto que, $A \subset B$ y $B \subset A$ y también es cierto que, si $A \subset B$ y $B \subset A$, entonces $A = B$.

   Nota **1.2.1.**

   Consideraremos un conjunto llamado **vacío**, denotado por $\emptyset$, el cual se piensa como el conjunto que no tiene elementos. Se conviene en que $\emptyset \subset A$, para cualquier conjunto A.

2. Dados A y B conjuntos, la **reunión** de A y B (ver, Figura 1.1) denotada por $A \cup B$ se define mediante:

$$A \cup B = \{x : \ x \in A \quad o \quad x \in B\}.$$

Nota **1.2.2.**

La palabra "o" en este contexto la entenderemos de esta forma: $x \in A$ o $x \in B$ o x está en ambos.

3. Dados dos conjuntos A y B la **intersección** de A y B (ver, Figura 1.1) denotada por $A \cap B$ y la **diferencia** de A con respecto a B (ver, Figura 1.1) denotada por $A \backslash B$ se definen mediante:

$$A \cap B = \{x : \ x \in A \quad y \quad x \in B\}. \qquad (1)$$

$$A \backslash B = \{x : \ x \in A \quad y \quad x \notin B\}. \qquad (2)$$

4. La palabra "y" en este contexto la entenderemos de esta forma: x está en A y x está en B simultáneamente.

5. Si $A \cap B = \emptyset$, diremos que A y B son **conjuntos disjuntos**.

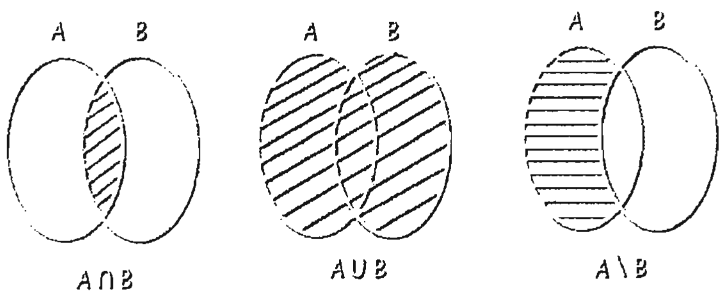

Figura 1.1: Operaciones entre conjuntos

1.3. La Demostración Matemática

1. En Matemáticas el enunciado:

   $$\textit{si} \quad p \quad \textit{entonces} \quad q,$$

   simbolizado mediante $\mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{q}$, significa que si p es cierto entonces q es cierto. A p le llamaremos **hipótesis** y a q le llamaremos **tesis**, si queremos probar un enunciado $p \Rightarrow q$, una forma es asumir cierta la hipótesis y concluir la tesis.

2. Dado un enunciado de la forma, *si p entonces q*, llamaremos **contrarrecíproco** al enunciado,

   $$\textit{si} \quad \textit{no} \quad q \quad \textit{entonces} \quad \textit{no} \quad p,$$

   simbolizado mediante $(\neg \mathbf{q}) \Rightarrow (\neg \mathbf{p})$.

   1.3.1.

   Si tenemos el enunciado,

   $$\textit{si} \quad a \in A \quad \textit{entonces} \quad a^3 \in A,$$

   su contrarrecíproco es

   $$\textit{si} \quad a^3 \notin A \quad \textit{entonces} \quad a \notin A.$$

   Nota **1.3.2.**

   Siempre un enunciado y su contrarrecíproco son equivalentes, es decir cada uno es verdad si y sólo si el otro lo es.

3. Algunos enunciados de la forma $p \Rightarrow q$ se pueden probar de manera más simple usando el contrarrecíproco (también conocido como **Método de Reducción al Absurdo**).

4. Ahora dado un enunciado de la forma *si p entonces q* al enunciado de la forma

$$si \quad q \quad entonces \quad p,$$

lo llamaremos **recíproco**

1.3.3.

Sea $n \in \mathbb{Z}$, para el enunciado:

$$si \;\; n > 0 \;\; entonces \;\; n^2 \neq 0, \tag{3}$$

su recíproco es

$$si \;\; n^2 \neq 0 \;\; entonces \;\; n > 0.$$

Nota **1.3.4.**

Dado un enunciado su recíproco, **no** siempre es cierto (ver ejemplo 1.3.3).

5. Cuando se nos pregunta, si el recíproco de un enunciado es cierto o falso puede suceder:

   a) El recíproco es cierto y en tal caso es necesario dar una prueba formal y general.

   b) El recíproco es falso y en tal caso debemos dar un contraejemplo para refutar el enunciado.

6. Algunas veces sucede que, $p \Rightarrow q$ y $q \Rightarrow p$ son ambos ciertos en tal caso se escribe, $p \Leftrightarrow q$ (se lee *p si y sólo si q*). Cuando queremos probar un enunciado de la forma, $\mathbf{p} \Leftrightarrow \mathbf{q}$ debemos probarlo en dos partes: (i) $p \Rightarrow q$ y (ii) $q \Rightarrow p$.

7. Una **condición suficiente** para que $n^2 \neq 0$ $(n \in Z)$ es que $n > 0$, este enunciado es equivalente

$$n > 0 \quad \Rightarrow n^2 \neq 0.$$

8. Una **condición necesaria** para que $n > 0$ $(n \in \mathbb{Z})$ es que $n^2 \neq 0$, este enunciado es equivalente a $n > 0 \quad \Rightarrow n^2 \neq 0$. Nótese que, la condición $n^2 \neq 0$ es necesaria pero no suficiente (¿por qué?).

9. Una **condición necesaria y suficiente** para que $n \neq 0$ $(n \in \mathbb{Z})$ es que $n^2 \neq 0$. Así, escribimos

$$n \neq 0 \ \Leftrightarrow n^2 \neq 0.$$

10. Supongamos que X es un conjunto y $A \subset X$. Sea p un enunciado general sobre los elementos de X. Consideremos el enunciado:

Para todo x en A el enunciado p vale.

Ahora, queremos negar el enunciado anterior, la negación es:

Existe un x en A para el cual el enunciado p no vale.

1.3.5.

Consideremos el enunciado: $A \subset B$, A y B conjuntos. Su negación es: existe $x \in A$ tal que $x \notin B$.

11. Supongamos que deseamos probar un enunciado de la forma:

las proposiciones p,q y r son equivalentes.

Ser equivalentes significa: $p \Leftrightarrow q$, $q \Leftrightarrow r$ y $p \Leftrightarrow r$, para probar el enunciado es suficiente por ejemplo probar $p \Rightarrow q \Rightarrow r \Rightarrow p$ o cualquier otra forma que complete un "círculo" lógico.

12. Supongamos que deseamos probar un enunciado de la forma:

si p entonces q o r $(\ p \Rightarrow \ (q \vee r))$,

es suficiente suponer p y $(\neg r)$, y probar q y la otra posibilidad es suponer p y $(\neg q)$, y probar r.

1.3.6.

Sean l_1 y l_2 dos rectas distintas de un plano, entonces se verifica que o l_1 es paralela a l_2 o bien $l_1 \cap l_2 = \{p\}$.

Podemos probar el enunciado, suponiendo que l_1 no es paralela a l_2 y probando que $l_1 \cap l_2 = \{p\}$ o suponiendo $l_1 \cap l_2 \neq \{p\}$, y probando l_1 es paralela a l_2.

13. Ahora queremos probar enunciados donde se involucra **existencia.** Por ejemplo:

    Dados dos números naturales a y b ($a \neq b$), existe un número natural m tal que $ma > b$.

    En este caso debemos **exhibir** un número natural m que satisfaga $ma > b$.

14. Si queremos probar un resultado donde se involucre **unicidad**. Por ejemplo:

    Si $(\mathbb{Z}, +)$ el grupo de los números enteros, entonces $0 \in \mathbb{Z}$ es el único número entero que satisface la propiedad $0 + n = n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

    En general para estos casos de unicidad debemos suponer la existencia de otro número, digamos $0'$ tal que $0' + n = n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

1.4. Funciones

1. Sean A y B conjuntos no vacíos. Una **función** f de A en B, denotada por $f : A \to B$ es un subconjunto del conjunto

$$A \times B = \{(a, b) : \ a \in A \ \ y \ \ b \in B\}$$

donde $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$, tal que:

a) Para cada $a \in A$ el par $(a, b) \in f$, para algún $b \in B$ y

b) si $(a, b), (a, c) \in f$, entonces $b = c$.

2. El **dominio** de una función $f : A \to B$ (ver, figura 1.2) denotado por D(f) se define mediante

$$D(f) = \{a \in A : \ \exists\, b \in B;\ (a,b) \in f\}.$$

3. El **rango** de una función $f : A \to B$ (ver, figura 1.2) denotado por R(f) se define mediante

$$R(f) = \{b \in B : \ \exists\, a \in A:\ (a,b) \in f\}.$$

Cuando $(x,y) \in f$ escribimos $y = f(x)$. Así, podemos escribir

$$R(f) = \{y \in B : \ y = f(x);\ x \in A\}.$$

4. Sea $f : A \to B$ una función, si $A_0 \subset A$ se define la **restricción** de f a A_0 denotada por $f_{|A_0}$ mediante $f_{|A_0}(x) = f(x)$ para todo $x \in A_0$. En este caso, también se dice que f es una **extensión** a A de $f_{|A_0}$.

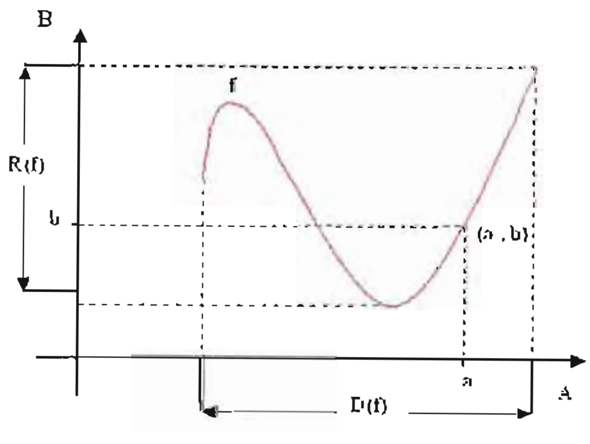

Figura 1.2: Función

Nota 1.4.1.

Dos funciones $f : A \to B$ y $g : C \to D$ son iguales si y sólo si $A = C$, $B = D$ y $f(x) = g(x)$ para cada $x \in A$.

1.4.2.

Considérese las siguientes funciones:

$$
\begin{array}{lll}
f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} & \text{dada por} & f(x) = x^2 \\
g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} & \text{dada por} & g(x) = x^2 \\
h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ & \text{dada por} & h(x) = x^2 \\
l : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ & \text{dada por} & l(x) = x^2 \\
m : \mathbb{R} \to \mathbb{R} & \text{dada por} & m(x) = x^3.
\end{array}
$$

nótese que, que las funciones f, g, h, l y m son diferentes tomadas dos a dos. (Ver, figura 1.3) (¿Por qué?)

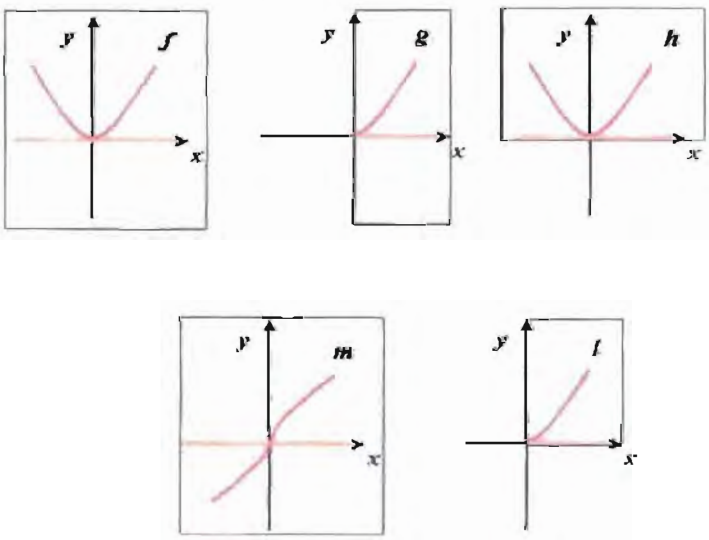

Figura 1.3: Funciones Polinómicas

5. Sea $f : X \to Y$ una función y $A \subset X$. El conjunto $f(A)$ se llama **imagen de** A bajo f (ver, figura1.4) y se define:

$$f(A) = \{y \in Y : y = f(x); \ x \in A\}.$$

6. Si $B \subset Y$ el conjunto $f^{-1}(B)$ se llama **imagen inversa** de B bajo f (ver. figura 1.4) y se define:

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : \quad f(x) \in B\}.$$

Nota 1.4.3.

Claramente, se verifica que $f(A) \subset Y$ y que $f^{-1}(B) \subset X$.

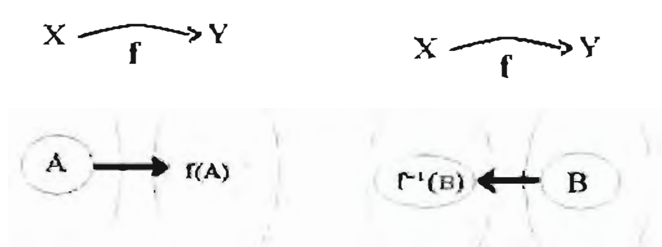

Figura 1.4: Imágenes e Imágenes Inversas

En general no se verifica que $f^{-1}[f(A)] = A$ y que $f[f^{-1}(B)] = B$. Para ilustrar este hecho considérese el siguiente

1.4.4.

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$ dada por $f(x) = |x|$. Sean $A_0 = [0, 1]$ y $B_0 = [-1, 1]$. fácilmente se verifica que $f^{-1}[f([0, 1])] = [-1, 1] \neq [0, 1]$ y que $f[f^{-1}([-1, 1])] = [0, 1] \neq [-1, 1]$.

Nota 1.4.5.

En general para una función $f : A \to B$, se verifica:

a) $A_0 \subset f^{-1}[f(A_0)], \quad \forall\, A_0 \subset A$.

b) $f[f^{-1}(B_0)] \subset B_0, \quad \forall\ B_0 \subset B$.

c) $f(\emptyset) = \emptyset$.

d) $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

7. Sean $f : A \to B$ y $g : C \to D$ funciones tales que $f(A) \subset C$. Entonces se define la **función composición** $g \circ f : A \to D$, mediante $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$.

8. Una función $f : A \to B$ se llama **inyectiva** si $f(a) = f(b)$, implica $a = b$; o $a \neq b$, implica $f(a) \neq f(b)$. La función f se llama **sobreyectiva** si $Rg(f) = B$ y f es **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva.

Nota **1.4.6.**

Si $f : A \to B$ es una función biyectiva, existe una función de B en A denotada por f^{-1} llamada **inversa** de f que satisface $f \circ f^{-1} = i_B$ (f^{-1} es la inversa por la derecha de f) y $f^{-1} \circ f = i_A$ (f^{-1} es la inversa por la izquierda de f) (i_A es la función identidad en A y i_B es la función identidad en B). En general f es biyectiva si y sólo si f^{-1} es biyectiva.

Una **operación binaria** en un conjunto A es una función sobreyectiva $f : A \times A \to A$. Por ejemplo; en $\mathbb{N}$ podemos definir la operación binaria adición $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mediante $(n, m) \to n + m$.

9. Sean A e I conjuntos arbitrarios. Sea $f : I \to A$ una función, conocemos que f es el conjunto $\{(\alpha, f(\alpha)) : \alpha \in I\}$. Usaremos la notación $\{f_\alpha\}_{\alpha \in I}$ para designar a la función f definida en I y cuyo valor en $\alpha \in I$ es $f(\alpha)$. Una función f escrita de la forma $\{f_\alpha\}_{\alpha \in I}$ se llama una **familia subindizada** por I. Es necesario destacar que cuando usamos la notación de una familia subindizada $\{f_\alpha\}_{\alpha \in I}$ para designar a una función esta no debe confundirse con la notación $\{f(\alpha) : \alpha \in I\}$, pues esta última representa el rango de la función f.

Nota **1.4.7.**

a) En el caso de una sucesión (infinita, ver sección 1.7) de conjuntos $A_1, A_2, A_3, \cdots$, la cual es una familia de conjuntos indizada por el conjunto $\mathbb{N}$, escribimos (A_n).

b) Usando la notación de familia subindizada podemos extender las definiciones de unión e intersección. Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de conjuntos, entonces se define:

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcup \{A_\alpha : \alpha \in I\} = \{x : x \in A_\alpha \ \ para \ \ algún \ \ \alpha \in I\}$$

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcap \{A_\alpha : \alpha \in I\} = \{x : x \in A_\alpha \ \ para \ \ cada \ \ \alpha \in I\}.$$

1.5. Relaciones

1. Un concepto más general que el de función es el de relación. Ahora, definiremos el concepto de relación y consideraremos los tipos de relaciones más usadas en Matemáticas a saber la relación de equivalencia y la relación de orden.

   Una **relación** $\Re$ de un conjunto $A(\neq \emptyset)$ en un conjunto $B(\neq \emptyset)$ es simplemente un subconjunto de $A \times B$, es decir, $\Re \subset A \times B$.

2. Una relación $\Re$ en un conjunto A, se llama de **equivalencia** si $\Re$ satisface:

   a) $(x, x) \in \Re, \quad \forall x \in A$. (Reflexiva)

   b) $(x, y) \in \Re \ \Rightarrow \ (y, x) \in \Re$. (Simétrica)

   c) $(x, y), (y, z) \in \Re \ \Rightarrow \ (x, z) \in \Re$. (Transitiva)

Nota **1.5.1.**

Algunas veces se usa el símbolo $\sim$ para sustituir a $\Re$ en una relación de equivalencia.

3. Dada una relación de equivalencia $\sim$ en un conjunto A, un elemento $x \in A$ genera un conjunto $\overline{x}$ llamado las **clases de equivalencia** determinada por x y se define mediante:
$$\overline{x} = \{y \in A : \quad y \sim x\}.$$
Es claro por 1.5(2(a)) que $x \in \overline{x}$, además las clases de equivalencia tienen la siguiente propiedad:
$$\overline{x} \cap \overline{y} = \emptyset \quad o \quad \overline{x} = \overline{y}.$$
Es decir, dos clases de equivalencia o son iguales o son disjuntas.

En la prueba del resultado anterior se usan las nociones dadas 1.3(12).

Nota **1.5.2.**

Dada una relación de equivalencia en un conjunto A, se denota con $A_{|\sim}$ el conjunto de todas las clases de equivalencia determinada por la relación $\sim$. De la propiedad dada en 1.5(3), se sigue que, elementos diferentes en $A_{|\sim}$ son disjuntos. Además, $A = \bigcup\limits_{\overline{x} \in A_{|\sim}} \overline{x}$. (Verificarlo)

4. Una relación $\Im$ en un conjunto A se llama de **orden** (o de orden lineal) si $\Im$ satisface:

   a) $x \neq y \;\Rightarrow\; (x, y) \in \Im \;\; o \;\; (y, x) \in \Im, \;\; \forall x, y \in A$. (Tricotomía)
   b) $(x, y) \in \Im$ y $(y, x) \in \Im \;\Rightarrow\; x = y$. (Antisimétrica)
   c) $(x, x) \in \Im$ y $(y, z) \in \Im \;\Rightarrow (x, z) \in \Im, \;\; \forall x, y, z \in A$. (Transitiva)

Nota **1.5.3.**

Algunas veces se usa el símbolo $<$ para sustituir a $\Im$ en una relación de orden.
Una relación $<$ que satisface las condiciones (b),(c) de 1.5(4) y la condición $(x, x) \in \Im, \;\; \forall x \in A$, se llama de **orden parcial**. Un conjunto A con una relación de orden $<$ se llama **linealmente o totalmente ordenado** y si el orden es parcial se llama **parcialmente ordenado**.
Cuando se usa la notación $y > x$ se entiende que $x < y$.
Sea A es un conjunto ordenado $a \in A$ se llama **elemento máximo** de A, si $x \leq a$ para todo $x \in A$.

1.6. Los Números Naturales, Enteros y Principio de Inducción

1. Los números naturales $\mathbb{N}$ pueden considerarse (intuitivamente) como $\mathbb{N} = \{1, 1+1, 1+1+1, ...\}$, de modo que $1 \in \mathbb{N}$ y si $n \in \mathbb{N}$ entonces $n + 1 \in \mathbb{N}$. Esta noción surge de la idea intuitiva de que el conjunto $\mathbb{N}$ debe ser el menor conjunto con esta propiedad.

   Un subconjunto no vacío A de $\mathbb{R}$ se llama **inductivo** si para cada $x \in A$ se verifica $x + 1 \in A$.

   1.6.1.

   $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{Q}^+$ y $\mathbb{Q}$ son ejemplos de conjuntos inductivos.
   El conjunto $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} ...\}$ no es un conjunto inductivo. (¿Por qué?)

2. Sea $\mathcal{A}$ la colección de todos los subconjuntos inductivos de $\mathbb{R}$ que contienen a 1. Se define el conjunto de los **números naturales** denotado por $\mathbb{N}$ mediante $\mathbb{N} = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$.
   Nótese que, $\mathbb{R}^+$ es inductivo y que $1 \in \mathbb{R}^+$ así, $\mathbb{R}^+ \in \mathcal{A}$. En consecuencia, $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}^+$.

   Nota **1.6.2.**

   Se deduce de la definición que $1 \in \mathbb{N}$ y $\mathbb{N}$ es inductivo.

3. A continuación presentaremos algunos ejemplos que ilustran la importancia de la inducción matemática.
   Consideremos las proposiciones:

   a) 140 es divisible por 5.

   b) Todos los números que terminan en cero son divisibles por 5.

   Así, de la proposición particular (a) hemos obtenido la proposición general (b). Puede suceder que de una proposición particular verdadera obtengamos una proposición falsa, por ejemplo:

a) 140 es divisible por 5.

b) Todos los números de 3 dígitos son divisibles por 5.

En este caso de la proposición particular (a) hemos obtenido la proposición general (b) que es falsa. La pregunta natural es ¿cómo debe utilizarse la inducción en las Matemáticas para llegar siempre a conclusiones justas? El método conocido como inducción nos dará la respuesta.

1.6.3.

Leonard Euler (1707-1783) estudió el trinomio

$$n^2 + n + 41.$$

Si sustituimos n por 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, obtenemos como resultado los números 41, 43, 47, 53, 61, 83, 97 y 113 los cuales son números primos. ¿Se puede concluir que si $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, entonces $n^2 + n + 41$ es un número primo? La respuesta es no, pues sólo hemos destacado algunos valores de n, nótese que, si $n = 41$, entonces $41^2 + 41 + 41$ no es un número primo. En conclusión, una proposición puede ser válida en una serie de casos particulares y no serlo en general. Así, surge la pregunta: si tiene una proposición válida en varios casos particulares y es imposible analizar todos los casos, ¿cuándo se puede afirmar que esta proposición es válida en general? A veces se logra aplicando el Principio de Inducción.

Principio de Inducción. Si $\mathbb{N}_0$ es un conjunto inductivo de números naturales que contiene a 1, entonces $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N}$.

Nota **1.6.4.**

Una forma equivalente del principio de inducción es la siguiente:

Una proposición es válida para todo $n \in \mathbb{N}$ si
(i) Es válida para $n = 1$ y
(ii) si la proposición vale para un número $n = k$ entonces se deduce que la proposición vale para $n = k + 1$.

Nota **1.6.5.**

a) (i) y (ii) de la nota 1.6.4 se llaman **base inductiva** y **etapa inductiva** respectivamente.

b) Es necesario destacar que en la prueba por inducción deben verificarse tanto la base inductiva como la etapa inductiva y en esta debe suponerse como cierta "*la proposición vale para* $n = k$" (llamada **hipótesis de inducción**) y probarse "*la proposición vale para* $n = k + 1$".

c) Existen casos en los cuales se puede aplicar el principio de inducción pero haciéndole algunas modificaciones a la base inductiva y a la etapa inductiva. Por ejemplo existen proposiciones que son válidas a partir de un cierto $n = k_0$, así, la base inductiva debe verificarse para dos valores consecutivos de n, como en el enunciado $2^n > n^2$. Otras veces la etapa inductiva se basa en que la proposición es válida no sólo para $n = k$, si no también para $n = k + 1$. En tal caso la base inductiva debe verificarse para dos valores consecutivos de n, como en el enunciado

$$\text{Si } v_0 = 2,\ \ v_1 = 3 \ \text{ y } \ v_{k+1} = 3v_k - 2v_{k-1} \ \text{ para todo } \ k \in \mathbb{N},$$
$$\text{entonces } \ v_n = 2^n + 1.$$

Nota **1.6.6.**

Se define el conjunto de los **números enteros** denotado por $\mathbb{Z}$ mediante $\mathbb{Z} = (-\mathbb{N}) \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$ donde $(-\mathbb{N}) = \{-n : n \in \mathbb{N}\}$.

4. Si $A \subset \mathbb{N}$ y $A \neq \emptyset$, entonces A tiene un primer elemento, es decir, existe $a \in A :\ a \leq p$ para todo $p \in A$. (Este enunciado se llama **Principio del Buen Orden**, se puede probar usando el principio de inducción.)

5. Ahora queremos usar el principio de inducción, para atacar ciertas dificultades asociadas a la definición de funciones, por medio de repeticiones indefinidas de una cierta operación. Por ejemplo queremos definir, para cada $n \in \mathbb{N}$ un número real a^n de tal manera que se verifiquen las leyes usuales de los exponentes. Una forma sería escribir: $a^1 = a$, $a^2 = a \cdot a$, y así sucesivamente. Pero surge un problema; la frase " *y*

así sucesivamente" es tan vaga que no puede aceptarse en una definición matemática. Esta dificultad es superada si definimos una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, donde $f(n+1) = af(n)$. Como $f \subset \mathbb{N} \times \mathbb{R}$ queremos estar seguros que tal f existe. El siguiente resultado nos garantiza la existencia de f y sus propiedades, en lo que sigue este resultado nos permitirá construir definiciones por inducción.

Principio de Definición por Recurrencia:

Sea X un conjunto no vacío y $a \in X$. Sea $F : X \to X$, una función. Entonces existe una única función $f : \mathbb{N} \to X$ tal que $f(1) = a$ y $f(n+1) = F[f(n)]$.

1.7. Conjuntos Numerables y no Numerables

1. Un conjunto A se llama **finito** si es $\emptyset$ o existe una biyección $f : A \to \overline{1,n}$, para algún $n \in \mathbb{N}$. Cuando $A = \emptyset$ se dice que A tiene cero elementos y en el segundo caso se dice que A tiene n elementos.

2. Consideremos el siguiente resultado:

   Sea A un conjunto. Supóngase que existe una biyección $f : A \to \overline{1,n}$, para algún $n \in N$. Sea $B \subset A$ $(B \neq \emptyset)$. Entonces no existe una biyección $g : B \to \overline{1,n}$, pero existe una biyección $h : B \to \overline{1,m}$ para algún $m < n$.

   Nota **1.7.1.**

   Algunas consecuencias del resultado anterior son:

   a) Si A es un conjunto finito no existe una biyección de A con un subconjunto propio.

   b) El número de elementos de A queda únicamente determinado por A.

   c) Si B es un subconjunto de A y A es finito entonces B es finito.

   d) $\mathbb{N}$ no es finito.

3. Un conjunto A se llama **infinito** si no es finito. El conjunto A se llama **infinito numerable** si existe una biyección $f : \mathbb{N} \to A$. Un conjunto A se llama **numerable** si es finito o infinito numerable. El siguiente resultado permite caracterizar a los conjuntos numerables.

   Sea A un conjunto no vacío, las siguientes condiciones son equivalentes:

   a) *Existe una función sobreyectiva* $f : \mathbb{N} \to A$.

   b) *Existe una función inyectiva* $f : A \to \mathbb{N}$.

   c) *A es numerable.*

   Nota **1.7.2.**

   a) El conjunto $\mathbb{Z}$ es numerable.

   b) Si $A \subset B$ y B es numerable entonces A es numerable.

   c) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable.

   d) La unión numerable de conjuntos numerables es numerable, es decir, si (A_n) es una sucesión de conjuntos tal que cada A_n $n \in \mathbb{N}$ es numerable, entonces $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ es un conjunto numerable.

1.8. Ejercicios

1. Usar inducción para demostrar los siguientes enunciados.

   a) $1^2 + 3^2 + ... + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$.

   b) $1 + x + x^2 + ... + x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$, $x \neq 1$.

   c) $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + ... + \operatorname{sen} nx = \frac{\operatorname{sen}(\frac{n+1}{2})x}{\operatorname{sen}(\frac{x}{2})} \operatorname{sen}(\frac{nx}{2})$.

   d) $(i+1)^n = 2^{\frac{n}{2}}(\cos(\frac{n\pi}{2}) + i\operatorname{sen}(\frac{n\pi}{2}))$.

   e) $2^n > 2n+1$ y $2^n > n^2$.

   f) $(1+\alpha)^n > 1 + n\alpha$, $\alpha > -1$, $\alpha \neq 0$ $y n > 1$. (**Desigualdad de Bernoulli**)

   g) $\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

h) $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k.$

2. Verificar las leyes distributivas para la unión e intersección de conjuntos, además de las leyes de de Morgan.

3. Determinar cuales de los siguientes enunciados son válidos para los conjuntos A,B,C y D. Si la doble implicación falla, determine cual es la correcta y de un contraejemplo para la implicación que falla.

   a) $A \supset C$ y $B \supset C \iff A \cup B \supset C.$
   b) $A \supset C$ o $B \supset C \iff A \cup B \supset C.$
   c) $A \supset C$ y $B \supset C \iff A \cap B \supset C.$
   d) $A \supset C$ o $B \supset C \iff A \cap B \supset C.$
   e) $A \setminus (A \setminus B)$=B.
   f) $A \cap (B \setminus C)=(A \cap B) \setminus (A \cap C).$
   g) $A \cup (B \setminus C)=(A \cup B) \setminus (A \cup C).$
   h) $(A \cap B) \cup (A \setminus B)=A.$
   i) $A \supset B$ y $B \supset D \Longrightarrow A \times B \subset C \times D.$
   j) El recíproco de (i).
   k) El recíproco de (i), asumiendo que A y B son no vacíos.
   l) $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D).$
   m) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D).$
   n) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C).$
   ñ) $(A \setminus B) \times (C \setminus D) = ((A \times C) \setminus (B \times C)) \setminus (A \times D).$
   o) $(A \times B) \setminus (C \times D) = (A \setminus C) \times (B \setminus D).$

4. Escriba el contrarrecíproco y el recíproco de los siguientes enunciados, además determine cuales son ciertos.

4.1- Si $x < 0$ entonces $x^2 - x > 0.$

4.2- Si $x > 0$ entonces $x^2 - x > 0.$

5. Sea A y B dos conjuntos de números reales. Escribir la negación de cada uno de los siguientes enunciados:

   a) Para cada $a \in A$ es cierto que $a^2 \in B$.

   b) Para algún $a \in A$ es cierto que $a^2 \in B$.

   c) Para cada $a \in A$ es cierto que $a^2 \notin B$.

   d) Para algún $a \notin A$ es cierto que $a^2 \in B$.

6. Sea Γ una colección no vacía de conjuntos. Determine la veracidad de cada uno de los siguientes enunciados y sus recíprocos.

   a) $x \in \bigcup_{A \in \Gamma} A \Rightarrow$ para algún $A \in \Gamma$.

   b) $x \in \bigcup_{A \in \Gamma} A \Rightarrow$ para todo $A \in \Gamma$.

   c) $x \in \bigcap_{A \in \Gamma} A \Rightarrow$ para algún $A \in \Gamma$.

   d) $x \in \bigcap_{A \in \Gamma} A \Rightarrow$ para todo $A \in \Gamma$.

7. Escriba el contrarrecíproco de cada uno de los enunciados del ejercicio 5.

8. Dados los conjuntos A,B y C. Expresar cada uno de los siguientes conjuntos en términos de A , B y C, usando los símbolos $\cap$, $\cup$ y $\setminus$.

   $D = \{x : x \in A \ y \ (x \in B \ o \ x \in C)\}$
   $E = \{x : \ (x \in A \ y \ x \in B) \ o \ x \in C\}$.
   $F = \{x : \ x \in A \ y \ (x \in B \ \Rightarrow \ x \notin C)\}$.

9. Sea A un conjunto de dos elementos, demuestre que $\wp(A)$ (partes de A) tiene cuatro elementos ¿Cuantos elementos tiene $\wp(A)$ si A tiene un sólo elemento? ¿Tres elementos? ¿Sin elementos? ¿Por qué es $\wp(A)$ llamado la potencia de A?

10. Sea $f : A \to B$ una función. Sea $A_0 \subset A$ y $B_0 \subset B$.

    a) Demuestre que $f^{-1}(f(A_0)) \supset A_0$ y que la igualdad es cierta si f es inyectiva. Dar un ejemplo para mostrar que la contención puede ser estricta.

    b) Demuestre que $f(f^{-1}(B_0)) \subset B_0$ y que la igualdad es cierta si f es sobreyectiva. Dar un ejemplo para mostrar que la contención puede ser estricta.

11. Sea $f : A \to B$ una función.

    a) Demuestre que f^{-1} preserva la inclusión, unión, intersección y diferencia de conjuntos.

    b) Demuestre que f preserva sólo inclusiones y uniones.

    c) $f(E \cap F) \subset f(E) \cap f(F)$. Dar un ejemplo para ver que la desigualdad puede ser estricta.

    d) $f(E \setminus F) \supset f(E) \setminus f(F)$. Dar un ejemplo para ver que la desigualdad puede ser estricta.

    e) Determine que sucede si (b) se generaliza a uniones e intersecciones arbitrarias.

12. Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ funciones.

    a) Si $C_0 \subset C$. Pruebe que $(g \circ f)^{-1}(C_0) = f^{-1}(g^{-1}(C_0))$.

    b) Si f y g son biyectivas pruebe que $g \circ f$ es biyectiva.

    c) Si $g \circ f$ es inyectiva o sobreyectiva ¿Qué se puede decir acerca de la inyectividad o sobreyectividad de f y g?

13. Sea $f : A \to B$ una función.

    a) Demuestre que si f tiene inversa por la izquierda, entonces f es inyectiva y que si f tiene inversa por la derecha, entonces f es sobreyectiva.

    b) Dar un ejemplo de una función que tenga una inversa por la derecha pero no por la izquierda.

    c) Dar un ejemplo de una función que tenga una inversa por la izquierda pero no por la derecha.

    d) ¿Puede tener una función más de una inversa por la izquierda?

    e) ¿Puede tener una función más de una inversa por la derecha?

    f) Pruebe que si f tiene una inversa por la izquierda g e inversa por la derecha h entonces f es biyectiva y $g = h = f^{-1}$.

14. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = x^3 - x$. Por una restricción apropiada del dominio y el rango de f, obtenga una función biyectiva g. Dar el gráfico de g y g^{-1} (Existen varias posibilidades de escoger g).

15. Sea $\Re$ una relación en un conjunto A. Si $A_0 \subset A$, defina la relación $\Re \cap (A_0 \times A_0)$. Demuestre que la restricción de una relación de equivalencia es una relación de equivalencia.

16. Encuentre el fallo de la siguiente demostración que busca probar que toda relación $\Re$ que es a su vez simétrica y transitiva es reflexiva:

    " *Como $\Re$ es simétrica $a\Re b$ implica $b\Re a$. Como $\Re$ es transitiva $a\Re b$ y $b\Re a$ implica que $a\Re a$.*"

17. Sea $f : A \to B$ una función sobreyectiva. Se define una relación en A colocando:

$$a_0 \sim a_1 \ si \ f(a_0) = f(a_1).$$

    a) Demuestre que esta es una relación de equivalencia.

    b) Sea A^* el conjunto de las clases de equivalencia. Demuestre que existe una biyección de A^* con B.

18. Probar que la restricción de una relación de orden es una relación de orden.

19. (a) Demuestre que la aplicación $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$ preserva el orden.

    (b) Demuestre que la ecuación $g(y) = \frac{2y}{1+\sqrt{1+4y^2}}$, define una función $g : \mathbb{R} \longrightarrow (-1, 1)$ que es la inversa por la izquierda y por la derecha de f.

20. (a) Pruebe que si $\mathcal{A}$ es una colección de conjuntos inductivos la intersección de los elementos de $\mathcal{A}$ es un conjunto inductivo.
    (b) Pruebe las propiedades básicas: $1 \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N}$ es un conjunto inductivo, el principio de inducción para $\mathbb{N}$.

21. (a) Pruebe que $a \in \mathbb{N}$ implica que $a - 1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

    (b) Pruebe que si $n \in \mathbb{N}$, entonces no existe un $a \in \mathbb{Z}$ tal que $n < a < n + 1$.

22. (a) Pruebe por inducción que dado $n \in \mathbb{N}$ todo subconjunto no vacío de $\{1, ..., n\}$ tiene un elemento máximo.

    (b) Explique porque no se puede concluir de (a) que todo subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$ tiene un elemento máximo.

23. Pruebe las siguientes propiedades de $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$.

    a) $a, b \in \mathbb{N} \Rightarrow a + b \in \mathbb{N}$.

    b) $a, b \in \mathbb{N} \Rightarrow ab \in \mathbb{N}$.

    c) $a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow a + b \in \mathbb{Z}$.

    d) $a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow a - b \in \mathbb{Z}$.

    e) $a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow ab \in \mathbb{Z}$.

    f) $x > 1 \Rightarrow \frac{1}{x} \notin \mathbb{Z}$.

24. Sea $a \in \mathbb{R}$. Defina inductivamente $a^1 = a$ y $a^{n+1} = a^n a$, $n \in \mathbb{N}$. Pruebe que para $n, m \in \mathbb{N}$ y $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} a^n a^m &= a^{n+m} \\ (a^n)^m &= a^{nm} \\ a^n b^n &= (ab)^n. \end{aligned}$$

    Estas son llamadas las leyes de los exponentes.

25. (a) Hacer una lista de todas las funciones $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3, 4\}$. Pruebe que ninguna es biyectiva.

    (b) ¿Cuántas funciones inyectivas

$$f : \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

    existen?

26. Pruebe que si B no es un conjunto finito y $B \subset A$ entonces A no es finito.

27. Sea A un conjunto finito simplemente ordenado. Pruebe que A tiene un elemento máximo. (Use inducción)

28. (a) Pruebe que $A \cup B$ es finito si y sólo si A y B son finitos.

    (b) Sea $J \neq \emptyset$. Pruebe que si J es finito y para cada A_α , $\alpha \in J$ es finito entonces $\bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha$ es finito.

29. (a) Pruebe que $A \times B$ es finito si sólo si A y B son finitos.
    (b) Sea $J \neq \emptyset$. Pruebe que si J es finito y para cada A_α , $\alpha \in J$ es finito entonces $\prod_{\alpha \in J} A_\alpha$ es finito.

30. Demuestre que $\mathbb{Q}$ es numerable.

31. Determine cuales de los siguientes conjuntos son o no numerables. Argumente su respuesta.

    a) $A = \{f : \{0,1\} \longrightarrow \mathbb{N}\}$.
    b) $B_n = \{f : \{0,1,...,n\} \longrightarrow \mathbb{N}\}$.
    c) $C = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$.
    d) $D = \{f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}\}$.
    e) $E = \{f : \mathbb{N} \longrightarrow \{0,1\}\}$.

32. *Se dice que dos conjuntos A y B tienen el mismo* **cardinal** *si existe una biyección entre A y B.*

    a) Pruebe que si $B \subset A$ y si existe una inyección $f : A \rightarrow B$ entonces A y B tienen el mismo cardinal.

    b) Pruebe que si existen inyecciones $f : A \rightarrow C$ y $g : C \rightarrow A$ entonces A y C tienen el mismo cardinal.

Nota **1.8.1.**

El lector puede consultar [10],[11] y [21] de la bibliografía para profundizar el estudio de los tópicos de este capítulo.

"Aún los pueblos más primitivos tienen un sistema numérico; tal vez no pueden contar mucho más allá de cuatro, pero saben que dos cosas iguales más otras dos de la misma especie son cuatro, y no sólo algunas veces, si no siempre. A partir de este paso fundamental, muchas culturas han construido sus propios sistemas de numeración, generalmente como lenguaje escrito con signos convencionales similares. Los babilonios, los mayas y los hindúes, por ejemplo, inventaron esencialmente el mismo sistema para escribir las cifras grandes como una secuencia de dígitos que usamos ahora, pese a que estas culturas estaban tan distantes entre sí en el tiempo y en espacio". **Jacob Bronosvski**

OBJETIVOS (Capítulo 2)

- Adquirir y aplicar las propiedades más importantes del conjunto de los números reales.
- Estudiar los conceptos y propiedades relativas a los extremos superior e inferior de subconjuntos de números reales.
- Adquirir y aplicar el Axioma Fundamental del Análisis en la solución de problemas.

Capítulo 2

Cuerpos. $\mathbb{R}$ Como Cuerpo Ordenado y Completo

Existen muchos métodos para presentar un estudio de los números reales. Aunque desde el punto de vista práctico la necesidad de los números irracionales que se les había presentado a los matemáticos griegos en sus estudios de Geometría es sólo a partir del siglo XIX donde se introducen los primeros métodos apropiados para construcción de los números reales a partir de los números racionales. En ese siglo, más específicamente en el año 1872, entre otras se desarrollaron tres teorías :

1. La de **Karl Weierstrass (1815-1897)** la cual construye los números reales partiendo de un conjunto de números racionales positivos $\{a_y\}$, el cual denomina agregado y éste tiene la propiedad de que la suma de cualquier número finito de elementos del agregado no supera a un número prefijado. Un agregado, por ejemplo, es una fracción decimal.

2. La de **Georg Cantor (1845-1918)** la cual construye los números reales a partir de sucesiones convergentes de números racionales (ver, ejercicio 15 del capítulo 4).

3. La de **Richard Dedekind (1831-1916)** para la cual un número real queda determinado por el conjunto de números racionales menores que él (ver el ejercicio 15 del capítulo 4).

En el año 1889, el matemático italiano **Giuseppe Peano (1858-1932)** presentó una versión axiomática de los números naturales a través de cinco axiomas; tal planteamiento fue utilizado por otros matemáticos como punto de partida para la construcción total de los números reales.

En este capítulo introduciremos los números reales por un método no constructivo, utilizaremos el método axiomático sobre el cual A.J White en [21] escribe:

> *"Las ventajas de este método, llamado axiomático, son varias. Entre ellas apuntamos: certeza (o en todo caso, definición del área de incertidumbre) acerca de la naturaleza precisa de la estructura que se discute; economía, puesto que un sistema axiomático puede ser realizado de varias maneras (esto es, pueden existir varios sistemas matemáticos, aparentemente diferentes, que se ajusten al mismo esquema de axiomas) y, por lo tanto, un teorema demostrado en un sistema puede implicar teoremas en diversos campos (...); penetración, ya que, variando el esquema de axiomas y observando el efecto que se obtiene sobre el sistema, adquirimos una idea del papel que cada axioma desempeña, individualmente."*

Así, comenzaremos definiendo estructuras generales conocidas como cuerpos y estas nos permitirán definir los números reales sin ambigüedad.

2.1. Cuerpos

Definición **2.1.1.** *Un* **cuerpo** *es un conjunto* $\mathbb{K}$ $(\neq \emptyset)$, *dotado de dos operaciones binarias llamadas suma* $(+)$ *y multiplicación* $(\cdot)$, *cuyos elementos satisfacen los siguientes axiomas:*

1. $x, y \in \mathbb{K} \Rightarrow x + y \in \mathbb{K}, \forall x, y \in \mathbb{K}$. *(Clausura para la suma)*

2. $x + y = y + x, \forall x, y \in \mathbb{K}$. *(Conmutatividad de la suma)*

3. $x + (y + z) = (x + y) + z, \forall x, y, z \in \mathbb{K}$. *(Asociatividad de la suma)*

4. *Existe en* $\mathbb{K}$ *un elemento llamado* **neutro para la suma**, *denotado por* $\mathbf{0}$ *tal que* $x + \mathbf{0} = x$, *para todo* $x \in \mathbb{K}$.

5. *Para cada* $x \in \mathbb{K}$, *existe* $y \in \mathbb{K}$ *tal que* $x + y = \mathbf{0}$, *y se llama* **opuesto** *o* **inverso para la suma** *de* x; *y se escribe* $y = -x$.

6. *$x, y \in \mathbb{K} \Rightarrow x \cdot y \in \mathbb{K}, \forall x, y \in \mathbb{K}$. (Clausura para la multiplicación)*

7. *$x \cdot y = y \cdot x, \forall x, y \in \mathbb{K}$. (Conmutatividad de la multiplicación)*

8. *$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z, \forall x, y, z \in \mathbb{K}$. (Asociatividad de la multiplicación)*

9. *Existe en $\mathbb{K}$ un elemento llamado* **neutro multiplicativo**, *denotado por $\mathbf{1}$ ($\mathbf{1} \neq \mathbf{0}$) tal que $x \cdot \mathbf{1} = x$, para todo $x \in \mathbb{K}$.*

10. *Para cada $x \in \mathbb{K}$, $x \neq \mathbf{0}$ existe $y \in \mathbb{K}$ tal que $x \cdot y = \mathbf{1}$, y se llama* **recíproco** *o* **inverso multiplicativo** *de x; y se escribe $y = x^{-1}$.*

11. *$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$, $\forall x, y, z \in \mathbb{K}$. (Distributividad)*

Nota **2.1.2.**

1. La terna $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ denota a un **cuerpo**, además si $\mathbb{K}$ tiene dos elementos o más entonces $\mathbf{1} \neq \mathbf{0}$.

2. Si queremos probar que un conjunto cualesquiera $\mathbb{K}$ dotado de las operaciones suma y multiplicación es un cuerpo debemos verificar que los elementos de $\mathbb{K}$ satisfacen los 11 axiomas de la definición de cuerpo.

3. La suma $x + (-y)$ la denotamos por $x - y$ y se llama **diferencia** entre x e y.

4. La multiplicación $x \cdot y^{-1}$ la denotaremos por $\frac{x}{y}$ y se llama **división (o cociente)** entre x e y.

Algunas consecuencias de los axiomas nos las presenta el siguiente teorema.

Teorema **2.1.3.** *Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo. Entonces*

1. *$\mathbf{0} + x = x, \forall x \in \mathbb{K}$.*

2. *$-(-x) = x, \forall x \in \mathbb{K}$.*

3. *El elemento neutro para la suma es único.*

4. *Para cada $x \in \mathbb{K}$ su opuesto es único.*

5. *$x + z = y + z \quad \Rightarrow \quad x = y, \; x, y, z \in \mathbb{K}$.*

6. $\mathbf{1} \cdot x = x, \forall x \in \mathbb{K}$ *y* $x^{-1} \cdot x = \mathbf{1}, \forall x(\neq \mathbf{0}) \in \mathbb{K}$.

7. *El elemento neutro multiplicativo es único.*

8. *Para cada* $x(\neq \mathbf{0}) \in \mathbb{K}$ *su inverso multiplicativo es único.*

9. $\frac{x}{y} = x \quad \Leftrightarrow \quad x = y \cdot z, \forall y(\neq \mathbf{0}) \in \mathbb{K}$.

10. $x \cdot z = y \cdot z$ *y* $z \neq \mathbf{0} \Rightarrow x = y$.

11. $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z, \forall x, y, z \in \mathbb{K}$.

12. $x \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}, \forall x \in \mathbb{K}$ *y* $[x \cdot y = \mathbf{0} \Rightarrow x = \mathbf{0}$ *o* $y = \mathbf{0}]$.

13. $(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$ *y* $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y, \forall x, y \in \mathbb{K}$.

Prueba: [1]

1. Se deduce claramente al aplicar los axiomas 2 y 4.

2. De los axiomas 2 y 5 se sigue que $(-x) + x = x + (-x) = \mathbf{0}$, para todo $x \in \mathbb{K}$, en consecuencia, aplicando el axioma 5 obtenemos que $-(-x) = x$.

3. Recordemos que en este caso queremos probar unicidad (ver 1.3(14)). Supongamos que existe un elemento $\mathbf{0}' \in \mathbb{K}$ tal que $x + \mathbf{0}' = x$ para todo $x \in \mathbb{K}$, en particular como $\mathbf{0} \in \mathbb{K}$, entonces $\mathbf{0} + \mathbf{0}' = \mathbf{0}$ y por 1, $\mathbf{0}' + \mathbf{0} = \mathbf{0}$, a la luz del axioma 4 concluimos que, $\mathbf{0}' = \mathbf{0}$, lo que prueba la unicidad del $\mathbf{0}$.

4. Dado $x \in \mathbb{K}$, sea $y \in \mathbb{K}$ un opuesto para x, es decir $x + y = \mathbf{0}$. Supongamos que existe un y' tal que $x + y' = \mathbf{0}$, a esta última igualdad le sumamos y, aplicamos los axiomas 3 y 2; y de la primera ecuación, obtenemos que $y' = y$, lo que prueba la unicidad de y.

5. Para obtener la conclusión de 5, basta sumar $-z$ a ambos lados de la ecuación $x + z = y + z$ y aplicar los axiomas 3,5 y 4.

6. La primera parte de 6 es inmediata de los axiomas 7 y 9. La segunda parte de 6 se deduce de los axiomas 7 y 10.

[1]Se recomienda en cada paso indicar los axiomas y resultados utilizados

7. Se prueba siguiendo un procedimiento similar a la prueba dada para 3.

8. Se prueba siguiendo un procedimiento similar a la prueba dada para 4.

9. Nótese que, para todo $y \neq 0$ en $\mathbb{K}$.

$$\begin{aligned} z = \frac{x}{y} &\Leftrightarrow x \cdot y^{-1} = z \\ &\Leftrightarrow y \cdot (y^{-1} \cdot x) = y \cdot z \\ &\Leftrightarrow (y \cdot y^{-1}) \cdot x = y \cdot z \\ &\Leftrightarrow \mathbf{1} \cdot x = y \cdot z. \\ &\Leftrightarrow x = y \cdot z \end{aligned}$$

esto prueba 9.

10. Esta parte puede probarse de manera análoga a como se probó 5 o usando 9 esto es, si $z \neq 0$ en $\mathbb{K}$ se sigue que

$$\begin{aligned} x \cdot z &= y \cdot z \\ &\Rightarrow \frac{x \cdot z}{z} = y \\ &\Rightarrow (x \cdot z) \cdot z^{-1} = y \\ &\Rightarrow x \cdot (z \cdot z^{-1}) = y \\ &\Rightarrow x \cdot \mathbf{1} = y \\ &\Rightarrow x = y. \end{aligned}$$

11. Es una consecuencia inmediata de los axiomas 7 y 10.

12. Claramente, $x + y = x$ implica que $y = \mathbf{0}$. En consecuencia, si $x \cdot \mathbf{0} = x \cdot (\mathbf{0} + \mathbf{0}) = x \cdot \mathbf{0} + x \cdot \mathbf{0}$, entonces $x \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ para todo $x \in \mathbb{K}$.
Para la prueba de la segunda parte de 12, usaremos las nociones dadas en 1.3(12). Supongamos que $x \cdot y = \mathbf{0}$ y $y \neq \mathbf{0}$, probemos que $x = \mathbf{0}$. Usando 10, obtenemos que $x \cdot y = \mathbf{0} = \mathbf{0} \cdot y$, $(y \neq \mathbf{0})$, y así, $x = \mathbf{0}$.

13. Veamos que, aplicando los axiomas (¿cuáles?) y 4 se tiene

$$\mathbf{0} = \mathbf{0} \cdot y = (-x + x) \cdot y = (-x)y + x \cdot y \quad \Rightarrow \quad (-x) \cdot y = -(x \cdot y); \quad y$$

$$\mathbf{0} = x \cdot \mathbf{0} = x \cdot (y - y) = x \cdot y + x \cdot (-y) \quad \Rightarrow \quad x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$$

así, obtenemos la primera parte.
Usando la primera parte y 2 se deduce que,

$$(-x) \cdot (-y) = -[x \cdot (-y)] = -[-(x \cdot y)] = x \cdot y.$$

∎

2.1.4.

1. Consideremos $\mathbb{K}_2 = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$. En $\mathbb{K}_2$ las operaciones $+$ y $\cdot$ se describen mediante las siguientes tablas:

$+$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$

$\cdot$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$

Veamos que $(\mathbb{K}_2, +, \cdot)$ es un cuerpo.

Por definición de las operaciones $+$ y $\cdot$ es claro que $\mathbb{K}_2$ satisface los axiomas 1, 2, 6, y 7.
Como $\mathbf{0}+\mathbf{1} = \mathbf{1}+\mathbf{0} = \mathbf{1}$ y $\mathbf{0}+\mathbf{0} = \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{0}$ es el elemento neutro para la suma en $\mathbb{K}_2$ (axioma 4). (¿Por qué el $\mathbf{1}$ no es el neutro para la suma?)
Ahora, $\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{1} + \mathbf{1} = \mathbf{0}$, entonces cada elemento es su propio opuesto. (Axioma 5)
Por ser $\mathbf{1} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{1} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1}$ entonces $\mathbf{1}$ es el neutro multiplicativo. (Axioma 9)
Como $\mathbf{1} \neq \mathbf{0}$ y $\mathbf{1} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1}$, entonces $\mathbf{1}$ tiene recíproco $\mathbf{1}^{-1} = \mathbf{1}$. Así, cada elemento distinto de $\mathbf{0}$ en $\mathbb{K}_2$ tiene inverso multiplicativo.
Para verificar que $\mathbb{K}_2$ satisface el axioma 3, es necesario comprobar las ocho ecuaciones:

$$\mathbf{0}+(\mathbf{0}+\mathbf{0}) = (\mathbf{0}+\mathbf{0})+\mathbf{0}; \quad \mathbf{1}+(\mathbf{1}+\mathbf{1}) = (\mathbf{1}+\mathbf{1})+\mathbf{1}; \quad \mathbf{0}+(\mathbf{0}+\mathbf{1}) = (\mathbf{0}+\mathbf{0})+\mathbf{1}$$

$$\mathbf{0}+(\mathbf{1}+\mathbf{0}) = (\mathbf{0}+\mathbf{1})+\mathbf{0}; \quad \mathbf{1}+(\mathbf{0}+\mathbf{0}) = (\mathbf{1}+\mathbf{0})+\mathbf{0}; \quad \mathbf{1}+(\mathbf{1}+\mathbf{0}) = (\mathbf{1}+\mathbf{1})+\mathbf{0}$$

$$\mathbf{1} + (\mathbf{0} + \mathbf{1}) = (\mathbf{1} + \mathbf{0}) + \mathbf{1}; \quad \mathbf{0} + (\mathbf{1} + \mathbf{1}) = (\mathbf{0} + \mathbf{1}) + \mathbf{1}.$$

Para verificar que $\mathbb{K}_2$ satisface los axiomas 8 y 11, se procede como en el caso anterior comprobando las ocho ecuaciones de cada caso.
Así, $(\mathbb{K}_2, +, \cdot)$ es un cuerpo.

2. Definamos el conjunto de los números racionales denotado por $\mathbb{Q}$ mediante, $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq \mathbf{0}\}$. En $\mathbb{Q}$, las operaciones $+$ y $\cdot$ se definen:

$$\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{m \cdot q + n \cdot p}{n \cdot q} \qquad y \qquad \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{m \cdot p}{n \cdot q}.$$

   Luego $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ es un cuerpo. (Verificarlo)

3. El conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ con las operaciones suma y multiplicación usuales no es un cuerpo. (En particular no satisface el axioma 4).

4. El conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ con las operaciones suma y multiplicación usuales no es un cuerpo. (¿Por qué?)

2.2. Cuerpos Ordenados

Definición **2.2.1.** *Un* **cuerpo ordenado** $\mathbb{K}$ *es un cuerpo junto con un subconjunto* $\mathbb{P}$ *(llamado de elementos "positivos") de* $\mathbb{K}$ *que satisface los siguientes axiomas:*

12- Para cada $a \in \mathbb{P}$ *se cumple una y sólo una de las siguientes condiciones:*

(i) $a = \mathbf{0}$.
(ii) $a \in \mathbb{P}$.
(iii) $-a \in \mathbb{P}$.

13- $a, b \in \mathbb{P} \Rightarrow a + b \in \mathbb{P}$.

14- $a, b \in \mathbb{P} \Rightarrow a \cdot b \in \mathbb{P}$.

Nota **2.2.2.**

1. En un cuerpo ordenado $\mathbb{K}$, si escribimos $-\mathbb{P} = \{-a : a \in \mathbb{P}\}$ entonces $\mathbb{K} = \mathbb{P} \cup \{\mathbf{0}\} \cup (-\mathbb{P})$.

2. El axioma 12 asegura que $\mathbf{0} \notin \mathbb{P}$.

3. En un cuerpo ordenado $\mathbb{K}$, escribimos $a < b$ ("a es menor b") cuando $b - a \in \mathbb{P}$ y escribimos $a \leq b$ ("a es menor o igual que b") cuando $b - a \in \mathbb{P} \cup \{\mathbf{0}\}$. Si $a < b$ (respectivamente, $a \leq b$) también escribimos $b > a$ (respectivamente, $b \geq a$). En particular, si $x > \mathbf{0}$, entonces $x \in \mathbb{P}$ y se dice que x es positivo. Si $x < \mathbf{0}$ entonces $-x \in \mathbb{P}$ y se dice que x es negativo.

4. Si $a(\neq \mathbf{0}) \in \mathbb{K}$, entonces por el axioma 12, $a \in \mathbb{P}$ o $-a \in \mathbb{P}$, en consecuencia, por el axioma 14, $a^2 = a \cdot a \in \mathbb{P}$ o $a^2 = (-a)(-a) \in \mathbb{P}$. Así, en cualquier caso $a^2 \in \mathbb{P}$.
   Además, por el axioma 9, $\mathbf{1} \neq \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{1} = \mathbf{1} \cdot \mathbf{1} \in \mathbb{P}$. Luego, por el axioma 12, $-\mathbf{1} \notin \mathbb{P}$ y así, $-\mathbf{1} < \mathbf{0}$.

5. Los axiomas 1 al 14 expresan que $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ es un cuerpo ordenado y dotan al conjunto $\mathbb{K}$ de una serie de propiedades algebraicas y de orden, que constituyen ideas familiares sobre la aritmética usual y elemental de los números reales.
   El estudio detallado de las propiedades de los cuerpos ordenados constituye por si misma una materia de investigación, pero para nuestros objetivos sólo necesitamos los cuerpos como un marco ideal para analizar las propiedades del conjunto de los números reales.

2.2.3.

1. El cuerpo $\mathbb{K}_2$ del ejemplo 2.1.4 no puede convertirse en un cuerpo ordenado.

   En efecto, si $\mathbb{K}_2$ fuera un cuerpo ordenado entonces $\mathbb{P} = \{\mathbf{1}\}$ (¿por qué?), luego por el axioma 13, $\mathbf{0} = \mathbf{1} + \mathbf{1} \in \mathbb{P}$ lo cual es un absurdo.

2. El cuerpo $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ podemos dotarlo de un orden, definiendo $\mathbb{P} = \{\frac{m}{n} \in \mathbb{Q} : \ m \cdot n \in \mathbb{N}\}$, se puede probar que $\mathbb{P}$ satisface los axiomas 12,13 y 14.

Teorema **2.2.4.** *Sea* $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ *un cuerpo ordenado y sean* $x, y, t, z \in \mathbb{K}$. *Entonces*

1. *La relación* $\leq$ *en* $\mathbb{K}$ *es una relación de orden lineal.(Es decir, la relación tiene las propiedades de tricotomía, reflexividad, antisimetría y transitividad)*

2. $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z, \forall z \in \mathbb{K}$.

3. $x \leq y \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z, \forall z \geq \mathbf{0}$.

4. $x \leq y \Rightarrow x \cdot z \geq y \cdot z, \forall z < \mathbf{0}$.

5. $x \leq y \Leftrightarrow -y \leq -x$.

6. $x \leq y$ *y* $z \leq t \Rightarrow x + z \leq y + t$.

7. $\mathbf{0} \leq x \leq y$ *y* $\mathbf{0} \leq z \leq t \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot t$.

8. $x \geq \mathbf{0}$ *y* $y \leq \mathbf{0} \Rightarrow x \cdot y \leq \mathbf{0}$.

9. $\mathbf{1} > \mathbf{0}$.

10. $x > \mathbf{0} \Rightarrow x^{-1} > \mathbf{0}$.

11. $x \geq \mathbf{0}$ *y* $y > \mathbf{0} \Rightarrow \frac{x}{y} \geq \mathbf{0}$.

12. $\mathbf{0} < x < y \Rightarrow y^{-1} < x^{-1}$.

13. *Si* $a, b \in \mathbb{K}$ *y* $a < b$ *entonces* $a < \frac{a+b}{2} < b$. *En particular, si* $a > 0$, *entonces* $0 < \frac{a}{2} < a$.

14. *Si* $a \in \mathbb{K}$ *es tal que* $0 \leq a < \varepsilon$, *para todo* $\varepsilon > 0$, *entonces* $a = 0$.

Prueba: [2]

1. Veamos que $\leq$ es una relación de orden lineal. (Ver 1.5(4))

   a) Sean $x, y \in \mathbb{K}$ entonces $x - y \in \mathbb{K}$, luego por el axioma 12 ocurre una y sólo una de las siguientes condiciones:

   $$(i)\ x - y = \mathbf{0} \quad (ii)\ x - y \in \mathbb{P} \quad (iii)\ -(x - y) \in \mathbb{P}.$$

   En consecuencia, en cualquier caso ocurre una y sólo de las siguientes condiciones:

   $$(i)\ x = y \quad (ii)\ y < x \quad (iii)\ x < y.$$

   Así, la relación $\leq$ satisface la propiedad de tricotomía.

[2] Se recomienda en cada paso indicar los axiomas y resultados utilizados

b) Dado $x \in \mathbb{K}$ entonces $x - x = \mathbf{0}$ y por lo tanto, $x \in \mathbb{P} \cup \{\mathbf{0}\}$. Así, $x \leq x$, por lo tanto la relación $\leq$ satisface la propiedad reflexiva.

c) Obsérvese que,

$$[x \leq y \;\; y \;\; y \leq x] \;\; \Rightarrow [y - x \in \mathbb{P} \cup \{\mathbf{0}\} \; y \;\; x - y \in \mathbb{P} \cup \{\mathbf{0}\}].$$

Si $y - x \in \mathbb{P}$ y $x - y \in \mathbb{P}$ entonces por el axioma 13, $(y - x) + (x - y) = \mathbf{0} \in \mathbb{P}$ lo cual es absurdo.
Si $y - x = \mathbf{0}$ y $x - y \in \mathbb{P}$ entonces $x = y$ y $x - y \in \mathbb{P}$, por lo tanto $x - y = \mathbf{0} \in \mathbb{P}$ lo cual es absurdo.
El caso $y - x \in \mathbb{P}$ y $x - y = \mathbf{0}$ es análogo al anterior.
Si $y - x = \mathbf{0}$ y $x - y = \mathbf{0}$ entonces x=y.
Así, la relación $\leq$ satisface la propiedad antisimétrica.

d) La propiedad transitiva se comprueba de manera similar a la demostración dada en (c).

2. Nótese que, para todo $z \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned}
x \leq y \;\; &\Rightarrow \;\; y - x \in \mathbb{P} \cup \{\mathbf{0}\} \\
&\Rightarrow \;\; [y - x \in \mathbb{P} \;\; o \;\; y - x = \mathbf{0}] \\
&\Rightarrow \;\; [(y + z) - (z + x) \in \mathbb{P} \;\; o \;\; (y + z) - (z + x) = \mathbf{0}] \\
&\Rightarrow \;\; (y + z) - (z + x) \in \mathbb{P} \cup \{\mathbf{0}\} \\
&\Rightarrow \;\; x + z \leq y + z.
\end{aligned}$$

3. Obsérvese que, para todo $z \geq \mathbf{0}$,

$$\begin{aligned}
x \leq y \;\; &\Rightarrow \;\; y - x \in \mathbb{P} \cup \{\mathbf{0}\} \\
&\Rightarrow \;\; [y - x \in \mathbb{P} \;\; o \;\; y - x = \mathbf{0}] \\
&\Rightarrow \;\; [z \cdot (y - x) \in \mathbb{P} \;\; o \;\; z \cdot (y - x) = \mathbf{0}] \\
&\Rightarrow \;\; [z \cdot y - z \cdot x \in \mathbb{P} \;\; o \;\; z \cdot y - z \cdot x = \mathbf{0}] \\
&\Rightarrow \;\; z \cdot y - z \cdot x \in \mathbb{P} \cup \{\mathbf{0}\} \\
&\Rightarrow \;\; z \cdot x \leq z \cdot y.
\end{aligned}$$

4. Para probar 4, basta ver que, $z < \mathbf{0}$ implica $-z > \mathbf{0}$ y luego se procede como en 3.

5. Basta multiplicar cada desigualdad por $(-\mathbf{1})$ y aplicar 4.

6. Aplicando 2 se sigue que

$$[x \leq y \ \Rightarrow x+z \leq y+z] \quad y \quad [z \leq t \ \Rightarrow \ z+y \leq t+y],$$

en consecuencia, aplicado 1 obtenemos que, $x+z \leq y+t$.

7. Se procede como en 6 aplicando 3 y 1.

8. Este es un caso particular de 4.

9. Supongamos que $\mathbf{1} \leq \mathbf{0}$.
Si $\mathbf{1} = \mathbf{0}$, obtenemos una contradicción (¿por qué?).
Si $\mathbf{1} < \mathbf{0}$, entonces $-\mathbf{1} > \mathbf{0}$. Luego, por 3, $\mathbf{1} = (-\mathbf{1})(-\mathbf{1}) > \mathbf{0}$, lo que es una contradicción. Así, $\mathbf{1} > \mathbf{0}$.

10. De 9, se sigue que, $x \cdot x^{-1} = \mathbf{1} > \mathbf{0}$ en consecuencia, $x^{-1} > \mathbf{0}$ (en caso contrario, por 8, $x^{-1} \leq \mathbf{0}$ implica que $\mathbf{1} = x \cdot x^{-1} \leq \mathbf{0}$, lo que contradice 9).

11. Aplicando 10 y 3 obtenemos que

$$y > \mathbf{0} \Rightarrow y^{-1} > \mathbf{0} \Rightarrow x \cdot y^{-1} = \tfrac{x}{y} \geq \mathbf{0}.$$

12. Aplicado 11 se sigue que

$$\begin{aligned} \mathbf{0} < x < y \ &\Rightarrow \ y - x, x \cdot y > \mathbf{0} \\ &\Rightarrow \ \frac{y-x}{x \cdot y} > \mathbf{0}, \end{aligned}$$

en consecuencia, $\frac{\mathbf{1}}{x} - \frac{\mathbf{1}}{y} > \mathbf{0}$. Así $y^{-1} < x^{-1}$.

13. De 6, se sigue que,

$$2a = a + a < a + b \quad y \quad a + b < b + b = 2b.$$

Así, $2a < a + b < 2b$. Ahora, multiplicando cada miembro de la desigualdad por 2^{-1} $(2 = 1 + 1 > 0)$, concluimos que $a < \frac{a+b}{2} < b$. Para ver el caso particular, basta tomar $a = 0$ y aplicar la primera parte.

14. Supongamos que $a \neq 0$, por la hipótesis $a > 0$. Como la hipótesis vale para todo $\varepsilon > 0$, entonces tomemos $\varepsilon = \frac{a}{2}$. En consecuencia, $a < \frac{a}{2}$ en contradicción con 13. Así, $a = 0$.

∎

Nota 2.2.5.

1. Por el teorema 2.2.4(1) se tiene que,

$$[x \leq y \quad y \quad y \leq x] \Rightarrow x = y.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} x = y \quad &\Rightarrow \quad [x - y = \mathbf{0} \quad y \quad y - x = \mathbf{0}] \\ &\Rightarrow \quad x - y, y - x \in \mathbb{P} \cup \{\mathbf{0}\} \\ &\Rightarrow \quad x \leq y \quad y \quad y \leq x. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$x = y \Leftrightarrow [x \leq y \quad y \quad y \leq x].$$

Es frecuente en el estudio del Análisis, probar igualdades de la forma $x = y$, probando primero $x \leq y$ y después $y \leq x$.

2. Como en un cuerpo ordenado $\mathbb{K}$, tenemos que $\mathbf{1} > \mathbf{0}$ y de aquí se sigue que:

$$\mathbf{1} < \mathbf{1} + \mathbf{1} < \mathbf{1} + \mathbf{1} + \mathbf{1} < \cdots$$

por lo tanto, $\mathbf{1}, \mathbf{1} + \mathbf{1}, \mathbf{1} + \mathbf{1} + \mathbf{1}, \cdots \in \mathbb{K}$. Esto sugiere la idea de que podemos considerar al conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales como un subconjunto de $\mathbb{K}$.
Para mostrar esto usaremos el principio de definición por recurrencia (ver 1.6(5)), tomando $X = \mathbb{K}$, $a = \mathbf{1}$ y $F : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ dada por $F(k) = k + \mathbf{1}$. En consecuencia, podemos definir una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ dada por $f(1) = \mathbf{1}$ y $f(n+1) = f(n) + \mathbf{1}$.

Afirmación 1 $f(n + k) = f(n) + f(k), \forall k \in \mathbb{N}$.

En efecto, hagamos inducción sobre k.
Para $k = 1$, $f(n + 1) = f(n) + \mathbf{1} = f(n) + f(1)$.

Ahora, supongamos que para k la afirmación es válida y veamos que $f(n+k+1) = f(n) + f(k+1)$.
Por la definición de f y la hipótesis de inducción obtenemos que

$$f(n+k+1) = f(n+k) + \mathbf{1} = f(n) + f(k) + \mathbf{1} = f(n) + f(k+1).$$

Así, la afirmación 1 es cierta.

Afirmación 2 $\quad n < k \quad \Rightarrow \quad f(n) < f(k).$

En efecto, como $n, k \in \mathbb{N}$ y $n < k$, entonces $k - n \in \mathbb{N}$. Sea $p = k - n$, por la afirmación 1, se sigue que:

$$f(k) = f(n+p) = f(p) + f(n) \quad \Rightarrow \quad f(k) - f(n) = f(k-n)$$

en consecuencia, $f(k) > f(n)$ pues $f(n) > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, la afirmación 2 es cierta.

Ahora, por la afirmación 2 f es inyectiva y en consecuencia, f define una biyección de $\mathbb{N}$ en $f(\mathbb{N}) = \mathbb{N}^* = \{\mathbf{1}, \mathbf{1}+\mathbf{1}, \mathbf{1}+\mathbf{1}+\mathbf{1}, \cdots\}$. Se conviene en identificar al conjunto $\mathbb{N}^*$ con $\mathbb{N}$ y así, podemos considerar a $\mathbb{N}$ como un subconjunto del cuerpo ordenado $\mathbb{K}$ y de aquí se concluye que todo cuerpo ordenado es un conjunto infinito.

3. En adelante usaremos la notación, $\mathbf{1} = 1$, $\mathbf{0} = 0$ y $a \cdot b = ab$.

4. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo ordenado. Como $\mathbb{N} \subset \mathbb{K}$, de los axiomas 1,4 y 5 se sigue que:
$$(-\mathbb{N}) \cup \{0\} \cup \mathbb{N} \subset \mathbb{K},$$
donde $(-\mathbb{N}) = \{-n : \ n \in \mathbb{N}\}$. Así, podemos identificar al conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros como
$$\mathbb{Z} = (-\mathbb{N}) \cup \{0\} \cup \mathbb{N} \subset \mathbb{K}.$$

5. Dados $\mathbb{K}$ cuerpo ordenado y $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, por el axioma 9 existe, $n^{-1} \in \mathbb{K}$. En consecuencia, $mn^{-1} = \frac{m}{n} \in \mathbb{K}$ y por lo tanto el conjunto
$$\left\{\frac{m}{n} : \quad m, n \in \mathbb{Z} \ \ y \ n \neq 0\right\} \subset \mathbb{K}.$$

Este conjunto es el menor subcuerpo ordenado de $\mathbb{K}$ (¿por qué?).

Ahora, podemos identificar al conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales mediante:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : \quad m, n \in \mathbb{Z} \ \ y\, n \neq 0 \right\}.$$

Así, podemos considerar de manera natural que,

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{K}.$$

Definición **2.2.6.** *Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo ordenado y $a \in \mathbb{K}$. El* **valor absoluto** *de a denotado por $|a|$ se define:*

$$|a| = \begin{cases} a & si \quad a > 0 \\ 0 & si \quad a = 0 \\ -a & si \quad a < 0 \end{cases}$$

Teorema **2.2.7.** *Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo ordenado y $a \in \mathbb{K}$. Entonces*

1. *$|a|$ es único elemento en $\mathbb{K}$ no negativo tal que $|a|^2 = a^2$.*
2. *$|a| = \text{máx}\{a, -a\}$.*
3. *$-|a| \leq a \leq |a|$.*

Prueba:

1. De la definición de $|a|$ se sigue que:

$$0 \leq |a| \qquad y \qquad |a|^2 = a^2.$$

Ahora, veamos que $|a|$ es el único elemento en $\mathbb{K}$ tal que $|a|^2 = a^2$. Supongamos que existe $b \in \mathbb{K}$, $b \geq 0$ tal que $b^2 = a^2$. Es decir, $b^2 = |a|^2$, en consecuencia, $b^2 - |a|^2 = 0$ y así, $(b - |a|)(b + |a|) = 0$. Como $a, b > 0$ se sigue que $b = |a|$.

2. Nótese que,

$$\begin{aligned} a \geq 0 \ &\Rightarrow \ \text{máx}\{a, -a\} = a = |a| \\ a < 0 \ &\Rightarrow \ -a > 0 \\ &\Rightarrow \ \text{máx}\{a, -a\} = -a = |a|. \end{aligned}$$

Así, en cualquier caso $|a| = max\{a, -a\}$.

3. De 2, se deduce que,

$$|a| \geq a \quad y \quad |a| \geq -a$$

en consecuencia, al multiplicar por (-1) ambos miembros de la segunda desigualdad obtenemos que:

$$|a| \geq a \quad y \quad -|a| \leq a.$$

Por lo tanto, $-|a| \leq a \leq |a|$.

∎

Definición **2.2.8.** *Sea* $\mathbb{K}$ *un cuerpo ordenado. Sean* $a, b \in \mathbb{K}$ *con* $a < b$. *Se define un* **intervalo abierto** (a, b) *mediante*

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{K} : \quad a < x < b\}.$$

El **intervalo cerrado** $[a, b]$ *es el conjunto*

$$\{x \in \mathbb{K} : \quad a \leq x \leq b\}.$$

Los **intervalos semiabiertos** *se definen utilizando las desigualdades* $a < x \leq b$ *y* $a \leq x < b$. *Los* **intervalos infinitos** *se definen:*

$$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{K} : \quad x > a\}$$

$$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{K} : \quad x \geq a\}$$

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{K} : \quad x < a\}$$

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{K} : \quad x \leq a\}.$$

Se conviene en utilizar el intervalo $(-\infty, \infty) = \mathbb{K}$.

Nota **2.2.9.**

1. Podemos considerar $\{a\} = [a, a]$ y $\emptyset = (a, a)$ como intervalos, llamados intervalos "**degenerados**".

2. Los símbolos ∞ y $-\infty$ ño pueden ser considerados como elementos de $\mathbb{K}$ y son de gran importancia en el estudio del Análisis.

3. El intervalo $(-\infty, \infty)$ pueden ser considerado como un intervalo abierto y cerrado a la vez.

4. Sea I un intervalo no degenerado, nótese que, si $a, b \in I$ con $a < b$, entonces $a < x_1 = \frac{a+b}{2} < b$. Así, $x_1 \in I$. En consecuencia, podemos obtener una colección infinita
$$x_1 = \frac{a+b}{2}, x_2 = \frac{x_1 + b}{2}, \cdots, x_n = \frac{x_{n-1} + b}{2}, \cdots .$$
Como $x_n \in I$, para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces I es un conjunto infinito.

Teorema 2.2.10. *Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo ordenado y $a, x, y, z, \delta \in \mathbb{K}$. Entonces*

1. $|x| = |-x|$.

2. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

3. $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}, \quad y \neq 0$.

4. $|x| \leq a \quad \Leftrightarrow \quad [x \leq a \ \ y \ \ -x \leq a] \quad \Leftrightarrow \quad -a \leq x \leq a$.

5. $|x - a| < \delta \quad \Leftrightarrow \quad a - \delta < x < a + \delta \quad \Leftrightarrow \quad x \in (a - \delta, a + \delta)$.

6. $|x + y| \leq |x| + |y|$.

7. $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$.

8. $|x| - |y| \leq ||x| - |y|| \leq |x - y|$.

Prueba:

1. Si $x \geq 0$ entonces $-x \leq 0$ y así, $|-x| = -(-x) = x = |x|$.
Si $x < 0$ entonces $-x > 0$ y así, $|-x| = -x = |x|$. En cualquier caso, $|x| = |-x|$.

2. Si x y y no son 0, por el teorema 2.3.7(1), obtenemos que,
$$\begin{aligned} |xy|^2 &= (xy)^2 = x^2y^2 = |x|^2|y|^2 \\ &\Rightarrow |xy|^2 - |x|^2|y|^2 = 0 \\ &\Rightarrow |xy|^2 - (|x||y|)^2 = 0 \\ &\Rightarrow (|xy| - |x||y|)(|xy| + |x||y|) = 0 \\ &\Rightarrow |x \cdot y| - |x| \cdot |y| = 0 \\ &\Rightarrow |x \cdot y| = |x| \cdot |y|. \end{aligned}$$
Los casos, en que x o y son 0, se resuelven directamente.

3. Si $y > 0$, entonces $\frac{1}{y} > 0$. Así, $\frac{1}{|y|} = \frac{1}{y} = |\frac{1}{y}|$.
Si $y < 0$, entonces $\frac{1}{y} < 0$. Así, $\frac{1}{|y|} = -\frac{1}{y} = |\frac{1}{y}|$.
En cualquier caso, $|\frac{1}{y}| = \frac{1}{|y|}$ $y \neq 0$. En consecuencia, aplicando 2 para $y \neq 0$ se sigue que,

$$\left|\frac{x}{y}\right| = |x \cdot y^{-1}| = |x| \cdot |y^{-1}| = |x| \cdot \left|\frac{1}{y}\right| = x \cdot \frac{1}{|y|} = \frac{|x|}{|y|}.$$

4. Nótese que,

$$\begin{aligned} -a \leq x \leq a &\Leftrightarrow \text{-}a \leq x \quad y \quad x \leq a \\ &\Leftrightarrow \quad a \geq -x \quad y \quad a \geq x \\ &\Leftrightarrow \quad a \geq |x|. \end{aligned}$$

5. Por 4 y la definición de intervalo se sigue que,

$$\begin{aligned} |x - a| < \delta &\Leftrightarrow -\delta < x - a < \delta \\ &\Leftrightarrow a - \delta < x < a + \delta \\ &\Leftrightarrow x \in (a - \delta, a + \delta). \end{aligned}$$

6. Por el teorema 2.2.7(3)

$$-|x| \leq x \leq |x| \quad y \quad -|y| \leq y \leq |y|.$$

Luego,

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|.$$

En consecuencia, por 4 concluimos que

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

7. Para esta parte, basta ver que $x - z = (x - y) + (y - z)$ y aplicar 6.

8. De 6 y 1 se deduce que

$$|x| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y| \quad \Rightarrow \quad |x| - |y| \leq |x - y| \qquad (1)$$

$$|y| = |(y - x) + x| \leq |y - x| + |x| \quad \Rightarrow \quad -|x - y| \leq |x| - |y|. \quad (2)$$

Ahora, por (1),(2),4 y el teorema 2.3.7(3) concluimos que,

$$|x| - |y| \leq ||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

∎

Nota **2.2.11.**

Si representamos geométricamente los elementos de un cuerpo ordenado $\mathbb{K}$ como puntos de una recta, entonces el valor absoluto $|x - a|$ puede interpretarse como la distancia del punto x al punto a. Además, $x < y$ significa que x está a la izquierda de y.

El intervalo $(a - \delta, a + \delta)$; de centro a y radio δ, está formado por todos los puntos $x \in \mathbb{K}$ cuya distancia al centro a es menor que δ.

Es muy importante destacar que ninguna interpretación geométrica puede formar parte de una demostración formal de un resultado en el estudio del Análisis Matemático, ellas sólo deben ser utilizadas como un medio auxiliar para facilitar la comprensión de una definición o un resultado. Además, ellas pueden sugerirnos algunas ideas de como atacar la demostración de algún resultado.

2.3. Conjuntos Acotados

Definición **2.3.1.** *Sea* $\mathbb{K}$ *un cuerpo ordenado y* $A \subset \mathbb{K}$.

1. *El conjunto A se dice que* **es acotado superiormente** *si existe un* $b \in \mathbb{K}$ *tal que* $x \leq b$ *para todo* $x \in A$. *Es decir,* A *es acotado superiormente si existe* $b \in \mathbb{K}$ *tal que* $A \subset (-\infty, b]$. *(A* b *se le llama una* **cota superior** *para* A*)*

2. *El conjunto A se dice que* **es acotado inferiormente** *si existe un* $a \in \mathbb{K}$ *tal que* $x \geq a$ *para todo* $x \in A$. *Es decir,* A *es acotado inferiormente si existe* $a \in \mathbb{K}$ *tal que* $A \subset [a, \infty)$, *(A* a *se le llama una* **cota inferior** *para* A*)*

3. *El conjunto A se llama* **acotado** *cuando A es superior e inferiormente acotado. Es decir, existen* $a, b \in \mathbb{K}$ *tal que* $a \leq x \leq b$ *para todo* $x \in A$. *En tal caso* A *es acotado, si existen* $a, b \in \mathbb{K}$ *tal que* $A \subset [a, b]$.

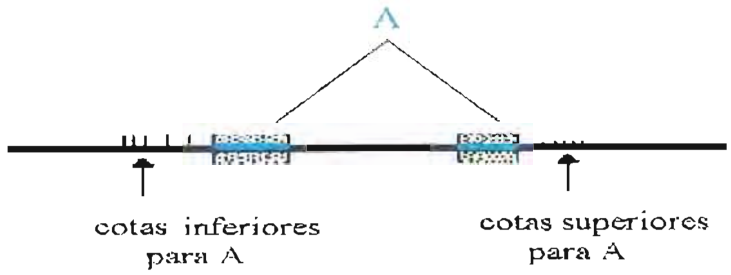

Figura 2.1: Cotas Superiores e Inferiores

Nota 2.3.2.

1. Nótese que, si $\mathbb{K}$ es cuerpo ordenado y $A \subset \mathbb{K}$, entonces A es acotado si y sólo si existe $k \in \mathbb{K}$, $k \geq 0$ tal que $|x| \leq k$ para todo $x \in A$.

   En efecto, si A es acotado entonces

   $$\exists\, a, b \in \mathbb{K} : \quad a \leq x \leq b \ , \forall x \in A. \tag{3}$$

   Sea $k = \max\{|a|, |b|\}$. Entonces, $k \geq 0$ y

   $$k \geq |b| \geq b \quad y \quad a \geq -|a| \geq -k. \tag{4}$$

   Luego, por (3) y (4) se concluye que $|x| \leq k$. El recíproco es evidente.

2. $A \subset \mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$ cuerpo ordenado) no es acotado superiormente significa que,

   $$\forall \ b \in \mathbb{K}, \quad \exists x \in A : \quad b < x.$$

   Análogamente se puede escribir que significa que, A no es acotado inferiormente en $\mathbb{K}$. A no está acotado en un cuerpo ordenado $\mathbb{K}$ significa que,

   $$\forall \ k \in \mathbb{K}, \quad \exists x \in A : \quad |x| > k.$$

3. Nótese que, en la definición de cotas inferiores y superiores queda abierta la posibilidad de que un conjunto tenga muchas cotas inferiores y superiores.

2.3.3.

1. Consideremos el cuerpo ordenado $\mathbb{Q}$ y sea $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{Q}$. Entonces, $1, \frac{3}{2}$ y 2 son algunas cotas superiores para A y $0, -\frac{1}{2}, -1$ son algunas cotas inferiores para A. En consecuencia, A es acotado en $\mathbb{Q}$.

2. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo ordenado, todo intervalo $(a, b]$ en $\mathbb{K}$ es acotado, nótese que a es una cota inferior (pero, $(a, b]$ no tiene elemento mínimo) y b es una cota superior para $(a, b]$ (en este caso, $b = \text{máx}((a, b])$).

3. Considere el cuerpo ordenado $\mathbb{Q}$ y sea $E = \{\frac{1}{n} + (-1)^n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{Q}$. Obsérvese que, si $n = 1$, entonces $0 \in E$.
   Si n es par, entonces $n \geq 2$ y así, $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}$, en consecuencia, $\frac{1}{n} + 1 \leq \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$.
   Si n es impar, entonces $n \geq 3$ y así, $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{3}$, en consecuencia, $\frac{1}{n} - 1 \leq \frac{1}{3} - 1 = -(\frac{2}{3})$. Por lo tanto, $\frac{3}{2}$ es una cota superior para E. Además, $\frac{3}{2} = \text{máx}\, E$. Se sugiere al lector, analizar si E tiene alguna cota inferior.

4. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo ordenado. Consideremos el intervalo $(0, \infty)$ en $\mathbb{K}$, $(0, \infty)$ no es acotado superiormente en $\mathbb{K}$.

   En efecto, dado $b \in \mathbb{K}$ arbitrario veamos que existe $x \in (0, \infty)$ tal que $x > b$.
   Si $b > 0$, entonces $b \in (0, \infty)$ y $2b > b$. Luego, $2b$ está en $(0, \infty)$. Así, basta tomar $x = 2b$.
   Si $b \leq 0$ entonces cualquier $x \in (0, \infty)$ satisface que $x > b$.
   En conclusión, $(0, \infty)$ no es acotado superiormente en $\mathbb{K}$.

5. El conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales, no es acotado superiormente en $\mathbb{Q}$.

   En efecto, dado $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ arbitrario veamos que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $p > \frac{m}{n}$.
   Claramente,
   $$|m| + 1 \in \mathbb{N} \quad y \quad |m| + 1 > 1.$$
   Ahora, $|m| + 1 \geq \frac{m}{n}$ (considere los signos de m y n). En consecuencia, $p = |m| + 1$, satisface lo que queríamos.

2.4. Cuerpos Arquimedianos

Teorema **2.4.1.** *Sea* $\mathbb{K}$ *un cuerpo ordenado. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $\mathbb{N} \subset \mathbb{K}$ *no es acotado superiormente.*
2. *Dados* $a, b \in \mathbb{K}$ *con* $a > 0$*, existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $n \cdot a > b$.
3. *Dado* $a > 0$ *en* $\mathbb{K}$*, existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $n - 1 \leq a < n$.
4. *Dado* $a > 0$ *en* $\mathbb{K}$*, existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $0 < \frac{1}{n} < a$. *(Ver, Figura 2.2)*
5. *Dado* $a > 0$ *en* $\mathbb{K}$*, existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $0 < \frac{1}{2^n} < a$.

Prueba: Probaremos $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 5 \Rightarrow 1$.

$(1 \Rightarrow 2)$ Por la hipótesis, $\mathbb{N}$ no es acotado superiormente en $\mathbb{K}$, entonces $\frac{b}{a}$ no es una cota superior para $\mathbb{N}$, es decir, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \frac{b}{a}$. En consecuencia, $n \cdot a > b$ pues, $a > 0$.

$(2 \Rightarrow 3)$ Dado $a > 0$, por 2 el conjunto $A = \{m \in \mathbb{N} : \ a < m\}$ es no vacío (para ver esto basta tomar a=1 en 2) y está contenido en $\mathbb{N}$. Entonces por el principio del buen orden (ver 1.6(4)) existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n = \min A$, por lo tanto, $n - 1 \leq a < n$.

$(3 \Rightarrow 4)$. Dado $a > 0$, entonces $\frac{1}{a} > 0$. Por 3, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n - 1 \leq \frac{1}{a} < n$, en consecuencia, $\frac{1}{a} < n$.

$(4 \Rightarrow 5)$. Dado $a > 0$, por 4 existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{n} < a. \tag{5}$$

Ahora, como $n < 2^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (verificarlo por inducción), entonces

$$\frac{1}{2^n} < \frac{1}{n}. \tag{6}$$

Luego, por (5) y (6), 5 es cierto.

$(5 \Rightarrow 1)$. Dado $a \in \mathbb{K}$. Si $a \leq 0$, entonces a no puede ser una cota superior para $\mathbb{N}$.
Si $a > 0$, entonces $\frac{1}{a} > 0$ y por 5, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{a}$. Así, $a < 2^n$. Como $2^n \in \mathbb{N}$, se sigue que a no es un cota superior para $\mathbb{N}$. En cualquier caso $\mathbb{N}$ no es acotado superiormente. ∎

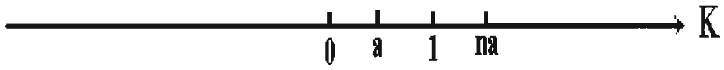

Figura 2.2: Propiedad Arquimediana

Nota **2.4.2.**

1. Un cuerpo ordenado $\mathbb{K}$ se llama **arquimediano** cuando satisface una de las afirmaciones del teorema 2.5.4.

2. Por el ejemplo 2.4.3(5), Q es un cuerpo arquimediano.

3. Análogo a como se probó 5 en el teorema 2.5.4, se puede probar que un cuerpo ordenado $\mathbb{K}$ es arquimediano si y sólo si dado $a > 0$ en $\mathbb{K}$ existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{k_0^n} < a$ ($k_0 \geq 2$ es un elemento fijo en $\mathbb{N}$).

2.5. Cuerpos Completos

Hasta ahora sólo hemos estudiado las propiedades algebraicas y de orden de un conjunto $\mathbb{K}$. En lo que sigue abordaremos el estudio del axioma fundamental del Análisis.

Definición **2.5.1.** *Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo ordenado y $A \subset \mathbb{K}$ acotado superiormente en $\mathbb{K}$. Un elemento en $b \in \mathbb{K}$ se llama* **supremo** *de A, denotado por $b = \sup A$, si b es la menor de las cotas superiores para A. (Ver, Figura 2.3)*

Nota 2.5.2.

1. De la definición se deduce que:

   $b = \sup A \quad \Leftrightarrow \quad$ (i) b es una cota superior para A y (ii) si b' es otra cota superior para A, entonces $b \leq b'$. (Ver Figura 2.3)

   Nótese que, la condición (i) nos dice que b es una cota superior para A y (ii) nos dice que b es menor o igual que cualquier otra cota superior para A.

2. De la definición de sup A se sigue que:
   (i) $x \leq \sup A, \ \forall x \in A.$
   (ii) $c \geq x, \ \forall x \in A \quad \Rightarrow \quad \sup A \leq c.$
   (iii) $c < \sup A \quad \Rightarrow \quad \exists \ x \in A : \quad c < x$. (En caso contrario, si para todo $x \in A \quad c \geq x$, entonces c es una cota superior para A. Como $c < \sup A$ esto contradice (ii) de 1.)

3. Si $A = \emptyset$, entonces todo $b \in \mathbb{K}$ es una cota superior para A. (Al contrario, si existe $b \in \mathbb{K}$ que no es una cota superior para A, entonces existiría un $x \in A$ tal que $x > b$, lo cual es un absurdo).

4. De la definición de $\sup A$, es claro que $\sup A$ puede o no estar en el conjunto A. Además, si un conjunto A tiene supremo, éste es único.

   En efecto, si b y c son supremos de A, entonces por 1(i) a y b son cotas superiores para A. En consecuencia, por 1(ii) $c \leq b$ y $b \leq c$ y así, $b = c$.

5. Afirmamos que si $b = \text{máx}\, A$, entonces $b = \sup A$.

   En efecto, es claro que si $b = \text{máx}\, A$, entonces b es una cota superior para A. Por otro lado, si b' es otra cota superior para A, como $b \in A$, entonces $b' \geq b$. Así, $b = \sup A$.

6. Cuando un conjunto A no es acotado superiormente, convendremos que $\sup A = \infty$.

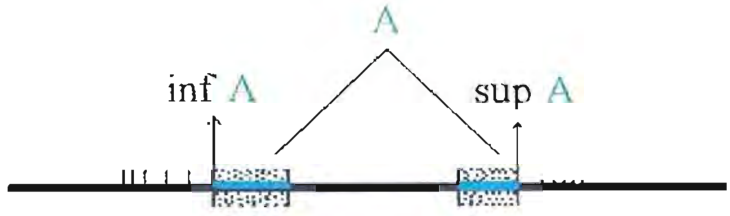

Figura 2.3: Ínfimo y Supremo

2.5.3.

1. Para $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ del ejemplo 2.4.3(1), $\sup A = 1$, pues $1 = \max A$.

2. Para $A = (a, b]$ del ejemplo 2.3.3(2), $\sup A = b$ (¿por qué?).

3. Para $E = \{\frac{1}{n} + (-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$ del ejemplo 2.4.3(3), $\sup E = \frac{3}{2}$ (¿por qué?).

4. Sea $A = (a, b)$ un intervalo en un cuerpo ordenado $\mathbb{K}$. Afirmamos que $\sup A = b$.

   En efecto, claramente b es una cota superior para (a, b).
   Supongamos que b no es menor de las cotas superiores para (a, b). Es decir, existe $b' \in \mathbb{K}$ cota superior para (a, b) tal que $b' < b$. Como $x_0 = \frac{b'+b}{2}$ es tal que $b' < x_0 < b$, entonces $x_0 \in (a, b)$ y esto contradice el supuesto de que b' es una cota superior para (a, b). Por lo tanto, b es la menor de las cotas superiores para (a, b).
   En este caso, $\sup A = b \notin A$.

Definición **2.5.4.** *Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo ordenado y $A \subset \mathbb{K}$ acotado inferiormente en $\mathbb{K}$. Un elemento en $a \in \mathbb{K}$ se llama* ínfimo *de A, denotado por $a = \inf A$, si a es la mayor de las cotas inferiores para A. (Ver, Figura 2.3)*

Nota **2.5.5.**

1. De la definición se deduce que,
$a = \inf A \Leftrightarrow$ (i) a es una cota inferior para A y (ii) si a' es otra cota inferior para A, entonces $a \geq a'$. (Ver, Figura 2.3)

   Nótese que, la condición (i) nos dice que a es una cota inferior para A y (ii) nos dice que a es mayor o igual que cualquier otra cota inferior para A.

2. De la definición de $\inf A$ se sigue que:
(i) $x \geq \inf A$, $\forall x \in A$.
(ii) $c \leq x$, $\forall x \in A \Rightarrow \inf A \geq c$.
(iii) $c > \inf A \Rightarrow \exists\, x \in A : c > x$. (En caso contrario, si para todo $x \in A$ $c \leq x$, entonces c es una cota inferior para A. Como $c > \inf A$ esto contradice (ii) de 1).

3. Si $A = \emptyset$, entonces todo $a \in \mathbb{K}$ es una cota inferior para A. (Al contrario, si existe $a \in \mathbb{K}$ que no es una cota inferior para A, entonces existiría un $x \in A$ tal que $x < a$, lo cual es un absurdo).

4. De la definición de $\inf A$, es claro que $\inf A$ puede o no estar en el conjunto A. Además, si un conjunto A tiene ínfimo, éste es único.

5. Afirmamos que si $a = \min A$, entonces $a = \inf A$.

   En efecto, es claro que si $a = \min A$, entonces a es una cota inferior para A. Por otro lado, si a' es otra cota inferior para A, como $a \in A$, entonces $a' \leq a$. Así, $a = \inf A$.

6. Cuando un conjunto A no es acotado inferiormente, convendremos que $\inf A = -\infty$. Así, cuando un conjunto A no esta acotado inferior ni superiormente, entonces $\sup A = \infty$ e $\inf A = -\infty$.

2.5.6.

1. Para $A = \{\frac{1}{n} : \ \in \mathbb{N}\}$ del ejemplo 2.3.3(1), $\inf A = 0$.

   En efecto, como $0 < \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces 0 es una cota

inferior para A.
Ahora, supongamos que 0 no es la mayor de las cotas inferiores para A. Es decir, existe α en $\mathbb{Q}$ tal que, α es una cota inferior para A y $0 < \alpha$. Por ser $\mathbb{Q}$ arquimediano, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \alpha$, pero esto contradice el supuesto que α es una cota inferior para A. Así, $\inf A = 0 \notin A$.

2. Para $(a, b]$ del ejemplo 2.3.3(2), $\inf(a, b] = a$. Para probar esto se procede de manera similar al ejemplo 2.5.3(4).

3. Para $E = \{\frac{1}{n} + (-1)^n : \ \in \mathbb{N}\}$ del ejemplo 2.3.3(2), $\inf E = -1$.

   En efecto, -1 es una cota inferior para E (¿por qué?).
   Ahora, supongamos que -1 no es la mayor de las cotas inferiores para E. Es decir, existe $\alpha \in \mathbb{Q}$ cota inferior para E, tal que $-1 < \alpha$. Como $\alpha + 1 > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ (n impar ¿por qué?), tal que $\frac{1}{n} < \alpha + 1$. Así, $\frac{1}{n} - 1 < \alpha$ y por lo tanto $\frac{1}{n} - 1 \in E$ lo que contradice el supuesto de que α es una cota inferior para E. En consecuencia, $\inf E = -1$.

4. Sea $A = (a, b)$ en un cuerpo ordenado $\mathbb{K}$. Afirmamos que $\inf A = a$. Para ver esto, proceder como en 2.

Nota **2.5.7.**

La laguna más profunda de los números racionales, en el campo del Análisis Matemático es la que existen conjuntos no vacíos de números racionales acotados superiormente que no poseen supremo. Este hecho está estrechamente relacionado a la inexistencia de números racionales cuyo cuadrado sea 2.

Se especula que una de los primeros números irracionales descubierto fue $\sqrt{2}$, partiendo del problema de encontrar medidas de lados de triángulos. Así, podemos destacar que los pitagóricos conocían la prueba rigurosa de la irracionalidad de $\sqrt{2}$.

Teorema **2.5.8.** *No existe número racional cuyo cuadrado sea 2.*

Prueba: Supongamos que existe $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ tal que $(\frac{m}{n})^2 = 2$. Podemos asumir que m y n son primos relativos (es decir, el único divisor común entre m y n es 1). Así, $m^2 = 2n^2$ y en consecuencia, m^2 es un número par. Como m^2

es un número par, entonces m es un número par (verificarlo), luego $m = 2k$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $n^2 = 2k^2$ y así, n^2 es un número par. En consecuencia, n es un número par. Por lo cual hemos obtenido, que n y m tienen a 2 como divisor común en contradicción con el supuesto. Luego, el teorema es cierto. ∎

El siguiente ejemplo muestra que existen subconjuntos de números racionales no vacíos acotados superiormente que no tienen supremo en $\mathbb{Q}$.

2.5.9.

Sea $A = \{p \in \mathbb{Q} : \ p > 0 \ \ y \ \ p^2 < 2\}$. Afirmamos que, $A \neq \emptyset$, A es acotado superiormente y A no tiene supremo en $\mathbb{Q}$.

En efecto, claramente, $1 \in A$ y así, $A \neq \emptyset$.
Además, $A \subset [0, 2] \subset \mathbb{Q}$, entonces A es acotado superiormente en $\mathbb{Q}$.

Ahora, supongamos que existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $r = \sup A$.
Veamos, que $r^2 < 2$ y $r^2 > 2$ son imposibles.

Sea $r^2 < 2$. Queremos hallar $q \in A$ tal que $q > r$ esto conduciría a una contradicción, pues $r = \sup A$.
Para hallar q, podemos establecer un proceso de búsqueda, como $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n}$, entonces para $q = r + \frac{1}{n}$ se tiene que,

$$q^2 = \left(r + \frac{1}{n}\right)^2 = r^2 + \frac{2r}{n} + \frac{1}{n^2} < r^2 + \frac{2r}{n} + \frac{1}{n}.$$

Si $r^2 + \frac{2r}{n} + \frac{1}{n} < 2$, entonces $\frac{1}{n} < \frac{2-r^2}{2r+1}$.

Como $\mathbb{Q} \ni \frac{2-r^2}{2r+1} > 0$ y $\mathbb{Q}$ es arquimediano, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \frac{2-r^2}{2r+1}$.
En consecuencia, $q = r + \frac{1}{n}$ satisface que $q \in A$ y $q > r$ lo cual es absurdo, pues $r = \sup A$. Por lo cual, el caso $r^2 < 2$ no es posible.

Sea $r^2 > 2$. Queremos hallar $q \in \mathbb{Q}$ tal que $q < r$ y q una cota superior para A, de nuevo esto conduciría a una contradicción, pues $r = \sup A$.
Igual a como procedimos anteriormente, podemos establecer un proceso de

búsqueda, como $\frac{1}{n^2} > 0$, entonces para $q = r - \frac{1}{n}$ obtenemos que:

$$q^2 = \left(r - \frac{1}{n}\right)^2 = r^2 - \frac{2r}{n} + \frac{1}{n^2} > r^2 - \frac{2r}{n}.$$

Si $r^2 - \frac{2r}{n} > 2$, entonces $\frac{1}{n} < \frac{r^2-2}{2r}$.

Como $\mathbb{Q} \ni \frac{r^2-2}{2r} > 0$ y $\mathbb{Q}$ es arquimediano, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \frac{r^2-2}{2r}$.
En consecuencia, $q = r - \frac{1}{n}$ satisface que $q < r$ y $q^2 > 2$, por lo que para cada $p \in A$ se tiene que $(r - \frac{1}{n})^2 > p^2$ y en consecuencia, $r - \frac{1}{n} > p$ (¿por qué?). Así, q es una cota superior para A, lo cual es absurdo pues $r = \sup A$. Por lo cual, el caso $r^2 > 2$ no es posible.

Ahora, por tricotomía (ver axioma 12) sólo queda $r^2 = 2$, pero esto contradice el teorema 2.5.8. En conclusión, A no tiene supremo en $\mathbb{Q}$.

Nota **2.5.10.**

El ejemplo 2.5.9 sugiere de manera natural que debe existir un cuerpo ordenado en el cual todo conjunto no vacío acotado superiormente tenga supremo. Dicho cuerpo por ser ordenado debe contener a $\mathbb{Q}$ y en él existirá un r tal que $r^2 = 2$.

Definición **2.5.11.** *Un cuerpo ordenado* $\mathbb{K}$ *se llama* **completo** *si todo subconjunto de* $\mathbb{K}$ *no vacío y acotado superiormente tiene supremo en* $\mathbb{K}$.

Teorema **2.5.12.** *Sea* $\mathbb{K}$ *un cuerpo ordenado y completo. Entonces*

1. *Todo conjunto* A *no vacío acotado inferiormente en* $\mathbb{K}$ *tiene ínfimo en* $\mathbb{K}$ *e* $\inf A = -\sup(-A)$.

2. $\mathbb{K}$ *es arquimediano.*

Prueba:

1. Nótese que,

$$A \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad -A = \{-x : x \in A\} \neq \emptyset,$$

y como A es acotado inferiormente en $\mathbb{K}$, entonces existe $a \in \mathbb{K}$ tal que $a \leq x$ para todo $x \in A$, en consecuencia, $-a \geq -x$ para todo $x \in A$. Así, $-A$ es acotado superiormente $\mathbb{K}$. Como $\mathbb{K}$ es completo existe $b \in \mathbb{K}$ tal que $b = \sup(-A)$. Claramente $-b$ es una cota inferior para A. Supongamos que $-b$ no es la mayor de las cotas inferiores para A, es decir, existe c en $\mathbb{K}$ cota inferior para A tal que $-b < c$. Luego, $-c < b$ y por la nota 2.2.5(2(iii)) existe $-x \in -A$ tal que $-c < -x$. En consecuencia, $x < c$ $(x \in A)$, lo que contradice el supuesto de que c era una cota inferior para A.
En conclusión, A tiene ínfimo e $\inf A = -\sup(-A)$.

2. Para ver que $\mathbb{K}$ es arquimediano basta probar que $\mathbb{N}$ no es acotado superiormente en $\mathbb{K}$.
Supongamos que $\mathbb{N}$ es acotado superiormente en $\mathbb{K}$. Como $\mathbb{N} \neq \emptyset$ y $\mathbb{K}$ es completo existe $b \in \mathbb{K}$ tal que $b = \sup \mathbb{N}$. En consecuencia, $n + 1 \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y así, $n \leq b - 1 < b$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Es decir, $b - 1$ es una cota superior para $\mathbb{N}$ menor que b lo cual es absurdo. Por lo tanto, $\mathbb{N}$ no es acotado inferiormente en $\mathbb{K}$.

Nota **2.5.13.**

1. Es claro que existen cuerpos arquimedianos que no son completos, como por ejemplo $\mathbb{Q}$.

2. Se puede probar fácilmente que un conjunto A es acotado inferiormente en un cuerpo ordenado $\mathbb{K}$ si y sólo si $-A$ es acotado superiormente en $\mathbb{K}$.

El siguiente teorema es de gran aplicación en la practica, pues nos da una condición equivalente a la definición de supremo. (Ver, Figura 2.4)

Teorema **2.5.14.** *Sean $\mathbb{K}$ un cuerpo ordenado y completo, $A \subset \mathbb{K}$ y $b \in \mathbb{K}$.*
$b = \sup A$ si y sólo si
(i) b es un cota superior para A y
(ii) para cada $\varepsilon(\in \mathbb{K}) > 0$ existe $x = x(b, \varepsilon)$[3] $\in A$ tal que $b - \varepsilon < x$.

Prueba:
$(\Rightarrow)$ Supongamos que $b = \sup A$, probemos que las condiciones (i) y (ii) son

[3] Esta notación indica que x depende de b y de ε.

ciertas.
Es evidente por la hipótesis, que (i) es cierta.
Ahora, dado $\varepsilon > 0$, $b - \varepsilon < b$ y por la nota 2.5.5(2(ii)) existe $x \in A$ tal que $b - \varepsilon < x$. Así, (ii) es cierta.

($\Leftarrow$) Supongamos que las condiciones (i) y (ii) son ciertas y probemos que $b = \sup A$.
Por (i), b es una cota superior para A.
Ahora, supongamos que b no es la menor de las cotas superiores para A. Es decir, existe $c \in \mathbb{K}$ cota superior para A tal que $c < b$. Como la condición (ii) vale para todo $\varepsilon > 0$ debe valer para $\varepsilon := b - c$, entonces existe $x \in A$ tal que $c = b - (b - c) < x$, pero esto contradice el supuesto de que c es una cota superior para A. En consecuencia $b = \sup A$. ∎

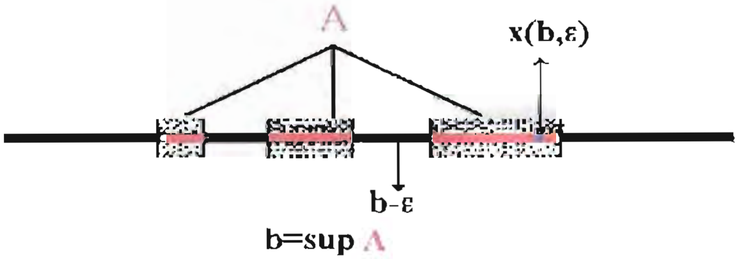

Figura 2.4: Caracterización del Supremo

Nota 2.5.15.

Análogo al teorema 2.5.14 se puede establecer una caracterización para el ínfimo de un conjunto A en un cuerpo ordenado y completo a saber:

$$a = \inf A \Leftrightarrow \text{(i)} a \text{ es una cota superior para } A \text{ y}$$
$$\text{(ii)} \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ x = x(a, \varepsilon) \in A : x < a + \varepsilon.$$

Teorema 2.5.16. *Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo ordenado y completo. Sean $A, B \subset \mathbb{K}$, A y B no vacíos. Definamos $A + B = \{a + b : a \in A \text{ y } b \in B\}$.*

1. *Si A y B tienen supremo, entonces $A + B$ tiene supremo y*

$$\sup(A+B) = \sup A + \sup B.$$

2. *Si A y B tienen ínfimo, entonces $A+B$ tiene ínfimo e*

$$\inf(A+B) = \inf A + \inf B.$$

Prueba:

1. Sean $a = \sup A$ y $b = \sup B$, entonces

$$[x \leq a, \forall x \in A \quad y \quad y \leq b, \forall y \in B] \;\Rightarrow\; x + y \leq a + b, \forall x + y \in A + B.$$

Así, $A + B$ es acotado superiormente en $\mathbb{K}$ y $a + b$ es una cota superior para $A+B$. Además, $A, B \neq \emptyset$ implica que $A+B \neq \emptyset$. En consecuencia, por la completitud de $\mathbb{K}$ existe $c \in \mathbb{K}$ tal que $c = \sup(A+B)$. Ahora, probemos que $c = a + b$.
Aplicando el teorema 2.5.14, para a y b obtenemos que, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario (así, $\frac{\varepsilon}{2}$ es también arbitrario) existen $x \in A$, $y \in b$ tal que

$$a - \frac{\varepsilon}{2} < x \quad y \quad b - \frac{\varepsilon}{2} < y.$$

En consecuencia,

$$(a+b) - \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\right) < x + y.$$

Así, existe $z = x + y \in A + B$ tal que

$$(a+b) - \varepsilon < z.$$

Además, como $a + b$ es una cota superior para $A + B$, a la luz del teorema 2.5.14 se sigue que, $a + b = \sup(A+B) = c$.

2. Sean $a = \inf A$ y $b = \inf B$. Claramente, los conjuntos $-A$ y $-B$ son no vacíos y acotados superiormente en $\mathbb{K}$, como $\mathbb{K}$ es completo, existen $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ tal que $\alpha = \sup(-A)$ y $\beta = \sup(-B)$. Luego, por 1

$$\alpha + \beta = \sup[(-A) + (-B)] = \sup[-(A+B)].$$

En consecuencia, $-\alpha - \beta = -\sup[-(A+B)]$. Entonces, por el teorema 2.5.12(1)

$$\inf(A+B) = a + b = \inf A + \inf B.$$

∎

Ahora, estableceremos el axioma fundamental del Análisis el cual dota al conjunto de los números reales de una propiedad diferente a la dada por los catorce axiomas anteriores y su profundidad e importancia sólo fue percibida a finales del siglo XIX, siendo además un axioma de contenido poco intuitivo, pero, de tal magnitud que transforma un sistema meramente algebraico en un sistema que es la materia prima del Análisis Matemático. Así, quedara comprobado en el desarrollo de todo este material que todo resultado significativo del Análisis Matemático tiene sus orígenes en el axioma 15.

Axioma 15. Axioma Fundamental del Análisis
Existe un cuerpo ordenado y completo, $\mathbb{R}$, llamado de los números reales.

Nota **2.5.17.**

1. En lo que sigue usaremos todas las propiedades de $\mathbb{R}$ que se deducen del hecho de ser un cuerpo ordenado y completo.

2. De la nota 2.5.10, se sigue que existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $r^2 = 2$, este número se representa por $\sqrt{2}$ y por el teorema 2.5.8, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Teorema **2.5.18.** *$I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo (no degenerado) si sólo si para todo $x, y \in I$ con $x < z < y$ implica $z \in I$.*

Prueba:
($\Leftarrow$) Supongamos que le condición es cierta y probemos que I es un intervalo.

Caso I. I es acotado en $\mathbb{R}$.
Por el axioma 15, existen $a = \inf I$ y $b = \sup I$.

Si $a, b \in I$, entonces $[a, b] \subset I$ y claramente $I \subset [a, b]$.
Así, $I = [a, b]$.

Si $a \in I$ y $b \notin I$, entonces $I \subset [a, b)$.
Sea $x \in [a, b)$, si $x = a$, entonces $x \in I$ y así, $[a, b) \subset I$.
Luego, $I = [a, b)$

* Si $\inf I = a < x < b = \sup I$, entonces por la notas 2.5.2(2(iii)) y 2.5.5(2(iii)) existen $y, z \in I$ tales que $z < x < y$. Luego, por la hipótesis $x \in I$ y en consecuencia, $I \supset [a, b)$.
Por lo tanto, $I = [a, b)$.

Si $a \notin I$ y $b \in I$, entonces procediendo como antes vemos que $I = (a, b]$.

Si $a \notin I$ y $b \notin I$, veamos que $I = (a, b)$.
Claramente, $I \subset (a, b)$.
Si $x \in (a, b)$, entonces procediendo como en *, vemos que $(a, b) \subset I$ y así, $I = (a, b)$.

Caso II. I no es acotado superior ni inferiormente. En este caso, $\inf I = -\infty$ y $\sup I = \infty$ y evidentemente, $I = (-\infty, \infty)$.

Caso III. I es acotado superiormente pero no inferiormente. En este caso, $\inf I = -\infty$ y $\sup I = b$.

Si $b \in I$, entonces $(-\infty, b] \subset I$ y como, $I \subset (-\infty, b]$, se sigue que, $I = (-\infty, b]$.

Si $b \notin I$, entonces $I \subset (-\infty, b)$.
Sea $x \in (-\infty, b)$, entonces $x < b = \sup I$. Luego, por la nota 2.5.2(2(iii)) existe $y \in I$ tal que

$$x < y. \tag{7}$$

Ahora, como I no es acotado inferiormente en $\mathbb{R}$, para $x \in \mathbb{R}$ existe $z \in I$ tal que

$$z < x. \tag{8}$$

En consecuencia, por (7),(8) y la hipótesis se sigue que $x \in I$ y por lo tanto, $(-\infty, b) \subset I$. Así, $I = (-\infty, b)$.

Por último los casos $\sup I = \infty$ e $\inf I = a$, que conducen a los casos $I = [a, \infty)$ e $I = (a, \infty)$ se prueban de manera análoga al caso anterior.

$(\Rightarrow)$ Si I es un intervalo, entonces en cada caso I satisface que, $x, y \in I$ y $x < z < y$, implica $z \in I$. ∎

Definición **2.5.19.** *Los elementos del conjunto* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *(es decir, los números reales que no son racionales) se llaman* **números irracionales**.

Teorema **2.5.20.** *La raíz cuadrada de un número natural n que no es un cuadrado perfecto (es decir, $n \neq m^2$ para todo $m \in \mathbb{N}$) es un número irracional.*

Prueba: Supongamos que $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$, en consecuencia, $\sqrt{n} = \frac{p}{q}$, donde podemos asumir que p y q son primos relativos y además $q \neq 1$ (en caso contrario, si $q = 1$ entonces n sería un cuadrado perfecto en contradicción con la hipótesis). Luego, $nq = \frac{p^2}{q}$ y por el teorema de Euclides q sería un divisor de p diferente a 1 en contradicción con la hipótesis. Por lo tanto, el teorema es cierto. ∎

Nota **2.5.21.**

Procediendo de manera similar a la prueba del teorema 2.5.20, se puede probar que:

$$\sqrt[n]{m} \notin \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \sqrt[n]{m} \notin \mathbb{Q} \quad (n, m \in \mathbb{N}).$$

2.6. Conjuntos Densos y Numerables

Definición **2.6.1.** *Un subconjunto A en $\mathbb{R}$ se llama* **denso** *en $\mathbb{R}$, cuando dados $x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$ existe $z \in A$ tal que $x < z < y$. Es decir, A es denso en $\mathbb{R}$ cuando dado un intervalo (x, y) en R se verifica que,*

$$A \cap (x, y) \neq \emptyset.$$

Teorema **2.6.2.** *Los conjuntos $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ son densos en $\mathbb{R}$.*

Prueba:
(i) Probemos que $\mathbb{Q}$ es denso en R. Es decir, dados $x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$ veamos que existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $x < r < y$.

Caso I. $x > 0$. Como $\mathbb{R}$ es arquimediano, para $y - x > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{y-x} < n$. En consecuencia,

$$ny > 1 + nx. \tag{9}$$

Por otro lado, como $nx > 0$, por la propiedad arquimediana de $\mathbb{R}$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$m - 1 \leq nx < m \tag{10}$$

y así,

$$m \leq nx + 1. \tag{11}$$

Luego, por (9) y (11), obtenemos que $m < ny$. En consecuencia, por (10) se sigue que, $nx < m < ny$. Por lo tanto, $x < \frac{m}{n} < y$. Así, basta tomar $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$.

Caso II. Si $x < 0$, entonces $-x > 0$ y se aplica el caso I.

Caso III. Si $x = 0$, entonces $y > 0$ y como $\mathbb{R}$ es arquimediano existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < y$ y así, basta tomar $r = \frac{1}{n} \in \mathbb{Q}$.

(ii) Probemos que $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$.

Sean $x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$. Luego, $\frac{x}{\sqrt{2}} < \frac{y}{\sqrt{2}}$, como $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, existe $r \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$[4] tal que

$$\frac{x}{\sqrt{2}} < r < \frac{y}{\sqrt{2}}. \tag{12}$$

Ahora, sea $i = \sqrt{2}r \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ (probarlo). Se sigue de (12) que, $x < i < y$. Así, $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ es denso en R. ∎

Teorema **2.6.3. (Principio de los Intervalos Encajados)**
Sea (I_n) una sucesión decreciente ($I_{n+1} \subset I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$) de intervalos cerrados y acotados $I_n = [a_n, b_n]$. Entonces $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$. (Ver, Figura 2.5)

Prueba: Como para cada $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} \subset I_n$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que,

$$a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n. \tag{13}$$

Definamos:

$$A = \{a_n : \quad \in \mathbb{N}\} \quad y \quad B = \{b_n : \quad \in \mathbb{N}\}.$$

Luego, por (13) $A(\neq \emptyset)$ es acotado inferiormente por a_1 y cada b_n $(n \in \mathbb{N})$ es una cota superior para A. Así, existe $a = \sup A$.
De la misma forma, por (13) $B(\neq \emptyset)$ es acotado superiormente por b_1 y

[4] Si $r = 0$, podemos aplicar la densidad de $\mathbb{Q}$ a 0 y $y/\sqrt{2}$ y hallamos un $s > 0$ en $\mathbb{Q}$ tal que $0 < s < y/\sqrt{2}$.

cada a_n ($n \in \mathbb{N}$) es una cota inferior para B. Así, existe $b = \inf B$.
Ahora, por (13) y las definiciones de ínfimo y supremo obtenemos que,

$$a_n \leq a \leq b \leq b_n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia, $a, b \in [a_n, b_n]$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y por lo tanto, $[a, b] \subset I_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.
En consecuencia, $\emptyset \neq [a, b] \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. ∎

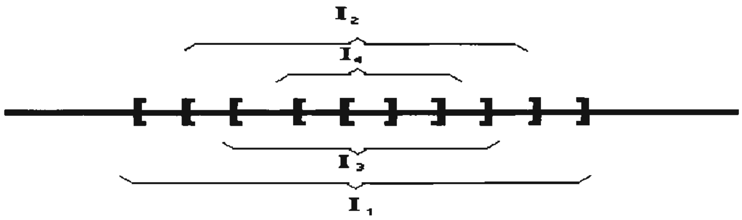

Figura 2.5: Intervalos Encajados

Teorema **2.6.4.** *El conjunto* $\mathbb{R}$ *de los números reales es no numerable.*

Prueba:
Afirmación Dados un intervalo cerrado y acotado $I = [a, b]$, con $a < b$ y $x \in \mathbb{R}$, existe un intervalo cerrado y acotado $J = [c, d]$, con $c < d$ tal que $x \notin J \subset I$.

En efecto, si $x \notin [a, b]$, entonces basta tomar $J = I$.
Si $x \in [a, b]$, entonces basta tomar $J = [a, x - \varepsilon]$ para algún $\varepsilon > 0$. Así, la afirmación es cierta.

Para probar el teorema, veamos que dado un conjunto (arbitrario) numerable $A \subset \mathbb{R}$, existe un $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \notin A$.
Como A es numerable, entonces podemos escribir $A = \{x_1, x_2, \cdots x_n, \cdots\}$.
Sea I_1 un intervalo (no degenerado) cerrado y acotado en $\mathbb{R}$ tal que $x_1 \notin I_1$, por la afirmación, aplicada a I_1 y a x_1, existe un intervalo (no degenerado) cerrado y acotado I_2 tal que $x_2 \notin I_2 \subset I_1$.
De nuevo aplicando la afirmación al intervalo I_2 y a x_3, existe un intervalo

(no degenerado) cerrado y acotado I_3 tal que $x_3 \notin I_3 \subset I_2$.
Así, procediendo inductivamente supongamos que hemos obtenido una colección de intervalos (no degenerados) cerrados y acotados $(I_k)_{k=1}^n$ tal que

$$x_k \notin I_k \subset I_{n-1} \quad 1 \leq k \leq n.$$

Entonces por la afirmación podemos obtener un intervalo (no degenerado) cerrado y acotado I_{n+1} tal que $x_{n+1} \notin I_{n+1} \subset I_n$. En consecuencia, hemos obtenido una sucesión decreciente de intervalos (no degenerados) cerrados y acotados tal que

$$x_{n+1} \notin I_{n+1} \subset I_n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, por el teorema 2.6.3, $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$. Es decir, existe $x \in I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
Por otro lado, como $x_n \notin I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $x \neq x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
Por lo tanto hemos probado que ningún conjunto numerable A es tal que $A = \mathbb{R}$ y así, $\mathbb{R}$ no es numerable. ∎

Corolario 2.6.5. *El conjunto $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ de los números irracionales es no numerable.*

Prueba: Es conocido que $\mathbb{Q}$ es numerable. Si $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ fuera numerable, entonces $\mathbb{R} = \mathbb{Q}\cup(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ sería la unión de dos conjuntos numerales y en consecuencia, $\mathbb{R}$ es numerable, en contradicción con el teorema 2.6.4. Por lo tanto, $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ es no numerable. ∎

Corolario 2.6.6. *Todo intervalo no degenerado es no numerable.*

Prueba: Sea I un intervalo no degenerado, entonces $I \supset (a, b)$ para algún intervalo (a, b). Ahora, la función $f : (-1, 1) \to (a, b)$ dada por

$$f(x) = \frac{1}{2}[(b-a)x] + \frac{a+b}{2},$$

es una biyección (verificarlo). En consecuencia, para probar el resultado basta probar que el intervalo $(-1, 1)$ es no numerable.
Supongamos que $(-1, 1)$ es numerable. Consideremos la función $g : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ dada por

$$g(x) = \frac{x}{1+|x|},$$

es una biyección (verificarlo), cuya inversa $g^{-1} : (-1,1) \to \mathbb{R}$ es

$$g^{-1}(x) = \frac{x}{1-|x|}.$$

Así, $\mathbb{R}$ sería numerable en contradicción con el teorema 2.6.4. Por lo tanto, el intervalo $(-1,1)$ es no numerable y en consecuencia, el intervalo (a,b) es no numerable, y como $I \supset (a,b)$, entonces I es no numerable. ∎

2.7. Ejercicios

1. Pruebe las siguientes propiedades para elementos en $\mathbb{R}$ (recuerde que $\mathbb{R}$ es un cuerpo).

   a) Si $x+y = x$ entonces $y=0$.

   b) $-0 = 0$.

   c) $(-1)x = -x$.

   d) $x(y-z) = xy - xz$.

   e) $-(x+y) = -x-y$ y $-(x-y) = -x+y$.

   f) Si $x \neq 0$ y $xy = x$, entonces $y=1$.

   g) $\frac{x}{1} = x$.

   h) $x \neq 0$ y $y \neq 0 \Rightarrow xy \neq 0$.

   i) $\frac{1}{y}\frac{1}{z} = \frac{1}{xz}$ si $y,z \neq 0$.

   j) $(\frac{x}{y})(\frac{w}{z}) = \frac{xw}{yz}$ si $y,z \neq 0$.

   k) $\frac{x}{y} + \frac{w}{z} = \frac{xz+wy}{yz}$ si $y.z \neq 0$.

   l) $\frac{1}{\frac{w}{z}} = \frac{z}{w}$ si $w,z \neq 0$.

   m) $\frac{\frac{x}{y}}{\frac{w}{z}} = \frac{xz}{yw}$ si $y,w,z \neq 0$.

   n) $\frac{ax}{y} = a(\frac{x}{y})$ si $y \neq 0$.

   ñ) $\frac{(-x)}{y} = \frac{x}{(-y)} = -(\frac{x}{y})$ si $y \neq 0$.

2. Probar las siguientes propiedades para desigualdades en $\mathbb{R}$ (recuerde que $\mathbb{R}$ es un cuerpo ordenado).

   a) $x > y$ y $w > z \Rightarrow x + y > y + z$.

   b) $x > y$ y $z < 0 \Rightarrow xz < yz$.

   c) $-1 < 0 < 1$.

   d) $xy > 0 \Leftrightarrow x, y$ son ambos positivos o ambos negativos.

   e) $| x |= 0 \Leftrightarrow x = 0$.

   f) $| x |> b \Leftrightarrow x > b$ *o* $x < -b$. $| x |= \sqrt{x^2}$.

3. Encontrar el fallo de la siguiente demostración:

$$\begin{aligned} x = y &\Rightarrow x^2 = xy \Rightarrow x^2 - y^2 = xy - y^2 \\ &\Rightarrow (x + y)(x - y) = y(x - y) \\ &\Rightarrow x + y = y \Rightarrow 2y = y \\ &\Rightarrow 2 = 1. \end{aligned}$$

4. (a) Si $a \in \mathbb{Q}$ y $b \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, ¿$a + b \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$?

   (b) Si $a, b \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, ¿$a + b \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$?

   (c) Si $a \in \mathbb{Q}$ y $b \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, ¿$ab \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$?

   (d) ¿Existe algún $a \in \mathbb{R}$ tal que $a^2 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ pero $a^4 \in \mathbb{Q}$?

5. Pruebe que $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{6}-\sqrt{2}-\sqrt{3})$, $\frac{\ln 2}{\ln 3} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

6. Probar que si $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, entonces $\sqrt[n]{n} \notin \mathbb{Q}$.

7. (a) Sea $n \in \mathbb{N}$, hallar todos los valores de n tales que

$$\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1} \in \mathbb{Q}.$$

   (b) Dados $a, b \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, ¿es posible que $a^b \in \mathbb{Q}$?

8. Un automóvil recorre el perímetro de un cuadrado de vértices A,B,C y D, con velocidad constante. Otro automóvil con la misma velocidad recorre la diagonal AC del cuadrado, realizando movimientos de ida y vuelta sobre esta última. Si en un instante dado, ambos automóviles coinciden en el punto A, probar que no es posible que se vuelvan a encontrar.

9. Hallar (argumentando su respuesta) el supremo e ínfimo (si existen) de los siguientes subconjuntos $\mathbb{R}$:

   a) $A = \{x : \ x = 0 \ o \ x = \frac{1}{n} \in \mathbb{N}\}$.

   b) $A = \{x : \ 0 \leq x < \sqrt{2}, \ x \in \mathbb{Q}\}$.

   c) $A = \{x \in \mathbb{R} : \ x < 0 \ y \ x^2 + x + 1 < 0\}$.

   d) $A = \{1 - \frac{(-1)^n}{n} \ , \in \mathbb{N}\}$.

   e) $A = \{\frac{1}{n} + (-1)^n \ , n \in \mathbb{N}\}$.

   f) $A = [0, 1)$.

   g) $A = \{x \in \mathbb{R} : \ 3x^2 - 10x + 3 < 0\}$.

   h) $A = \{x \in \mathbb{R} : \ (x - a)(x - b)(x - c) < 0, \ a < b < c\}$.

10. Si $a, b \in \mathbb{Q}$ con $a < b$. Probar que,

    a) $c = a + \frac{(b-a)}{2}\sqrt{2} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

    b) $a < c < b$.

11. Sean $x, y \in \mathbb{R}^+$ y $x \leq y$. Pruebe que,

$$x \leq \frac{2xy}{x+y} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \leq y.$$

12. Probar

    a) $[|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{2} \ y \ |y - y_0| < \frac{\varepsilon}{2}] \Rightarrow |(x + y) - (x_0 + y_0)| < \varepsilon$.

    b) $[|x-x_0| < \text{mín}(\frac{\varepsilon}{2(|y_0|+1)}, 1) \ y \ |y-y_0| < \frac{\varepsilon}{2(|x_0|+1)}] \Rightarrow |xy-x_0y_0| < \varepsilon$.

13. Sea $A \subset B$ y $A, B \subset \mathbb{R}$ no vacíos pruebe que:

$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B.$$

14. Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ no vacíos tales que para todo x en A y para todo y en B, entonces $x \leq y$. Pruebe que :

    a) $\sup A \leq \inf B$.

    b) $\sup A = \inf B \Leftrightarrow \ , \forall \varepsilon > 0, \ \exists x \in A, y \in B \ : \ y - x < \varepsilon$.

15. Sea $A \subset \mathbb{R}$ no vacío acotado. Sea $c > 0$ y $cA = \{cx : x \in A\}$.

    a) Pruebe que cA es acotado y que $\sup(cA) = c \sup A$ e $\inf(cA) = c \inf A$.

    b) Enuncie y demuestre un resultado análogo si $c < 0$.

16. Sea $A \subset \mathbb{R}$. Una función $f : A \to \mathbb{R}$ se llama acotada si $f(A)$ es acotado en $\mathbb{R}$. En este caso se define el supremo de f como

$$\sup f(A) = \sup_{x \in A} f(x).$$

    a) Pruebe que la suma y el producto de dos funciones acotadas es una función acotada.

    b) Pruebe que $(f+g)(A) \subset f(A) + g(A)$. Concluya que

$$\sup(f+g) \leq \sup f + \sup g \quad \text{e} \quad \inf(f+g) \geq \inf f + \inf g.$$

    c) Pruebe $(fg)(A) \in f(A)g(A)$.

    d) Pruebe que si f y g son positivas, entonces $\sup(fg) \leq \sup f \sup g$ e $\inf(fg) \geq \inf f \inf g$.

    e) Dar ejemplos donde se den las desigualdades estrictas.

    f) Pruebe que para toda función positiva f, $\sup(f^2) = (\sup f)^2$.

17. Sean $A, B \subset \mathbb{R}^+$. Definamos $AB = \{z = xy \; : x \in A, y \in B\}$. Demuestre que,

    a) A y B acotados $\Rightarrow$ AB acotado.

    b) $\sup(AB) = \sup(A)\sup(B)$ e $\inf(AB) = \inf(A)\inf(B)$.

18. Probar que todo conjunto finito no vacío $S \subset \mathbb{R}$ contiene su supremo y su ínfimo.

19. Probar que si un conjunto S contiene una de sus cotas superiores, entonces esta cota superior es el supremo de S.

20. Sea $I_n = [0, \frac{1}{n}], n \in \mathbb{N}$. Probar que si $x > 0$, entonces $x \notin \bigcap_1^{\infty} I_n$.

21. Sea $I_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}), n \in \mathbb{N}$. Probar que $\bigcap_{1}^{\infty} I_n = \{0\}$.

22. Pruebe que, si $a \in \mathbb{R}$ satisface que $0 \leq a \leq \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $a = 0$.

23. Un corte de Dedekind es un par ordenado (A, B), $A, B \subset \mathbb{Q}$ (A, B no vacíos) tales que A no posee elemento máximo, $A \cup B = \mathbb{Q}$ y dados $x \in A$, $y \in B$ arbitrarios se tiene que, $x < y$.

    a) Pruebe que para un corte de Dedekind (A, B) vale $\sup A = \sup B$.

    b) Sea $\Upsilon = \{(A, B)$: (A,B) es un corte de Dedekind$\}$. Pruebe que existe una biyección $f : \Upsilon \to \mathbb{R}$.

2.8. Algunas Sugerencias para la solución de los ejercicios

1. (b) Recuerde que, $0 = 0 + 0$.
   (c) Obsérvese que, $(-1)x + x = [(-1) + 1]x$.
   (e) Use la identidad $(x + y) + [-(x + y)] = 0$.
   (g) La identidad $x = 1x$ puede ser de gran ayuda.
   (i) Como $y, z \neq 0$, entonces existe $(yz)^{-1}$ tal que
   $$(yz)(yz)^{-1} = 1...$$
   (k) Use la identidad anterior y el hecho de que existen y^{-1} y z^{-1} tal que
   $$yy^{-1} = 1 \;\; y \;\; zz^{-1} = 1.$$
   (m) Pruebe que $(\frac{xy^{-1}}{w})z = \frac{xz}{yw}$.
   (o) Pruebe que $(-x)(-y) = xy$.

2. Proceda de manera similar a la prueba dada en el teorema 2.2.4.

3. El lector debería encontrar el fallo sin dificultad.

4. Para las partes (a) y (c) aplique el Método de Reducción al Absurdo.

5. $r = \frac{\ln 2}{\ln 3} \in \mathbb{Q} \;\; \Rightarrow \;\; \frac{m}{n} = \frac{\ln 2}{\ln 3} \;\; (m, n \in \mathbb{N}) \;\; \Rightarrow \;\; 2^m = 3^n$.
   Esto último es un absurdo.

6. Pruebe primero que: si $a_1 \ldots a_n \in \mathbb{Z}$ y $x_0 \in \mathbb{Q}$ satisface la ecuación $x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$, entonces $x_0 \in \mathbb{Z}$.
Luego, suponga que $r = \sqrt[n]{n} \in \mathbb{Q}$.

7. (i) Use el teorema 2.5.20.
(ii) El lector no debe tener problemas en esta parte.

8. Aplique el Método de Reducción al Absurdo.

9. (a) Verifique que $\sup A = 1$ e $\inf A = 0$.
(c) Un dibujo será de gran ayuda.
(e) Proceda de manera similar al ejemplo 2.5.6(3).
(g) Nótese que, la expresión $3x^2 - 10x + 3$ sólo puede ser negativa si $x \in (\frac{1}{3}, 3)$.

10. El lector debe resolverlo sin ningún problema.

11. Pruebe que

$$x \leq \frac{x+y}{2} \leq y \qquad x \leq \frac{2xy}{x+y} \leq y$$

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \qquad \frac{2xy}{x+y} \leq \sqrt{xy}.$$

12. Aplique las hipótesis.

13. Este ejercicio es una aplicación directa de las definiciones de ínfimo y supremo.

14. (a) Verifique que $x \leq \inf B$ para todo $x \in A$.
(b) Aplique el teorema 2.5.14.

15. Proceda de manera similar a la prueba dada en el teorema 2.5.16.

16. (a) Aplique las propiedades del valor absoluto.
(b) Tome $y \in (f+g)(A)$ y concluya que $y \in f(A) + g(A)$. Para probar las desigualdades aplique las definiciones, el ejercicio 14 y el teorema 2.5.16.
(c) Esta parte no es difícil de verificar.

(d) Proceda como en la parte (a) y aplique el ejercicio (16).
(e) Una de las funciones es,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{si } x \in (1,2] \end{cases}$$

(g) Nótese que, $\{f^2(x) : x \in A\} \subset \{f(x)f(y) : x, y \in A\}$.

17. (a) Esta parte es evidente de la definición de acotado.
(b) Utilice el teorema 2.5.14.

18. Use inducción.

19. Usar la nota 2.5.2(5).

20. Use el Método de Reducción al Absurdo y la propiedad Arquimediana de $\mathbb{R}$.

21. Nótese que,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, 0\right) \cup \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[0, \frac{1}{n}\right).$$

Pruebe que, $\bigcap_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{n}, 0) = \emptyset$ y $\bigcap_{n=1}^{\infty}[-\frac{1}{n}, 0) = \{0\}$.

22. Use el Método de Reducción al Absurdo.

23. (a) De la definición de corte de Dedekind concluya que existen $a = \sup(A)$ y $b = \inf(B)$. Use la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ para verificar que $a = b$.
(b) Defínase $f : \Upsilon \to \mathbb{R}$, mediante

$$f((A, B)) = \sup(A) = \inf(B).$$

Además, para $z \in \mathbb{R}$ sea

$$A_z = \{x \in \mathbb{Q} : x < z\}.$$

Pruebe que,

a) $(A_z, A_z^c) \in \Upsilon$, donde $A_z^c = \mathbb{Q} \backslash A_z$.

b) $z = \sup(A_z)$.

c) f es una biyección.

2.9. Ejercicios Varios

1. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo ordenado. Considérese las siguientes afirmaciones:

   a.- $\mathbb{K}$ es completo. $\quad$ α.- Todo $A \subset \mathbb{K}$ tiene supremo.

   b.- $\mathbb{K}$ es acotado $\quad$ β.- Todo $A(\neq \emptyset) \subset \mathbb{K}$ tiene supremo.

   c.- $\mathbb{K}$ es arquimediano $\quad$ γ.- , $\forall a(\in \mathbb{K}) > 0 \ \exists \in \mathbb{N} : (\frac{1}{1000})^n < a$.

   d.- $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ $\quad$ δ.- $\mathbb{Q} \subset \mathbb{K}$.

   En la tabla como la dibujada, colocar $\Rightarrow$ en el cuadro correspondiente si la afirmación señalada con la letra latina implica siempre la señalada con la letra griega. En caso contrario, colocar $\not\Rightarrow$.

	α	β	γ	δ
a				
b				
c				
d				

2. Buscar una condición necesaria y suficiente para que $\sup A = \inf A$, $A \subset \mathbb{R}$.

3. Hallar el supremo e ínfimo de los siguientes conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \ x^2 - 4 < 0\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} : \ x^2 - 4 > 0\}$$

$$C = \left\{x \in \mathbb{R}^+ : \ \text{sen}^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}\right\}$$

$$D = \left\{x \in \mathbb{R} : \ x \in Dom(f); \ f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\right\}.$$

4. Probar que si $\sqrt[n]{m} \notin \mathbb{N}$, entonces $\sqrt[n]{m} \notin \mathbb{Q}$ $n, m \in \mathbb{N}$.

5. Determine todos los números naturales que son suma de enteros consecutivos.

6. Pruebe que $\log 2 \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$.

"Hubo una vez un ingeniosísimo arquitecto que había concebido un método nuevo para edificar casas, empezando por el tejado y prosiguiendo hacia abajo hasta los cimientos". **Jonathan Swift**

"La topología puede ser considerada como una rama de la geometría. Como en geometría euclídea, se dan términos indefinidos, definiciones y axiomas; y, tomándolos como base, se prueban varios teoremas. Así ocurre con muchos tratados de topología, sólo que las definiciones y los axiomas son más abstractos que los empleados en la geometría". **Joaquín Navarro**

OBJETIVOS (Capítulo 3)

- Distinguir y clasificar los conjuntos de la recta con respecto a los diversos conceptos topológicos.
- Caracterizar los conjuntos de la recta de acuerdo con los conceptos topológicos.
- Aplicar los conceptos y resultados de la topología de la recta en la solución de problemas.

Capítulo 3

Topología de la Recta

Podemos decir que la topología, estudia las propiedades geométricas que se preservan a través de cualquier función biyectiva y bicontinua (esto es, la función y su inversa son continuas). Por ejemplo una esfera podemos deformarla sin corte ni ruptura y trasformarla en un vaso, pero nunca en una taza, pues esta última tiene una asa y para obtenerla necesitamos cortar la esfera.

Fue el famoso Matemático **Georg Cantor (1845-1918)** el creador de la topología de los conjuntos de puntos (o topología conjuntista) a él le debemos las nociones de conjuntos abiertos y cerrados, frontera, conjuntos densos y perfectos, etc, que aparecen en todos lo textos de Análisis Matemático.

Además de la topología conjuntista que estudiaremos existen otros tipos de topología, como la introducida por **Henri Poincaré (1854-1912)** a principios de siglo llamada topología Algebraica. Es necesario destacar que Matemáticos de la talla de **Leonard Euler (1707-1783), Friedrich Gauss (1777-1855)** y **Felix Klein (1707-1783)** ya habían estudiado temas relacionados con tal topología.

Otra topología fue introducida por el matemático norteamericano **Jonh Milnor** en 1960 llamada topología diferencial, siendo esta una de las más florecientes ramas de la Matemática actual.

Joaquín Navarro en [19] escribe:

"¿Qué es la topología?

Nuestra geometría es una geometría de tacto; son precisamente aquellos objetos geométricos, como ángulos o distancias, invariantes para el sentido del tacto, lo que configura la geometría que nos enseñan en la escuela. Si en lugar del tacto nos conformáramos con el menos preciso sentido de la vista, la geometría que cultivaríamos sería la geometría proyectiva, no la corriente. Ello se debería a que las distancias, por ejemplo, no son invariantes visuales: a 1 km un elefante abulta tanto como una mosca a 1 m. En cambio las proyecciones recortadas sobre el cielo, de un elefante y una mosca, sea cual sea la distancia, son perfectamente discernibles una de la otra. Son, pues, otra clase de características las de la geometría de la vista. Pero en el caso de la geometría ameboidea nos veríamos obligados a desechar casi todos los cánones geométricos habituales: ni la forma, ni la distancia, ni el ángulo ni nada parecido poseen significado alguno en el universo ameboideo. Pero todavía queda un rastro de coherencia en este universo: si una ameba se sitúa dentro de una esfera, no podrá salir. La esfera separa el universo en dos zonas disjuntas, dentro y fuera; es poco pero ya es algo. Hay más: supongamos que para éntretenerse en su encierro, la ameba se pone a dibujar sobre la esfera el mapa del mundo y a colorearlo de manera racional -es decir, sin que dos países contiguos tengan el mismo color-. Desde luego ignoramos cómo será el mapamundi de este extraño e ignoto universo, pero podemos afirmar que le bastará *con usar 5 colores sea como sea el mapa.* Y también que con 3 colores no tendrá bastante. De hecho en 1977 se probó que *4 es el número mínimo de colores necesarios* para colorear cualquier mapa de tal modo que dos países contiguos tengan siempre colores distintos.

Es evidente, pues, que la ameba aún puede predicar enunciados geométricos. Por ejemplo: "Toda superficie homeomorfa a una esfera separa al espacio en dentro y fuera" o "el número cromático de la esfera es 4". Sólo que no parecen pertenecer a la geometría; en matemática decimos que la geometría de la ameba es la topología."

El ejemplo más simple de una topología es el de métrica, esta última está asociada al concepto de distancia. Aun cuando es difícil de precisar quien introdujo el concepto de métrica, parece haber aparecido por vez primera en el año 1915 en un trabajo de **Maurice René Frechet (1878-1973).**

En este capítulo se introducirá una estructura nueva sobre el conjunto de los números reales llamada métrica la cual asociaremos con las estructuras algebraicas, de orden y completitud ya conocidas para $\mathbb{R}$.
En el capítulo 2 se estudiaron las estructuras algebraicas y de orden de $\mathbb{R}$. En el presente capítulo pretendemos estudiar una estructura nueva llamada topológica (o métrica) de $\mathbb{R}$. El estudio detallado de los conceptos de conjuntos abiertos, cerrados, compactos y conexos nos permitirán conocer la estructura topológica de $\mathbb{R}$, tales conceptos son básicos para el estudio de los próximos tópicos.

Observación En adelante todos los conjuntos a considerar son subconjuntos de $\mathbb{R}$, salvo que explícitamente se señale otro conjunto universo.

3.1. Conjuntos Abiertos

Definición **3.1.1.** *Sean $a \in \mathbb{R}$ y $\delta(\in \mathbb{R}) > 0$. Un* **entorno abierto** *de centro a y radio δ denotado por $E(a, \delta)$, se define como*

$$E(a, \delta) = \{x \in \mathbb{R} : \quad |x - a| < \delta\}.$$

Nota **3.1.2.**

Por el teorema 2.3.7(3) tenemos que:

$$|x - a| < \delta \qquad \Leftrightarrow \qquad x \in (a - \delta, a + \delta).$$

En consecuencia, $E(a, \delta) = (a - \delta, a + \delta)$. Es decir, un entorno abierto de centro a y radio δ es simplemente un intervalo abierto de centro a y radio δ.

3.1.3.

1. $E(0, 1) = (-1, 1)$.
2. $E(-1, 2) = (-3, 1)$.
3. $E(0, \frac{1}{n}) = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, $n \in \mathbb{N}$.

Definición **3.1.4.** *Sean $a \in \mathbb{R}$ y $\delta(\in \mathbb{R}) > 0$. Un* **entorno cerrado** *de centro a y radio δ denotado por $E[a, \delta]$, se define como*

$$E[a, \delta] = \{x \in \mathbb{R} : \quad |x - a| \leq \delta\}.$$

Nota **3.1.5.**

Claramente,

$$|x - a| \leq \delta \quad \Leftrightarrow \quad x \in [a - \delta, a + \delta].$$

En consecuencia, $E[a, \delta] = [a - \delta, a + \delta]$. Es decir, un entorno cerrado de centro a y radio δ es simplemente un intervalo cerrado de centro a y radio δ.

3.1.6.

1. $E[0, 1] = [-1, 1]$.
2. $E[-1, 2] = [-3, 1]$.
3. $E[0, \frac{1}{n}] = [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$, $n \in \mathbb{N}$.

Definición **3.1.7.** *Un punto $a \in A$ se llama* **punto interior** *de un conjunto A, si existe un entorno abierto $E(a, \delta)$ tal que $E(a, \delta) \subset A$.*
El **interior** *de un conjunto A denotado por $A°$ se define*

$$A° = \{a \in A : \quad a \quad es \quad punto \quad interior \quad de \quad A\}.$$

Nota **3.1.8.**

1. $a \in A° \quad \Leftrightarrow \quad \exists\ \delta > 0 : \quad (a - \delta, a + \delta) \subset A$. (Ver, Figura 1.1)
2. Como todo intervalo abierto es un conjunto infinito (no numerable)(ver corolario 2.6.6), entonces una condición necesaria (pero no suficiente) para que $A° \neq \emptyset$ es que A sea infinito no numerable. Así,
$$A° \neq \emptyset \Rightarrow \text{ que } A \text{ es no numerable.}$$
3. Claramente de la definición $A° \subset A$ para cualquier conjunto A.
4. Cuando $a \in A°$ se dice que A es una **vecindad** de a.
5. $A \subset B \quad \Rightarrow \quad A° \subset B°$. (Verificarlo)

6. Nótese que,

$$\begin{aligned} b \notin A^\circ &\Leftrightarrow \quad \forall \delta > 0: \quad (b-\delta, b+\delta) \not\subset A. \\ &\Leftrightarrow \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x_\delta \in (b-\delta, b+\delta): \ x_\delta \in \mathbb{R} \backslash A. \end{aligned}$$

(Ver, Figura 1.1)

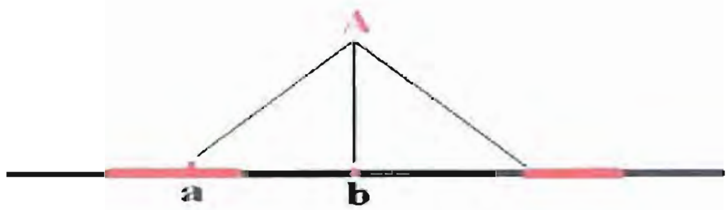

Figura 3.1: $a \in A^\circ$. $b \notin A^\circ$

3.1.9.

1. Sea $A = (a, b)$, entonces $A^\circ = (a, b)$.

   En efecto, sea $x \in (a, b)$, veamos que x es un punto interior para A. Como $a < x < b$, tomemos $\delta = \min\{b - x, x - a\} > 0$. Obsérvese que, $x + \delta < b$ y $x - \delta > a$, en consecuencia,

$$\begin{aligned} y \in (x-\delta, x+\delta) &\Rightarrow \quad x - \delta < y < x + \delta \\ &\Rightarrow \quad a < y < x \\ &\Rightarrow \quad y \in (a, b). \end{aligned}$$

   Así, $(x - \delta, x + \delta) \subset (a, b)$ y por lo tanto, $x \in A^\circ$. Como x es arbitrario en (a, b), concluimos que $(a, b)^\circ = (a, b)$.

2. Por la densidad de $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, se sigue que $\mathbb{Q}^\circ = (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})^\circ = \emptyset$.

3. Sea $A = [a, b)$, afirmamos que $a \notin A^\circ$ y $A^\circ = (a, b)$.

   En efecto, para todo $\delta > 0$ el entorno $(a - \delta, a + \delta) \not\subset [a, b)$, pues, si $a - \delta < a$, por argumento de densidad existe $x_\delta \in \mathbb{R} \backslash A$ tal que $a - \delta < x_\delta < a$. En consecuencia, existe $x_\delta \in (a - \delta, a + \delta)$ tal que $x_\delta \in \mathbb{R} \backslash A$. Así, a no es punto interior para $[a, b)$. Para ver que, $A^\circ = (a, b)$, se procede como en 1.

Definición **3.1.10.** *Un conjunto A se llama* **abierto** *si $A^\circ = A$. Es decir, A es abierto cuando todos sus puntos son puntos interiores.*

Nota **3.1.11.**

Como siempre se verifica que $A^\circ \subset A$ para cualquier conjunto A, entonces

$$A \text{ es abierto} \quad \Leftrightarrow \quad A \subset A^\circ.$$

3.1.12.

1. Claramente, $A = (a, b)$ es un conjunto abierto (ver ejemplo 3.1.9(1)) y así, todo entorno abierto es un conjunto abierto.

2. Los conjuntos $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ y $[a, b)$ no son conjuntos abiertos (ver ejemplos 3.1.9(2) y 3.1.9(3)).

3. El conjunto $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ no es un conjunto abierto, pues $A^\circ = \emptyset$, ya que A es numerable (ver nota 3.1.8(2)).

4. Si A es conjunto finito, entonces $A^\circ = \emptyset$. En consecuencia, ningún conjunto finito no vacío puede ser abierto. Igual sucede si A es infinito numerable.

Teorema **3.1.13.**

1. *$\emptyset$ y $\mathbb{R}$ son conjuntos abiertos.*

2. *Sean $A_1, A_2, \cdots, A_n$ conjuntos abiertos, entonces $A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ es un conjunto abierto.*

3. *Sean I un conjunto arbitrario de índices y $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una familia de conjuntos abiertos, entonces $A = \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$ es un conjunto abierto.*

Prueba:

1. Si $\emptyset$ no fuera abierto, existiría un punto $x \in \emptyset$ tal que x no es punto interior para $\emptyset$, lo cual es un absurdo. En consecuencia, $\emptyset$ es un conjunto abierto.
   Evidentemente, cada $x \in \mathbb{R}$ es punto interior para $\mathbb{R}$ (¿por qué?). Así, $\mathbb{R}$ es un conjunto abierto.

2. Sea $a \in A$. Probemos que a es punto interior para A.
   Como $a \in A_i$ y cada A_i es un conjunto abierto, entonces para cada $i = \overline{1,n}$, existe δ_i tal que
   $$E(a,\delta_i) \subset A_i. \tag{1}$$
   Consideremos, $\delta = \text{mín}\{\delta_i : 1 \le i \le n\}$. Entonces por (1), obtenemos que $E(a,\delta) \subset A$. Así, $a \in A^\circ$.

3. Si $a \in A$, entonces $a \in A_\alpha$ para algún $\alpha \in I$. Como A_α es abierto, existe $\delta > 0$ tal que
   $$E(a,\delta) \subset A_\alpha. \tag{2}$$
   En consecuencia, de (2) se sigue que $E(a,\delta) \subset A$ y así, $a \in A^\circ$. Por lo tanto, A es abierto.

∎

3.1.14.

Sea $A_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, $n \in \mathbb{N}$. Evidentemente, cada A_n es un conjunto abierto.

Afirmamos que si $x \neq 0$, entonces $x \notin A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

En efecto, supongamos que $x \in A$, es decir
$$x \in \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), \tag{3}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.
Por otro lado, $|x| \neq 0$, pues $x \neq 0$, entonces por la propiedad arquimediana de $\mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < |x|$. En consecuencia, $x < -\frac{1}{n}$ o $x > \frac{1}{n}$ y por lo tanto,

$$x \notin \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right). \tag{4}$$

Pero, (4) contradice a (3) y así, la afirmación es cierta.

Por la afirmación y el hecho de que $0 \in (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ para cada $n \in \mathbb{N}$, obtenemos que $A = \{0\}$. Claramente, A no es un conjunto abierto.

Nota **3.1.15.**

El ejemplo 3.1.14 muestra que en general la intersección arbitraria de conjuntos abiertos no da siempre un conjunto abierto.

3.2. Conjuntos Cerrados

Definición **3.2.1.** *Un punto $a \in \mathbb{R}$ se llama* **punto de clausura** *de un conjunto A cuando, para cada $\varepsilon > 0$ se tiene que, $E(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.*
La **clausura** *del conjunto A denotada por $\overline{A}$ se define como*

$$\overline{A} = \{a \in \mathbb{R} \quad a \text{ es punto de clausura de } A\}.$$

Nota **3.2.2.**

De la definición se sigue que,

1. Un punto de clausura de un conjunto A puede no estar en el conjunto A. (Ver, Figura 3.2)

2. $A \subset \overline{A}$ para cualquier conjunto A y así, $A \neq \emptyset$ implica que, $\overline{A} \neq \emptyset$.

3. $a \in \overline{A} \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \ x_\varepsilon \in A : \ |x_\varepsilon - a| < \varepsilon$.

4. $a \notin \overline{A} \Leftrightarrow \exists \, \varepsilon > 0 : \ E(a, \varepsilon) \cap A = \emptyset \Leftrightarrow \exists \, \varepsilon > 0 : \ \forall \, x \in A, \ |x - a| \geq \varepsilon$. (Ver, Figura 3.2)

5. $A \subset B \quad \Rightarrow \quad \overline{A} \subset \overline{B}$. (Probarlo)

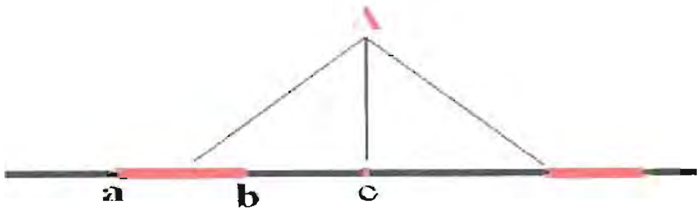

Figura 3.2: $a, b \in \overline{A}$, $c \notin \overline{A}$, $a \in \overline{A}$

3.2.3.

1. Claramente, $\overline{\emptyset} = \emptyset$ y $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$.

2. Sea $A = \{x\}$, entonces $\overline{A} = A$.

   En efecto, por la nota 3.2.2(2), basta probar que $\overline{A} \subset A$.
   Nótese que,

   $$a \in \overline{A} \quad \Rightarrow \quad (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap \{x\} \neq \emptyset \;\; \forall \varepsilon > 0 \quad \Rightarrow \quad a = x.$$

   Así, $\overline{A} \subset A$.

3. Sea $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Afirmamos que $0 \in \overline{A}$.

   En efecto, dado $\varepsilon > 0$ por la propiedad arquimediana de $\mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$. En consecuencia,

   $$-\varepsilon < 0 < \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad (-\varepsilon, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad 0 \in \overline{A}.$$

   Nótese que en este caso $0 \notin A$.

4. Veamos que $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

   En efecto, dados $a \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$, por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ se tiene que $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$ y así, $a \in \overline{\mathbb{Q}}$. Por lo tanto, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.
   De manera similar podemos probar que $\overline{\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Teorema **3.2.4.** *Si $a = \inf A$ y $b = \sup A$, entonces $a, b \in \overline{A}$.*

Prueba: Dado $\varepsilon > 0$, por el teorema 2.5.14, existen $x, y \in A$ tales que

$$b - \varepsilon < x \quad y \quad y < a + \varepsilon.$$

En consecuencia,

$$b - \varepsilon < x \leq b < b + \varepsilon \quad y \quad a - \varepsilon < a \leq y < a + \varepsilon.$$

Así,

$$(b - \varepsilon, b + \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \quad y \quad (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap A \neq \emptyset.$$

Por lo tanto; $a, b \in \overline{A}$. ∎

Definición **3.2.5.** *Un conjunto F en $\mathbb{R}$ se llama* **cerrado** *cuando $\overline{F} = F$. Es decir, un conjunto F es cerrado si todos sus puntos son puntos de clausura.*

Nota **3.2.6.**

A la luz de la nota 3.2.2(2), F es cerrado $\Leftrightarrow$ $\overline{F} \subset F$.

Teorema **3.2.7.** *F es cerrado $\Leftrightarrow$ $\mathbb{R} \backslash F$ es abierto .*

Prueba:
($\Rightarrow$) Supongamos que F es cerrado. Nótese que,

$$\begin{aligned} a \in \mathbb{R} \backslash F &\Rightarrow a \notin F = \overline{F} \\ &\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0 : (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap F = \emptyset \\ &\Rightarrow (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \backslash F \\ &\Rightarrow a \in (\mathbb{R} \backslash F)^{\circ}. \end{aligned}$$

Así, $\mathbb{R} \backslash F$ es un conjunto abierto .

($\Leftarrow$) Supongamos que $\mathbb{R} \backslash F$ es un conjunto abierto. Como,

$$\begin{aligned} a \in F &\Rightarrow a \notin \mathbb{R} \backslash F = (\mathbb{R} \backslash F)^{\circ} \\ &\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \ (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \not\subset (\mathbb{R} \backslash F) \\ &\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \ (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap F \neq \emptyset \\ &\Rightarrow a \in \overline{F}. \end{aligned}$$

Así, F es cerrado. ∎

3.2.8.

1. Todo entorno cerrado es un conjunto cerrado.

2. Si $F = \{x\}$, entonces por el ejemplo 3.2.3(2), F es un conjunto cerrado.

3. Los conjuntos $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ no son conjuntos cerrados. (Ver ejemplo 3.2.3(4))

4. Por el ejemplo 3.2.3(3), el conjunto $F = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ no es cerrado.

5. El conjunto $F = [a, b)$ no es cerrado en $\mathbb{R}$.

   En efecto, consideremos $\mathbb{R}\backslash F = (-\infty, a) \cup [b, \infty)$.
   Sea $\varepsilon > 0$. Si $b - \varepsilon \leq a$, entonces $b - \varepsilon \leq a < \frac{a+b}{2} < b < b + \varepsilon$. En consecuencia, $(b - \varepsilon, b + \varepsilon) \cap [a, b) \neq \emptyset$.
   Si $b - \varepsilon > a$, entonces por un argumento de densidad existe r_ε tal que $a < b - \varepsilon < r_\varepsilon < b < b + \varepsilon$. Así, $(b - \varepsilon, b + \varepsilon) \cap [a, b) \neq \emptyset$.
   Por lo tanto, $b \notin (\mathbb{R}\backslash F)^\circ$. De esta manera, podemos concluir que $\mathbb{R}\backslash F$ no es abierto y así, F no es cerrado.

Teorema **3.2.9.**

1. *Los conjuntos $\emptyset$ y $\mathbb{R}$ son conjuntos cerrados.*

2. *Sean $F_1, F_2, \cdots, F_n$ conjuntos cerrados, entonces $F = \bigcup_{i=1}^{n} F_i$ es un conjunto cerrado.*

3. *Sean I un conjunto arbitrario de índices y $\{F_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de conjuntos cerrados, entonces $F = \bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha$ es un conjunto cerrado.*

Prueba: Que $\emptyset$ y $\mathbb{R}$ son conjuntos cerrados es consecuencia del teorema 3.1.13. Para ver 2 y 3 basta aplicar los teoremas 3.2.7 y 3.1.13 Además, el hecho de que

$$\mathbb{R}\backslash F = \bigcap_{n=1}^{n} (\mathbb{R}\backslash F_n) \quad y \quad \mathbb{R}\backslash F = \bigcup_{\alpha \in I} (\mathbb{R}\backslash F_\alpha).$$

∎

Nota **3.2.10.**

Claramente, $\mathbb{Q} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{r\}$. Ahora, cada conjunto $\{r\}$ es cerrado (ver el ejemplo 3.2.8(2)) y el conjunto $\mathbb{Q}$ no es cerrado. Así, la unión arbitraria de conjuntos cerrados no da siempre un conjunto cerrado.

3.3. Conjuntos Densos y Numerables

Teorema **3.3.1.**

1. *La clausura de un conjunto es un conjunto cerrado.*
2. *A es denso en $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $\overline{A} = \mathbb{R}$.*

Prueba:

1. Sea A un conjunto arbitrario. Veamos que $\mathbb{R} \backslash \overline{A}$ es abierto.
   Ahora, para $a \notin \overline{A}$, existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que
   $$E(a, \varepsilon_1) \cap A = \emptyset. \tag{5}$$
   Afirmamos que $E(a, \varepsilon_1) \cap \overline{A} = \emptyset$.

   En efecto, supongamos que existe $x \in \overline{A}$ tal que $x \in E(a, \varepsilon_1)$. Como $E(a, \varepsilon_1)$ es un conjunto abierto que contiene a x, entonces existirá $\varepsilon_2 > 0$ tal que
   $$E(x, \varepsilon_2) \subset E(a, \varepsilon_1). \tag{6}$$
   Por otro lado, como $x \in \overline{A}$, entonces para ε_2 se tiene que
   $$E(x, \varepsilon_2) \cap A \neq \emptyset. \tag{7}$$
   Luego, de (6) y (7) se sigue que, $E(a, \varepsilon_1) \cap A \neq \emptyset$, pero esto contradice (5). Así, lo afirmado es cierto.

   Ahora, por lo afirmado $E(a, \varepsilon_1) \backslash \overline{A}$ y por lo tanto, $a \in (\mathbb{R} \backslash \overline{A})^{\circ}$. En consecuencia, $\mathbb{R} \backslash \overline{A}$ es un conjunto abierto.

2. ($\Rightarrow$) Supongamos que A es denso en $\mathbb{R}$. Queremos probar que $\mathbb{R} \subset \overline{A}$. Si $\mathbb{R} \not\subset \overline{A}$, entonces existe un $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \notin \overline{A}$. En consecuencia existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap A = \emptyset$ en contradicción con la hipótesis. Así, $\mathbb{R} \subset \overline{A}$.

   ($\Leftarrow$) Supongamos que $\mathbb{R} = \overline{A}$. Probemos que A es denso en $\mathbb{R}$. Sea I un intervalo abierto en $\mathbb{R}$. Si $x \in I$, entonces por la hipótesis $x \in \overline{A}$, en consecuencia, $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ para todo $\varepsilon > 0$. Como todo intervalo abierto I que contenga a x debe contener un intervalo de la forma $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ (por definición de conjunto abierto), se sigue que $I \cap A \neq \emptyset$. Así, A es denso en $\mathbb{R}$.

Definición **3.3.2.** *Sean X, Y conjuntos no vacíos tales que $X \subset Y$. Diremos que X es denso en Y si $Y \subset \overline{X}$.*

Teorema **3.3.3.** *Todo conjunto Y contiene un subconjunto numerable y denso en Y.*

Prueba: Dado que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, entonces fijado $x \in Y$, existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $|x-r| < \frac{1}{n}$ (para ver esto, fije $\varepsilon = \frac{1}{n}$ y use el hecho de que $x \in \overline{\mathbb{Q}}$). Definamos

$$T_n = \left\{ r \in \mathbb{Q} : \ \exists\, x \in Y, \ |x-r| < \frac{1}{n} \right\}.$$

Evidentemente, T_n es numerable.
Ahora, para cada $r \in T_n$, fijemos $x_r \in Y$ tal que $|x_r - r| < \frac{1}{n}$. Consideremos,

$$X_n = \{x_n \in Y : \ r \in T_n\},$$

también X_n es numerable. Tomando $X = \cup_{n=1}^{\infty} X_n$, se sigue que X es numerable y $X \subset Y$. Probemos que $Y \subset \overline{X}$.
Sean $x \in Y$ y $\varepsilon > 0$. Entonces, por la propiedad arquimediana $\mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{2}{n} < \varepsilon$. De nuevo por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $|x-r| < \frac{1}{n}$ en consecuencia, $r \in T_n$ (y $x_r \in X_n$) y así,

$$|x - x_r| \leq |x-r| + |r - x_r| < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n} < \varepsilon. \tag{8}$$

Como $x_r \in X_n \subset X$, se sigue de (8) que, $x \in \overline{X}$.
Esto completa la prueba del teorema. ∎

Nota **3.3.4.**

Un conjunto Y que contenga un subconjunto denso numerable se llama **separable**. Evidentemente, $\mathbb{R}$ es separable y por el teorema 3.3.3 todo subconjunto de $\mathbb{R}$ es separable.

3.4. Puntos de Acumulación y Conjunto Derivado

Definición **3.4.1.** *Un punto $a \in \mathbb{R}$ se llama* **punto de acumulación** *de un conjunto A cuando, para cada $\varepsilon > 0$ se tiene que $E(a,\varepsilon) \cap (A \backslash \{a\}) \neq \emptyset$. El* **derivado** *del conjunto A denotado por A' se define como*

$$A' = \{a \in \mathbb{R}, \quad a \ \text{ es punto de acumulación de } \ A\}.$$

Nota **3.4.2.**

De la definición se sigue que

1. Un punto de acumulación de un conjunto A puede no estar en el conjunto A. (Ver, Figura 3.3)
2. $A' \subset \overline{A}$ para cualquier conjunto A.
3. $a \in A' \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \, x_\varepsilon \in A, \ x_\varepsilon \neq a : \ |x_\varepsilon - a| < \varepsilon.$
4. $a \notin A' \quad \Leftrightarrow \quad \exists \, \varepsilon > 0 : \quad E(a,\varepsilon) \cap A = \{a\}$. (Ver Figura 1.2)
5. $A \subset B \quad \Rightarrow \quad A' \subset B'$. (Probarlo)

3.4.3.

1. Claramente, $\emptyset' = \emptyset$ y $\mathbb{R}' = \mathbb{R}$.
2. Sea $A = \{x\}$, entonces $A' = \emptyset$.

   En efecto, dado $a \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$, entonces

$$(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap (\{x\} \backslash \{a\}) = \emptyset.$$

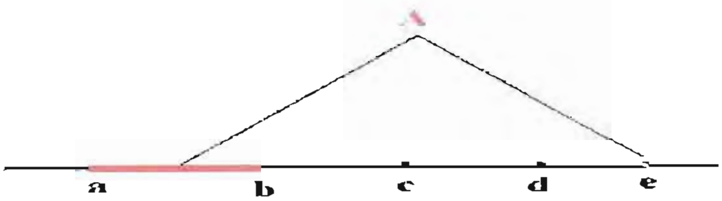

Figura 3.3: $a, b \in A'$, $c, d, e \notin A'$

3. Sea $A = \{\frac{1}{n} : \in \mathbb{N}\}$. Entonces $0 \in A'$. La prueba de esto es similar a la dada en el ejemplo 3.2.3(3).

4. Por un argumento de densidad se sigue que $\mathbb{Q}' = (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})' = \mathbb{R}$.

Teorema 3.4.4.

1. $a \in A' \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0$ *el conjunto* $A_\varepsilon = E(a, \varepsilon) \cap A$ *es infinito.*

2. $\overline{A} = A \cup A'$.

3. A *es cerrado* $\quad \Leftrightarrow \quad A' \subset A$.

4. *Si* $A' \cap A = \emptyset$, *entonces* A *es un conjunto numerable.*

5. A' *es un conjunto cerrado.*

Prueba:

1. $(\Leftarrow)$ Por la hipótesis es evidente que $a \in A'$.

   $(\Rightarrow)$ Supongamos que $a \in A'$. Probemos que A_ε es un conjunto infinito para cada $\varepsilon > 0$.
   Como $a \in A'$, entonces para $\varepsilon_1 = 1$, existe $x_1 \in A$, $x_1 \neq a$ tal que $|x_1 - a| < 1$.
   Ahora, para $\varepsilon_2 = \min\{|x_1 - a|, \frac{1}{2}\}$, existe $x_2 \in A$, $x_2 \neq a$ tal que $|x_2 - a| < \varepsilon_2$ (evidentemente $x_2 \neq x_1$).
   Procediendo inductivamente, supongamos que hemos obtenido $x_1, x_2, \cdots, x_n$, diferentes dos a dos tales que

$$x_i \neq a \quad y \quad |x_i - a| < \varepsilon_i = \min\left\{|x_{i-1} - a|, \frac{1}{i}\right\}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Sea $\varepsilon_{n+1} = \text{mín}\{|x_n - a|, \frac{1}{n+1}\}$, entonces existe $x_{n+1}(\neq a) \in A$ tal que $|x_{n+1} - a| < \varepsilon_{n+1}$ y así, $x_{n+1} \neq x_i \quad 1 \leq i \leq n$. En consecuencia, para cada $n \in \mathbb{N}$ hemos encontrado un conjunto $F = \{x_n : \ n \in \mathbb{N}\} \subset A$ infinito (pues, los elementos de F son distintos dos a dos) tales que $|x_n - a| < \frac{1}{n}$ y así, $F \subset E(a, \varepsilon) \cap A$. Por lo tanto A_ε es un conjunto infinito, para cada $\varepsilon > 0$.

2. Como $A \subset \overline{A}$ y $A' \subset \overline{A}$, entonces $A \cup A' \subset \overline{A}$.
Ahora,

$$a \in \overline{A} \quad \Rightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists + x_\varepsilon \in A : \ |x_\varepsilon - a| < \varepsilon. \tag{9}$$

Si $x_\varepsilon = a$, entonces $a \in A$ y así, $a \in A \cup A'$.
Si $x_\varepsilon \neq a$, entonces por (9) $\ a \in A'$ y así, $\ a \in A \cup A'$. En consecuencia, $\overline{A} \subset A \cup A'$. Por lo tanto, hemos probado que $\overline{A} = A \cup A'$

3. Para probar 3, basta aplicar 2 y la definición de conjunto cerrado.

4. Por el teorema 3.3.3 existe $E \subset A$ tal que E es numerable y $A \subset \overline{E}$.
Ahora, si $x \in A$, entonces $x \in \overline{E}$, pero $x \notin E'$ (pues al contrario, si $x \in E'$ como $E' \subset A'$, entonces $x \in A'$, en contradicción con la hipótesis).
Por otro lado, por 2, $\overline{E} = E \cup E'$ y así, $x \in E$. En consecuencia, $A \subset E$ y en conclusión, $A = E$, por lo que A es numerable.

5. Para esta parte, basta probar que, $\mathbb{R} \backslash A'$ es un conjunto abierto. Tómese, $a \notin A'$ y procédase como en la prueba de 1 del teorema 3.3.1(1).

∎

Teorema **3.4.5. (Bolzano-Weierstrass)**
Todo subconjunto infinito y acotado A de números reales tiene al menos un punto de acumulación.

Prueba: Definamos $X = \{a \in \mathbb{R} : \ A \cap (a, \infty) \ es \ \ infinito\}$. Como A es infinito, entonces $X \neq \emptyset$ y además X está acotado superiormente, pues A está acotado. Luego, existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $A \subset [\alpha, \beta]$. Así, β es una cota superior para X. En consecuencia, por el Axioma Fundamental del Análisis, existe $c = \sup X$.
Afirmación. $c \in A'$.

En efecto, dado $\varepsilon > 0$ por el teorema 2.5.14, existe $x \in X$ tal que $c - \varepsilon < x \leq c < c + \varepsilon$.
Por otro lado, como $x \in X$, entonces $A \cap (x, \infty)$ es infinito y en consecuencia, $A \cap (c - \varepsilon, \infty)$ es infinito, pues $(c - \varepsilon, \infty) \supset (x, \infty)$.
Ahora, como $c = \sup X$, entonces $A \cap (c + \varepsilon, \infty)$ es finito. Luego, para cada $\varepsilon > 0$ tenemos que $A \cap (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ es infinito y por el teorema 3.4.4(1) concluimos que $c \in A'$.
Por la afirmación, el teorema queda probado. ∎

Nota **3.4.6.**

Del teorema 3.4.4(1) se sigue que,

$$A \ \textit{finito} \quad \Rightarrow \quad A' = \emptyset.$$

Definición **3.4.7.** *Un punto $c \in A$ que no es punto de acumulación de A se llama* **punto aislado** *de A. (Ver Figura 3.3)*

Nota **3.4.8.**

1. De la definición se sigue que,

$$c \ \textit{es punto aislado de} \ A \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, \varepsilon > 0 : \ (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \cap A = \{c\}.$$

2. Un conjunto A en el que cada uno de sus puntos es un punto aislado se llama **discreto**.

3. Por el teorema 3.3.4(4) concluimos que todo conjunto discreto es numerable. ¿Es cierto el recíproco?

3.4.9.

1. Es conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ es discreto.

   En efecto, dado $n \in \mathbb{N}$ veamos que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$(n - \varepsilon, n + \varepsilon) \cap \mathbb{N} = \{n\}.$$

   Para ver esto, basta tomar $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

2. Sea $A = \{\frac{1}{n} : \in \mathbb{N}\}$. Entonces A es un conjunto discreto.

   En efecto, dado $\frac{1}{n} \in A$, tomemos $\varepsilon = \frac{1}{n(n+1)}$. Se puede probar (hacerlo) que,

$$\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n(n+1)}, \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n+1)}\right) \cap A = \left(\frac{1}{n+1}, \frac{n+2}{n(n+1)}\right) \cap A = \left\{\frac{1}{n}\right\}.$$

Definición **3.4.10.** *Un punto $a \in \mathbb{R}$ se llama de* **acumulación a la derecha** *de un conjunto A, cuando para cada $\varepsilon > 0$ se verifica que, $(a, a+\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. De modo análogo un punto $a \in \mathbb{R}$ se llama de* **acumulación a la izquierda** *de un conjunto A, cuando para cada $\varepsilon > 0$ se verifica que, $(a-\varepsilon, a) \cap A \neq \emptyset$. Usaremos la notación A'_+ y A'_-, para indicar*

$$A'_+ = \{a \in \mathbb{R} : \ a \text{ es punto de acumulación a la derecha de } A\} \quad y$$

$$A'_- = \{a \in \mathbb{R} : \ a \text{ es punto de acumulación a la izquierda de } A\}.$$

3.4.11.

1. Para $A = \{\frac{1}{n} : \in \mathbb{N}\}$ es claro que $0 \in A'_+$, pero $0 \notin A'_-$.
2. Para $A = [a, b)$ se tiene que $a \in A'_+$ y $b \in A'_-$.

3.5. Conjunto Frontera

Definición **3.5.1.** *La* **frontera** *de un conjunto A denotada por ∂A se define como* $\partial A = \overline{A} \cap \overline{(\mathbb{R} \backslash A)}$.

Nota **3.5.2.**

1. De la definición se deduce que, ∂A es un conjunto cerrado.
2. Se sigue de la definición que

$$a \in \partial A \quad \Leftrightarrow \quad [E(a,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset \quad y \quad E(a,\varepsilon) \cap (\mathbb{R} \backslash A) \neq \emptyset], \quad \forall \varepsilon > 0.$$

3.5.3.

1. Sea $A = [a, b]$, entonces como $\overline{A} = [a, b]$ y $\overline{(\mathbb{R}\setminus A)} = (-\infty, a] \cup [b, \infty)$, luego, $\partial A = \{a, b\}$.

2. Si $A = \emptyset$, entonces $\partial A = \emptyset$ y si $A = \mathbb{R}$, entonces $\partial A = \emptyset$.

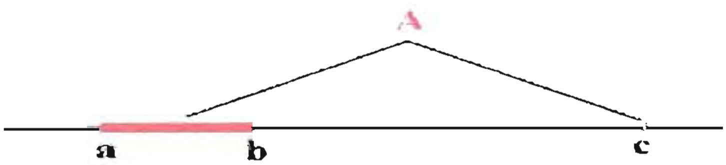

Figura 3.4: $a, b, c \in \partial A$

Teorema 3.5.4. *Para cualquier conjunto A se verifica:*

1. $A^\circ \cap \partial A = \emptyset$.

2. $A^\circ \cup \partial A = \overline{A}$.

3. *A es cerrado* $\Leftrightarrow$ $\partial A \subset A$.

4. *A es abierto* $\Leftrightarrow$ $A \cap \partial A = \emptyset$.

Prueba:

1. Que $A^\circ \cap \partial A = \emptyset$ se sigue inmediatamente de la definición.

2. Como $A^\circ \subset A \subset \overline{A}$ y $\partial A \subset \overline{A}$, entonces $A^\circ \cup \partial A \subset \overline{A}$.

   Para ver que $A^\circ \cup \partial A \supset \overline{A}$, supongamos que existe $a \in \overline{A}$ tal que $a \notin A^\circ \cup \partial A$ ($\Rightarrow$ $a \notin A^\circ$ y $a \notin \partial A$).
   Si $a \notin \partial A = \overline{A} \cap \overline{(\mathbb{R}\setminus A)}$, entonces como $a \in \overline{A}$ sólo puede suceder que $a \notin \overline{(\mathbb{R}\setminus A)}$. En consecuencia, existe $\varepsilon > 0$ tal que $E(a, \varepsilon) \cap (\mathbb{R}\setminus A) = \emptyset$. Es decir, existe $\varepsilon > 0$ tal que $E(a, \varepsilon) \subset A$, pero esto contradice el hecho de que $a \notin A^\circ$. Así, $A^\circ \cup \partial A \supset \overline{A}$ y por lo tanto $A^\circ \cup \partial A = \overline{A}$.

3. $(\Rightarrow)$ Supongamos que, A es un conjunto cerrado. Nótese que,

$$A \text{ cerrado} \quad \Rightarrow \quad A = \overline{A} \quad \Rightarrow \quad \partial A = A \cap \overline{(\mathbb{R} \backslash A)} \subset A.$$

$(\Leftarrow)$ Supongamos que $\partial A \subset A$ y probemos que A es cerrado.
Si $a \in \overline{A}$, pero $a \notin A$, entonces $a \in \overline{A}$ y $a \in \mathbb{R}\backslash A$. Luego, $a \in \overline{A}$ y $a \in \overline{(\mathbb{R}\backslash A)}$. En consecuencia, $a \in \partial A$ y por la hipótesis, se sigue que $a \in A$, en contradicción con el supuesto. Así, $\overline{A} \subset A$ y por lo tanto, A es cerrado.

4. $(\Rightarrow)$ Supongamos que, A es un conjunto abierto y probemos que $A \cap \partial A = \emptyset$.
Como A es abierto, entonces $\overline{(\mathbb{R}\backslash A)} = (\mathbb{R}\backslash A)$. En consecuencia, $\partial A = \overline{A} \cap (\mathbb{R}\backslash A)$ y así, $A \cap \partial A = \overline{A} \cap (\mathbb{R}\backslash A) \cap A = \emptyset$.

$(\Leftarrow)$ Supongamos que $A \cap \partial A = \emptyset$ y probemos que A es un conjunto abierto.
Usando que; $A \subset \overline{A}$, 2, la hipótesis y que $A^\circ \subset A$, obtenemos que,

$$A = \overline{A} \cap A = (A^\circ \cap \partial A) \cap A = (A^\circ \cap A) \cup (\partial A \cap A) = A^\circ \cap A = A^\circ.$$

Así, A es abierto.

∎

Corolario 3.5.5.

1. *A es abierto y cerrado a la vez* $\Leftrightarrow$ $\partial A = \emptyset$.
2. *Los conjuntos $\emptyset$ y $\mathbb{R}$ son los únicos conjuntos abiertos y cerrados a la vez, si y sólo si $\partial A = \emptyset$, entonces $A = \emptyset$ o $A = \mathbb{R}$.*

Prueba:

1. $(\Rightarrow)$ Supongamos que, A es abierto y cerrado a la vez. Probemos que $\partial A = \emptyset$.
Por el teorema 3.5.4(3) y 3.5.(4), $\partial A \subset A$ y $\partial A \cap A = \emptyset$. En consecuencia, $\partial A = \partial A \cap A = \emptyset$.

$(\Leftarrow)$ Supongamos que, $\partial A = \emptyset$. Probemos que A es abierto y cerrado a la vez.
Si $\partial A = \emptyset$, entonces $\partial A \cap A = \emptyset$ y $\partial A \subset A$ y por el teorema 3.5.4, A es abierto y cerrado a la vez.

2. ($\Rightarrow$) Supongamos que, $\emptyset$ y $\mathbb{R}$ son los únicos abiertos y cerrados a la vez y que $\partial A = \emptyset$. Probemos que $A = \emptyset$ o $A = \mathbb{R}$.
   Como $\partial A = \emptyset$, entonces por 1, A es abierto y cerrado a la vez. En consecuencia, por la hipótesis $A = \emptyset$ o $A = \mathbb{R}$.

   ($\Leftarrow$) Supongamos que, $\partial A = \emptyset$ implica $A = \emptyset$ o $A = \mathbb{R}$. Probemos que los únicos conjuntos abiertos y cerrados a la vez son $\emptyset$ y $\mathbb{R}$.
   Sea A un conjunto abierto y cerrado al vez, entonces por 1, $\partial A = \emptyset$. En consecuencia, por la hipótesis $A = \emptyset$ o $A = \mathbb{R}$.

3.6. Conjuntos Compactos

Definición **3.6.1.** *Un* **cubrimiento** *para un conjunto K es una familia $\Im = \{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ (I es un conjunto arbitrario de índices) de conjuntos G_α tales que $K \subset \cup_{\alpha\in I} G_\alpha$.*
Una subfamilia $\Im_0 = \{G_\alpha\}_{\alpha\in J\subset I}$, se llama un **subcubrimiento** *de $\Im$ para un conjunto K si $K \subset \cup_{\alpha\in J} G_\alpha$.*
Un cubrimiento $\Im = \{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ de un conjunto K, admite un **subcubrimiento finito**, *si existen $\alpha_1, \cdots \alpha_n \in I$ tal que $K \subset \cup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}$.*
Una familia $\Im = \{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ se llama **cubrimiento abierto** *para un conjunto K si cada G_α es un conjunto abierto.*

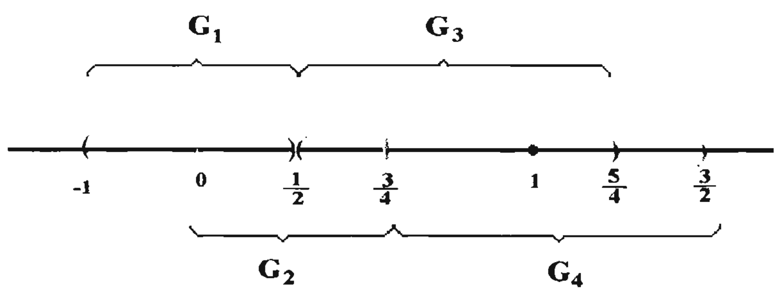

Figura 3.5: Un cubrimiento para el Intervalo $[0, 1]$

3.6.2.

1. Para $K = [0, 1]$, la familia $\Im = \{G_1, G_2, G_3, G_4\}$ donde

$$G_1 = (-1, \tfrac{1}{2}), \quad G_2 = (0, \tfrac{3}{4}), \quad G_3 = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{5}{4}), \quad G_4 = [\tfrac{3}{4}, \tfrac{3}{2}),$$

es un cubrimiento para K, pues $[0,1] \subset \bigcup_{i \in I} G_i = (-1, \frac{3}{2})$, donde $I = \{1,2,3,4\}$.
Nótese que, si tomamos $J = \{1,2,3\} \subset I$, entonces la subfamilia $\Im_0 = \{G_1, G_2, G_3\}$ es un subcubrimiento para K, pues

$$[0,1] \subset \bigcup_{i \in J} G_i = (-1, \tfrac{5}{4}). \quad \text{(Ver, Figura 3.5)}$$

2. Para el conjunto $K = (0,1]$, la familia formada por los conjuntos $G_n = (\frac{1}{n}, \frac{3}{2})$, $n \in \mathbb{N}$ es un cubrimiento abierto para K, pues $(0,1] \subset \cup_{n \in \mathbb{N}} G_n$ (verificarlo).
Pero, $\Im = \{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ no admite subcubrimiento finito, pues al contrario, como $G_{n+1} \subset G_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces cualquier reunión finita de los G_n dará el conjunto G_n de mayor índice y $(0,1]$ no puede estar contenido en ese conjunto.

3. Para $K = \mathbb{R}$, la familia $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dada por $G_n = (-n, n)$, es un cubrimiento abierto para $\mathbb{R}$, es decir $\mathbb{R} = \cup_{n \in \mathbb{N}} (-n, n)$.

   En efecto, dado $x \in \mathbb{R}$, si $x = 0$, entonces basta tomar $n \in \mathbb{N}$ y $x \in (-n, n)$.
   Si $x > 0$, por la propiedad arquimediana de $\mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $-n < n - 1 \leq x < n$, en consecuencia, $x \in (-n, n)$.
   Si $x < 0$, entonces $-x > 0$ y se aplica el caso anterior. En cualquier caso, $R \subset \cup_{n \in \mathbb{N}} (-n, n)$ y así, $\mathbb{R} = \cup_{n \in \mathbb{N}} (-n, n)$.
   Procediendo como en 2, podemos concluir que el cubrimiento $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dada por $G_n = (-n, n)$ no admite subcubrimiento finito.

4. Si $K = \{\frac{1}{n} : \in \mathbb{N}\}$, entonces K es discreto (ver ejemplo 3.4.9(2)). En consecuencia, para cada $x \in K$, existe un entorno abierto $E(x, r_x)$ tal que $E(x, r_x) \cap K = \{x\}$.
Ahora, la familia $\Im = \{E(x, r_x)\}_{x \in K}$ es un cubrimiento abierto para K. Además, $\Im$ no admite subcubrimiento finito (propio), pues si $x \neq y$ en K entonces $E(x, r_x) \cap E(y, r_y) = \emptyset$ (recuerde que x, y son puntos aislados de K). Así, podemos concluir que $\Im$ no admite subcubrimiento finito.

Teorema **3.6.3. (Borel-Lebesgue)**
Sea $[a,b]$ *un intervalo cerrado y acotado. Entonces cada cubrimiento abierto para* $[a,b]$ *admite un subcubrimiento finito.*

Prueba: Sea $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ un cubrimiento abierto para $[a,b]$. Es decir, $[a,b] \subset \cup_{\alpha\in I} G_\alpha$. Así, para cada $x \in [a,b]$ existe $\alpha \in I$ tal que $x \in G_\alpha$. Definamos

$$X = \{x \in [a,b] : \exists\ \alpha_1, \cdots, \alpha_n : \quad [a,x] \subset \cup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}\}.$$

Claramente, $X \neq \emptyset$ $(a \in X)$ y como $X \subset [a,b]$, entonces X está acotado en $\mathbb{R}$. Luego, por el Axioma Fundamental del Análisis, existe $c = \sup X$. Además, $a \leq c \leq b$.

Afirmación 1. $c \in X$.

En efecto, como $c \in [a,b] \subset \cup_{\alpha\in I} G_\alpha$, entonces existe $\alpha_0 \in I$ tal que $c \in G_{\alpha_0}$. Ahora, como G_{α_0} es un conjunto abierto, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$(c - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset G_{\alpha_0}. \tag{10}$$

Por otro lado, $c - \varepsilon < c = \sup X$, entonces existe $x \in X$ tal que

$$c - \varepsilon < x \leq c < c + \varepsilon. \tag{11}$$

En consecuencia, por (10) y (11) tenemos que

$$[x, c] \subset G_{\alpha_0}. \tag{12}$$

Por otro lado, como $x \in X$, entonces existen $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ tales que

$$[a, x] \subset \cup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}. \tag{13}$$

Así, por (12) y (13) se sigue que

$$[a, c] = [a, x] \cup [x, c] \subset \cup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i} \cup G_{\alpha_0}.$$

Por lo tanto, $c \in X$.

Afirmación 2. $c = b$.

En efecto, supongamos que $c < b$. Entonces procediendo como en la prueba de la afirmación 1, tomando $\varepsilon > 0$ tal que $c + \varepsilon < b$ y así, concluimos que existe un $x \in X$ tal que $c < x < c + \varepsilon$, pero esto contradice el hecho de que $c = \sup X$. Así, $c = b$.

En consecuencia, por las afirmaciones 1 y 2, el teorema queda completamente demostrado. ∎

Teorema **3.6.4.** **(Versión General del Teorema de Borel-Lebesgue)** *Dado un conjunto F cerrado y acotado. Entonces todo cubrimiento abierto para F admite un subcubrimiento finito.*

Prueba: Sea $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ un cubrimiento abierto para F, es decir, $F \subset \cup_{\alpha\in I} G_\alpha$. Como F está acotado, entonces existen $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $F \subset [a, b]$. Además, F cerrado, implica que $G = \mathbb{R}\backslash F$ es abierto, en consecuencia, $[a, b] \subset \cup_{\alpha\in I} G_\alpha \cup G$. Luego, por el teorema 3.6.3 existen $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in I$ tales que $[a, b] \subset \cup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i} \cup G$.
Ahora, como $F \subset [a, b]$ y $F \cap G = \emptyset$, concluimos que $F \subset \cup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}$. Así, el teorema queda probado. ∎

Teorema **3.6.5.** *Sea K. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. *K es cerrado y acotado en $\mathbb{R}$.*
2. *Todo cubrimiento abierto de K admite un subcubrimiento finito.*
3. *Todo subconjunto infinito de K posee al menos un punto de acumulación en K.*

Prueba:
(1) $\Rightarrow$ (2) Esto es la versión general del teorema de Borel-Lebesgue.

(2) $\Rightarrow$ (3) Sea K_0 un subconjunto infinito de K, queremos probar que existe $x \in K$ tal que $x \in K_0'$.
Supongamos que $K_0' = \emptyset$ en K. Es decir ningún punto $x \in K$ es tal que $x \in K_0'$. En consecuencia, para cada $x \in K$, existe $r_x > 0$ tal que

$$E(x, r_x) \cap K = \{x\}. \tag{14}$$

Ahora, la familia $\{E(x, r_x)\}_{x\in K}$ es un cubrimiento abierto para K y por la hipótesis 2, existen $x_1, \cdots, x_n \in K$ tal que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} E(x_i, r_{x_i}). \tag{15}$$

De esta manera, por (14) y (15) obtenemos que

$$K_0 = K_0 \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} E(x_i, r_{x_i}) \right) = \bigcup_{i=1}^{n} E(x_i, r_{x_i}) \cap K_0 = \{x_1, \cdots, x_n\}.$$

Por lo tanto, K_0 sería un conjunto finito lo que contradice el hecho de que K_0 es infinito. Así, 3 es cierto.

(3) $\Rightarrow$ (1) Queremos probar que K es un conjunto cerrado y acotado en $\mathbb{R}$.
Supongamos que K no es cerrado. Así, $K' \not\subset K$, es decir, existe $x \in K'$ tal que $x \notin K$ (ver el teorema 3.4.4(3)).
Luego, para $\varepsilon = \frac{1}{n}$, existe $x_n \in K$ tal que

$$0 < |x_n - x| < \frac{1}{n}. \tag{16}$$

Definamos $K_0 = \{x_n : \in \mathbb{N}\}$. Claramente, $x \in K_0'$ y así, K_0 es un conjunto infinito.
Afirmamos que $K_0' = \{x\}$.

En efecto, supongamos que existe $y \in K_0'$ con $y \neq x$.
Ahora, para $\frac{1}{2}|x-y| > 0$, por la propiedad arquimediana de $\mathbb{R}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2}|x-y| > \frac{1}{n_0}$. En consecuencia, si $n \geq n_0$, entonces

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \frac{1}{2}|x-y|. \tag{17}$$

En consecuencia, por la desigualdad triangular, (16) y (17) se sigue que,

$$|x_n - y| \geq |x-y| - |x_n - x| > |x-y| - \frac{1}{n} > \frac{1}{2}|x-y|,$$

para todo $n \geq n_0$. Por lo tanto, para $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}|x-y|$ el conjunto $A_{\varepsilon_0} = E(y, \varepsilon_0) \cap K_0$ es finito, pero esto contradice el hecho de que $y \in K_0'$.

Así, lo afirmado es cierto.
En conclusión, el conjunto $K_0 \subset K$ es infinito y tiene un único punto de acumulación que no esta en K y esto contradice a 3. Por lo tanto K es cerrado.

Si K no está acotado, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existe x_n (los cuales pueden ser tomados distintos dos a dos) en K tal que

$$|x_n| > n, \tag{18}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $K_0 = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Luego, K_0 es conjunto infinito de K y afirmamos que $K_0' = \emptyset$.
En efecto, si $a \in K_0'$, entonces para cada $\varepsilon > 0$, existe $x_{n_k} \in K_0$, $x_{n_k} \neq a$ tal que $|x_{n_k} - a| < \varepsilon$. En consecuencia, $|x_{n_k}| \leq \varepsilon + a$. Como $\mathbb{N}$ no está acotado superiormente en $\mathbb{R}$, entonces para $\varepsilon + a$ existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que $\varepsilon + a \leq n_k$. Así, $|x_{n_k}| \leq n_k$, lo que contradice a (18). Por lo tanto, $K_0' = \emptyset$, pero esto es una contradicción con 3. De esta manera, K está acotado. ∎

Definición **3.6.6.** *Un conjunto K que cumpla una de las condiciones del teorema 3.6.5, se llama* **compacto**.

Nota **3.6.7.**

Es importante destacar que los conjuntos compactos de $\mathbb{R}$ quedan caracterizados de una manera sencilla, pues,

$$K \text{ es compacto} \quad \Leftrightarrow \quad K \text{ es cerrado y acotado en } \mathbb{R}.$$

3.6.8.

1. Por el teorema de Borel-Lebesgue, $A = [a, b]$ es compacto.
2. Todo conjunto finito en $\mathbb{R}$ es compacto. (¿Por qué?)
3. Como el conjunto $A = \{\frac{1}{n}\} \cup \{0\}$ es cerrado y acotado en $\mathbb{R}$, entonces A es compacto.
4. Los conjuntos $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \mathbb{N}$ *y* $\mathbb{Z}$ son conjuntos no compactos. (¿Por qué?)
5. El conjunto $A = \mathbb{Q} \cap (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, no es compacto, pues $\sqrt{2} \in \overline{A}$, pero $\sqrt{2} \notin A$.

3.7. Conjuntos Conexos

Definición **3.7.1.** *Un conjunto X en $\mathbb{R}$ se llama* **disconexo**, *si existen dos conjuntos A y B en $\mathbb{R}$ tales que*

(i) $A, B \neq \emptyset$.
(ii) *A y B son abiertos.*
(iii) $A \cap B = \emptyset$.
(iv) $A \cap X, B \cap X \neq \emptyset$.
(v) $X \subset A \cup B$.

3.7.2.

El conjunto $X = \mathbb{R} \backslash \{0\}$ es disconexo.

En efecto, los conjuntos $A = (-\infty, 0)$ y $B = (0, \infty)$ satisfacen claramente las condiciones (i) a (v) de la definición 3.7.1.

Definición **3.7.3.** *Un conjunto X en $\mathbb{R}$ se llama* **conexo** *si no es disconexo.*

3.7.4.

1. El conjunto vacío es conexo. (¿Por qué?)

2. El conjunto $X = \{x\}$ es conexo.

   En efecto, supongamos que X es disconexo, entonces existen conjuntos A y B que satisfacen las condiciones (i) a (v) de la definición 3.7.1. Así, $A \cap \{x\} \neq \emptyset$ y $B \cap \{x\} \neq \emptyset$. En consecuencia, $A \cap B \neq \emptyset$ lo que contradice (iii) de la definición. Por lo tanto, X es conexo.

Teorema **3.7.5.** *Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. *$\mathbb{R}$ es conexo.*

2. *$\mathbb{R}$ y $\emptyset$ son los únicos conjuntos abiertos y cerrados a la vez.*

3. *Si A es tal que $\partial A = \emptyset$ entonces $A = \mathbb{R}$ o $A = \emptyset$.*

Prueba:
(1) $\Rightarrow$ (2) Supongamos que 2 no es cierta. Es decir, existe un conjunto A, $A \neq \mathbb{R}$ y $A \neq \emptyset$ tal que A es abierto y cerrado a la vez. Luego, $\mathbb{R} = A \cup (\mathbb{R} \backslash A)$, y además A y $B = \mathbb{R} \backslash A$ satisfacen las condiciones (i) a (v) de la definición 3.7.1. De esta manera $\mathbb{R}$ sería, disconexo, en contradicción con la hipótesis 1. Así, 2 es cierta.

(2) $\Rightarrow$ (3) Esto es la parte 2 del corolario 3.5.5.

(3) $\Rightarrow$ (1) Supongamos que $\mathbb{R}$ es disconexo, entonces existen conjuntos A y B que satisfacen las condiciones (i) a (v) de la definición 3.7.1
Afirmamos que A es cerrado.

En efecto, como $A \cap B = \emptyset$ y $\mathbb{R} = A \cup B$, entonces $B = \mathbb{R} \backslash A$. En consecuencia, $\mathbb{R} \backslash A$ es abierto, pues B es abierto. Así, A es cerrado.
Ahora, como A es abierto y cerrado a la vez, entonces por el teorema 3.5.5(1), $\partial A = \emptyset$ y por la hipótesis 3, se sigue que, $A = \mathbb{R}$ o $A = \emptyset$. En cualquier caso, esto último es una contradicción. De esta manera $\mathbb{R}$ es conexo.
∎

El siguiente teorema caracteriza los conjuntos conexos de la recta.

Teorema **3.7.6.** *X es conexo $\Leftrightarrow$ X es un intervalo.*

Prueba: Si X es un intervalo degenerado el resultado es inmediato. Supongamos que X es un intervalo no degenerado.

($\Rightarrow$) Probemos que X es un intervalo. Supongamos que X no es un intervalo. Es decir, existen $x, y \in X$ tal que $x < z < y$ pero $z \notin X$ (ver teorema 2.15.18). Consideremos, $A = (-\infty, z)$ y $B = (z, \infty)$. Claramente, los conjuntos A y B satisfacen las condiciones (i) a (v) de la definición 3.7.1 y así, X es disconexo en contradicción con la hipótesis. Por lo tanto, X es un intervalo.

($\Leftarrow$) Supongamos que X es un intervalo y probemos que X es conexo.
Supongamos que X es disconexo. En consecuencia, existen conjuntos A y B en que satisfacen las afirmaciones (i) a (v) de la definición 3.7.1.
Ahora, por (iv) de la definición existen $x, y \in X$ tales que $x \in A$ y $y \in B$

y por (iii) de la definición $x \neq y$. Así, podemos considerar que $x < y$. Definamos

$$S = A \cap [x, y].$$

Es claro que, $S \neq \emptyset$ $(x \in S)$ y S está acotado $(S \subset [x, y])$. Luego, por el Axioma Fundamental del Análisis, existe $z = \sup S$ y además, $x \leq z \leq y$.

Afirmación 1. $z < y$.

En efecto, supongamos que $z = y$. Entonces $z \in B$ y como B es abierto, existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que

$$(z - \varepsilon_1, z - \varepsilon_1) \subset B. \tag{19}$$

Por otro lado, como $z = \sup S$, para ε_1 por el teorema 2.5.14, existe $x_1 \in S$ tal que $z - \varepsilon_1 < x_1 \leq z < z + \varepsilon_1$. En consecuencia, $x_1 \in (z - \varepsilon_1, z + \varepsilon_1)$ y por (19), $x_1 \in B$.
Además, como $x_1 \in S$, entonces $x_1 \in A$. Así, $x_1 \in A \cap B$ lo que contradice (iii) de la definición 3.7.1. Por lo tanto, $z < y$.
Nótese que, de la prueba de la afirmación 1, podemos concluir que $z \notin B$.

Afirmación 2. $z > x$.

En efecto, supongamos que $z = x$. Entonces $z \in A$, como A es abierto, existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que $(z - \varepsilon_1, z - \varepsilon_1) \subset A$. En consecuencia, existirá un $x_0 \in (z, z + \varepsilon_1) \subset A$ y así,

$$x_0 \in A \quad (x_0 > z). \tag{20}$$

Por otro lado, si $z + \varepsilon_1 \leq y$, entonces $(z, z + \varepsilon_1] \subset [x, y]$ y por lo tanto,

$$x_0 \in [z, y]. \tag{21}$$

Luego, por (20) y (21), $x_0 \in S$ y $x_0 > z$ lo que contradice el hecho de que $z = \sup S$.
Si $z + \varepsilon_1 > y$, entonces $y \in (z, z + \varepsilon_1) \subset A$. Por lo cual, $y \in A$ lo que contradice el hecho de que $A \cap B = \emptyset$. En conclusión, $z > x$.
Nótese, que de la prueba de la afirmación 2, podemos concluir que $z \notin A$.
Ahora, por las afirmaciones 1 y 2, tenemos que $x < z < y$, pero por las notas $z \notin A \cup B$ y a la luz de (v) de la definición 3.7.1, $x \notin X$, esto contradice que X es un intervalo (ver teorema 2.5.18). Así, X es conexo. ∎

Nota **3.7.7.**

Por la definición de intervalo y el teorema 3.7.6 se sigue que los conjuntos $(-\infty, a), (-\infty, a], (b, \infty), [b, \infty), (a, b), [a, b), (a, b], [a, b]$ son conexos.

3.8. Ejercicios

1. Dar un ejemplo de un conjunto A tal que A sea no numerable y $A^\circ = \emptyset$. Dar un ejemplo en el que $A^\circ = B^\circ = \emptyset$, pero $(A \cup B)^\circ = \mathbb{R}$.

2. Probar que si $A \subset B$, entonces $A^\circ \subset B^\circ$, $\overline{A} \subset \overline{B}$ y $A' \subset B'$.

3. Probar que A° es un conjunto abierto y es el mayor abierto que está contenido en A y probar que $\overline{A}$ es el menor cerrado que contiene a A.

4. Sean A, B. Probar,

    a) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.
    b) $(A \cup B)^\circ \supset A^\circ \cup B^\circ$.
    c) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
    d) $(A \cup B)' = A' \cup B'$.
    e) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
    f) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.
    g) $\overline{A'} = A'$.
    h) $(\overline{A})' = A'$.
    i) $A'' \subset A'$.
    j) $\partial A \cap A^\circ = \emptyset$.
    k) $\overline{A} = A^\circ \cup \partial A$.
    l) $\partial A = \partial(\mathbb{R} \backslash A)$.
    m) $(\mathbb{R} \backslash A)^\circ \subset \overline{(\mathbb{R} \backslash A)}$.
    n) $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset \quad \Rightarrow \quad \partial(A \cup B) = \partial A \cup \partial B$.
    ñ) $\mathbb{R} = A^\circ \cup \partial A \cup (\mathbb{R} \backslash A)^\circ$.

5. Hallar A', $\overline{A}$, ∂A, A° si:

   a) $A = \mathbb{Z}$.
   b) $A = \mathbb{Q}$.
   c) $A = [a, b)$.
   d) $A = \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.
   e) $A = \{1 + 1/n\}$.
   f) $A = \{1/n\} \cup \{2\}$.

6. Determinar cuales de las siguientes igualdades son ciertas.

   a) $(\overline{A})^\circ = A^\circ$.
   b) $\overline{A} \cap A = A$.
   c) $\overline{(\mathbb{R}\backslash A)} = A$.

7. Dar ejemplos de dos conjuntos abiertos A y B tales que los conjuntos $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$, $\overline{A \cap B}$, y $\overline{A} \cap \overline{B}$ sean todos distintos.

8. Dar ejemplos de:

   a) Un subconjunto A de $\mathbb{R}$ tal que $A' = \emptyset$.
   b) Un subconjunto no vacío A de $\mathbb{R}$ tal que $A \subset A'$.
   c) Un subconjunto no vacío A de $\mathbb{R}$ tal que $\partial A = A'$.

9. Sean A, B, Entonces:
   $A + B = \{x + y, x \in A, y \in B\}$ y $AB = \{ab, a \in A, b \in B\}$.

   a) Probar que si B es abierto, entonces $A + B$ es abierto.
   b) Probar que si $A \neq \{0\}$ y B es abierto, entonces AB es abierto en $\mathbb{R}$.

10. Sea A abierto y $a \in A$. Probar que $A\backslash\{a\}$ es abierto en $\mathbb{R}$.

11. ¿Es la intersección y unión arbitraria de conjuntos compactos un conjunto compacto?

12. Sea (K_n) una sucesión de conjuntos compactos no vacíos tales que $K_n \subset K_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Probar que $\bigcap_{1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$.

13. Si A, B, A y B conjuntos conexos tales que $\partial A \subset B$. Probar que $A \cup B$ es conexo.

14. Sea $\{A_\alpha, \alpha \in I\}$ (I un conjunto arbitrario de índices) una familia de conjuntos conexos tales que $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \neq \emptyset$. Probar que $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ es un conjunto conexo.

15. Si A es un conjunto conexo. ¿A°, ∂A son conjuntos conexos?

16. Un conjunto S en $\mathbb{R}$ se llama **convexo** si:
para todo $x, y \in S$ y para todo $t \in (0,1)$ se verifica

$$tx + (1-t)y \in S.$$

Probar que

a) Para cada ε, el conjunto $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ es convexo.

b) A convexo $\Rightarrow$ A°, $\overline{A}$ *y* A' son conjuntos convexos.

17. Sea $G_n = (1/n, 2/n), n \in \mathbb{N}$. Probar que $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cubre al intervalo $(0,1)$,pero ninguna subcolección finita cubre a $(0,1)$.

18. Pruebe que $A = \{1/n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$, es un conjunto compacto.

19. Probar que si A está acotado en $\mathbb{R}$, entonces $\overline{A}$ está acotado en $\mathbb{R}$.

20. (a) Sean $K \subset R$ un conjunto compacto y $A \subset K$ un conjunto cerrado. Probar que A es compacto.

(b) Sean F, K. Si F es cerrado y K es compacto, probar que $F \cap K$ es compacto.

21. Sean $A = (0,1) \cup \{2\}$ y $B = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$. ¿Son A ,$\overline{A}$, B , $\overline{B}$ conjuntos conexos?

22. Probar que A es denso en $\mathbb{R}$ si y sólo si $(\mathbb{R} \backslash A)^\circ = \emptyset$.

23. Probar que $\sup A = \sup \overline{A}$.

24. Sean A y $x \in \mathbb{R}$. La **distancia del punto** x **al conjunto** A denotada por $d(x, A)$ se define $d(x,y) = \inf\{|x-y| : y \in A\}$.

a) Probar que $d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{A}$.

b) Probar que $d(x, \overline{A}) = d(x, A)$.

c) $A \subset B \Rightarrow d(x, A) \leq d(x, B)$.

25. Sea A ¿Puede ser A simultáneamente abierto (en $\mathbb{R}$) y compacto?

26. Sea $A = \{p \in \mathbb{Q} : p > 0 \;\; y \;\; 2 < p^2 < 3\}$. Probar que A no es un conjunto compacto.

3.9. Algunas Sugerencias para la solución de los ejercicios

1. En la parte teórica está un ejemplo.

2. Use las definiciones correspondientes.

3. Aplique el Método de Reducción al Absurdo; asumiendo que existe un conjunto abierto B que satisface la condición ...

4. (a) Una inclusión es evidente. Por otro lado, sea $a \in A^\circ \cap B^\circ$, pruebe que $a \in (A \cap B)^\circ$.
(c) Sea $a \in \overline{A \cap B}$, entonces $E(a, \varepsilon) \cap (A \cap B) \neq \emptyset$ para todo $\varepsilon > 0$.
(e) Una inclusión es evidente. Por otro lado, sea $a \in \overline{A \cup B}$, entonces $E(a, \varepsilon) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$ para todo $\varepsilon > 0$ ...
(g) Una inclusión es evidente. Por otro lado, sea $a \in \overline{A'}$, entonces $E(a, \varepsilon) \cap A' \neq \emptyset$ para todo $\varepsilon > 0$. Por último, recuerde que $E(a, \varepsilon)$ es un conjunto abierto.
(i) Sea $a \in A''$, entonces $E(a, \varepsilon) \cap (A' \backslash \{a\}) \neq \emptyset$. De nuevo use la propiedad de que $E(a, \varepsilon)$ es un conjunto abierto.
(l) Aplique la definición.
(n) Pruebe la doble implicación.

5. Este es un buen ejercicio de cálculo el ejercicio 4 puede ayudar.

6. (a) Un contraejemplo pudiera ser la respuesta.
(b) La respuesta es sencilla y corta.
(c) Proceda como en la parte (a).

7. Los ejemplos están dados en la parte teórica.

8. En este ejercicio el lector no deberá tener problemas.

9. (a) Pruebe primero que para $x \in \mathbb{R}$ (fijo) el conjunto $\{x\} + B = \{x+y : y \in B\}$. Es abierto. Luego, recuerde que $A+B = \bigcup_{x\in A}(\{x\}+B)$.

   (b) Proceda de manera similar a la parte (a).

10. Suponga que $A\backslash\{a\}$ no es abierto.

11. Las respuestas deben ser cortas.

12. Utilice el Método de Reducción al Absurdo.

13. Suponga que $A \cup B$ es no conexo.

14. Pruebe que $\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$ es un intervalo.

15. Dar un ejemplo de un conjunto A conexo tal que ∂A sea no conexo. Pruebe que A° es un intervalo.

16. (a) Sean $\varepsilon > 0$, $x, y \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ con $x \neq y$ $(x < y)$. Defina $z = ty + (1-t)x \ \ t \in (0,1)$. Ahora, pruebe que $z \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$...
    (b) El lector debería probarlo sin dificultad.

17. Pruebe que $(0,1) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n$ y suponga que existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $(0,1) \subset \bigcup_{n=1}^{n} G_n$...

18. Demuestre que A es cerrado y acotado en $\mathbb{R}$.

19. Utilice las definiciones de clausura y acotado.

20. Por la caracterización de compactos (a) y (b) son evidentes.

21. Halle $\overline{A}$ y $\overline{B}$.

22. $(\Rightarrow)$ A denso en $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\mathbb{R} \subset \overline{A}$ $\Rightarrow$ $E(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. En particular...

    $(\Leftarrow)$ Pruebe que $\mathbb{R} \subset \overline{A}$ y recuerde que $\mathbb{R} = A \cup (\mathbb{R}\backslash A)$.

23. Recuerde que $\sup A \in \overline{A}$. Así, $\sup A \leq \sup \overline{A}$. Luego, pruebe que $\sup A \geq \sup \overline{A}$.

24. Este ejercicio requiere la aplicación de la noción de ínfimo.

25. Si su respuesta no es corta está trabajando extra.

26. Pruebe que A no es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}$.

3.10. Ejercicios Varios

1. (a) ¿Existen subconjuntos de $\mathbb{R}$ que tengan un único punto interior?
(b) Si A y B son conjuntos cerrados y no vacíos de $\mathbb{R}$, ¿es el conjunto $A + B$ cerrado en $\mathbb{R}$?
(c) Si A y B son conjuntos $\mathbb{R}$, con $A \subset B$. ¿Es cierto que $\partial A \subset \partial B$?
(d) Un conjunto A, ¿puede ser simultáneamente abierto y compacto?

2. (a) Dar un ejemplo de dos conjuntos discretos.
(b) Dar un ejemplo de un conjunto acotado de $\mathbb{R}$ con sólo dos puntos de acumulación.

3. (a) Probar que si A es abierto y cerrado en $\mathbb{R}$, entonces $\partial A = \emptyset$.
(b) Sean A y B dos conjuntos de $\mathbb{R}$ tales que A es abierto y B denso en $\mathbb{R}$ probar que

   b_1.- $A \subset \overline{A \cap B}$.

   b_2.- A denso en $\mathbb{R}$, implica que $A \cap B$ es denso en $\mathbb{R}$.

4. Pruebe que la intersección arbitraria de conjuntos uno de los cuales es compacto es un conjunto compacto.

5. Dado $A = \{\frac{1}{n} : \in \mathbb{N}\} \cup \{2\}$. Determinar:

   1.- A° 2.- $\overline{A}$ 3.- A' 4.- ∂A 5.- $(A^\circ)^\circ$ 6.- $(\overline{A})^\circ$

   7.- $(A')^\circ$ 8.- $(\partial A)^\circ$ 9.- $\overline{(A^\circ)}$ 10.- $\overline{\overline{A}}$ 11.- $\overline{A'}$

   12.- $\overline{\partial A}$ 13.- $(A^\circ)'$ 14.- $(\overline{A})'$ 15.- A''

   16.- $(\partial A)'$ 17.- ∂A° 16.- $\partial \overline{A}$ 19.- $(\partial A)'$ 20.- $\partial(\partial A)$.

6. Sea X compacto. Pruebe que los siguientes conjuntos son compactos:

   6.1.- $S = \{x + y : \; x, y \in X\}$

   6.1.- $D = \{x - y : \; x, y \in X\}$

   6.1.- $P = \{xy : \; x, y \in X\}$

   6.1.- $Q = \{\frac{x}{y} : \; x, y \in X, \; x \neq 0\}$.