"Es interesante, sin embargo, conocer algunos límites que desempeñan un papel importante o simplemente curioso en las matemáticas... Entre los más importantes ocupa un lugar privilegiado

$$(1+\frac{1}{1})^1, (1+\frac{1}{2})^2, (1+\frac{1}{3})^3, (1+\frac{1}{4})^4, \ldots, (1+\frac{1}{n})^n, \ldots$$

cuyo límite es el célebre número e. Este número $e = 2,71828182844590452353 6\ldots$ *es junto con* π *el más popular de las matemáticas; es la base de los logaritmos neperianos, aparece en gran número de fórmulas de la electricidad, de la Biología... e incluso en las cuentas bancarias."* **Joaquín Navarro**

OBJETIVOS (Capítulo 4)

- Estudiar los conceptos y propiedades sobre límites.
- Caracterizar en sentido topológico los conjuntos de la recta utilizando sucesiones.
- Aplicar los conceptos y resultados sobre límites en la solución de problemas.

Capítulo 4

Sucesiones y Límites de Funciones

Hace unos 2400 años el filosofó griego **Zenón de Elea (495-435 A.C)** estableció la siguiente paradoja:

Un corredor no puede alcanzar una meta, pues siempre debe recorrer la mitad de una distancia antes de recorrer la mitad de una distancia total. Esto es cuando haya recorrido la primera mitad, le quedará la mitad de esta y cuando haya corrido la mitad de esta, le quedará la cuarta parte, y así, sucesivamente e indefinidamente.

Estas fracciones, en la que cada una es la mitad de la anterior, dividen el trayecto en un número indefinido de partes cada vez más pequeñas.
Correr por separado cada parte, se necesita una cantidad de tiempo, parece natural que el tiempo necesario para recorrer todo el trayecto a de ser la suma total de todas las cantidades de tiempo.
Así, decir que un corredor nunca puede alcanzar una la meta equivale a decir que no lo consigue en un tiempo finito.
Esto también significa que la suma de un número finito de intervalos positivos de tiempo no puede ser finita.

La afirmación de Zenón: *la suma de un número infinito de cantidades positivas no puede ser finita* fue contradicha 2000 años más tarde, con la formulación de la Teoría de Sucesiones. El planteamiento de Zenón es conocido como PARADOJA DE ZENÓN.

Supongamos que el corredor se mueve a velocidad constante y necesita t minutos en la primera mitad del recorrido. La experiencia física nos dice que si un corredor se mueve a velocidad constante alcanzará su meta en un tiempo doble del que necesitaba para alcanzar su punto medio. Con la Teoría de sucesiones queda invalidada la paradoja de Zenón cuando el corredor se mueve a velocidad constante.

La teoría de Sucesiones comenzó su desarrollo en el siglo $XVII$, pero es el eminente matemático francés **Agustin Louis Cauchy (1789-1857)** quien introdujo la definición analítica del concepto de límite en el año 1821 exponiendo la teoría moderna de límites.

En el presente capítulo expondremos la Teoría de sucesiones; el conocimiento y manejo de esta es indispensable para el estudio del Análisis Matemático. Debido a la importancia de este capítulo presentamos en detalle los conceptos y resultados básicos sobre sucesiones utilizando gran cantidad de ejemplos y ejercicios.

4.1. Sucesión

Definición **4.1.1.** *Una* **sucesión** *de elementos en* $\mathbb{R}$ *es una función* $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Nota **4.1.2.**

1. La imagen $x(n) \in \mathbb{R}$, la denotaremos por x_n y se llama término n-ésimo de la sucesión. Además escribiremos (x_n) o $(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$ para indicar a la sucesión.

2. Es conveniente no confundir la sucesión x con el conjunto $x(\mathbb{N})$ (rango de x) de sus términos. Por ejemplo, la sucesión $(0, 0, \ldots, 0, \ldots)$ no es lo mismo que el conjunto $\{0\}$ y las sucesiones $(0, 1, 0, 1, \ldots)$ y $(0, 0, 1, 0, 1, \ldots)$ son diferentes aun cuando el conjunto de sus términos $\{0, 1\}$ es el mismo.

4.1.3.

1. La sucesión con término n-ésimo $x_n = c$, para todo $n \in \mathbb{N}$ ($c \in \mathbb{R}$ fijo), define la sucesión constante. En este caso, el conjunto de sus términos $x(\mathbb{N}) = \{c\}$.

2. Si $x_n = (-1)^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces la sucesión queda definida por 1 si n es par y -1 si n es impar. El conjunto de sus términos es $x(\mathbb{N}) = \{-1, 1\}$.

3. La sucesión con término n-ésimo $x_n = \frac{1}{n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ tiene como conjunto de sus términos $x(\mathbb{N}) = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$.

4.2. Sucesiones Acotadas y Monótonas

Definición **4.2.1.** *Una sucesión (x_n) es* **acotada** *en $\mathbb{R}$ si el conjunto de sus términos es acotado en $\mathbb{R}$. Es decir, existe $M > 0$ tal que $|x_n| \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

4.2.2.

1. La sucesión constante es evidentemente acotada.

2. La sucesión con término n-ésimo $x_n = \frac{1}{n}$ es acotada, pues
$$x(\mathbb{N}) \subset [0, 1].$$

3. La sucesión con término n-ésimo $x_n = n$ no es acotada, pues
$$x(\mathbb{N}) = \mathbb{N}.$$

4. Sea (x_n) una sucesión con término n-ésimo $x_n = a^n, \quad a \in \mathbb{R}$.

   Si $a = 0$ o $a = 1$, entonces $x_n = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ o $x_n = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. En cualquier caso, (x_n) es una sucesión constante y por lo tanto es acotada.

   Si $0 < a < 1$, entonces $0 < a^n < 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y así, (x_n) es acotada.

Si $a > 1$, entonces $a = 1 + h$ con $h > 0$, luego por la desigualdad de Bernoulli (ver ejercicio 1(f) de 1.8) $a^n = (1+h)^n > 1 + nh$. En consecuencia, dado cualquier $M \in \mathbb{R}$, podemos hallar $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n > M$ (esto es posible al tomar $n > \frac{M-1}{h}$). Así, cuando $a > 1$, entonces la sucesión (x_n) no es acotada superiormente.

Si $-1 < a < 1$, entonces $|a| < 1$ y como $|a|^n = |a^n|$ concluimos que la sucesión (x_n) es acotada.

Si $a = -1$, entonces obtenemos la sucesión de término n-ésimo $x_n = (-1)^n$, la cual es acotada.

Si $a < -1$, entonces $a^{2n} = (a^2)^n$ forma un conjunto de potencias de $a^2 > 1$, el cual es un conjunto no acotado superiormente y así, (x_n) no es acotada superiormente. Además, los términos $a^{2n+1} = aa^{2n}$ forman un conjunto no acotado inferiormente y así, (x_n) no es acotada inferiormente.

5. La sucesión definida por, $x_1 = \sqrt{2}$ y $x_n = \sqrt{2 + \sqrt{x_{n-1}}}$, $n \geq 2$, es acotada.

   En efecto, claramente, 0 es una cota inferior para (x_n).
   Nótese que, $x_1 = \sqrt{2} < 2$ y $x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} < \sqrt{4} = 2$. Probemos por inducción que $x_n < 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
   Claramente $x_1 < 2$.
   Supongamos que $x_n < 2$ y probemos que $x_{n+1} < 2$.
   Ahora, como

   $$x_n < 2 \Rightarrow \sqrt{x_n} < 2 \Rightarrow 2 + \sqrt{x_n} < 4 \Rightarrow x_{n+1} = \sqrt{2 + \sqrt{x_n}} < 2,$$

   entonces $x_n < 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y en consecuencia, (x_n) es acotada superiormente.

Definición **4.2.3.** *Una sucesión* (x_n) *se llama* **monótona** *si satisface* $x_n \leq x_{n+1}$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *o* $x_n \geq x_{n+1}$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *En el primer caso* (x_n) *se llama* **no decreciente** *y en el segundo caso* (x_n) *se llama* **no creciente**.

Cuando ocurre $x_n < x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, (x_n) se llama **creciente** *y cuando ocurre $x_{n+1} < x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, (x_n) se llama* **decreciente**.

4.2.4.

1. La sucesión con término n-ésimo $x_n = \frac{1}{n}$ es decreciente.

   En efecto, $n < n+1$ implica que, $x_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

2. La sucesión de término n-ésimo $x_n = n$, es evidentemente creciente.

3. La sucesión con término n-ésimo $x_n = (-1)^n$ no es monótona.

   En efecto, no puede ser creciente, pues, $x_1 = -1 < 1 = x_2 > -1 = x_3$ y por lo tanto no puede ser decreciente.

4. Dada la sucesión de término n-ésimo $x_n = a^n \quad a \in \mathbb{R}$. Entonces,
   Si $a = 0$ o $a = 1$, (x_n) es monótona.
   Si $0 < a < 1$, $x_{n+1} = a^{n+1} < a^n = x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y así, (x_n) es decreciente.
   Si $a > 1$, $x_{n+1} = a^{n+1} > a^n = x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y así, (x_n) es creciente.
   Si $a < 0$, (x_n) no es monótona pues sus términos son alternadamente negativos y positivos.

5. La sucesión definida por $x_1 = \sqrt{2}$ y $x_n = \sqrt{2 + \sqrt{x_{n-1}}}$, $n \geq 2$ es creciente.

   En efecto, probemos por inducción que $x_n < x_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
   Si $n = 2$, como $2 + \sqrt{2} > 2$, entonces $x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} > \sqrt{2} = x_1$.
   Ahora, supongamos que $x_{n-1} < x_n$ y probemos que $x_n < x_{n+1}$.
   Por la hipótesis de inducción tenemos que,

$$\begin{aligned} x_{n-1} < x_n \quad &\Rightarrow \quad \sqrt{x_{n-1}} < \sqrt{x_n} \\ &\Rightarrow \quad 2 + \sqrt{x_{n-1}} < 2 + \sqrt{x_n} \\ &\Rightarrow \quad x_n = \sqrt{2 + \sqrt{x_{n-1}}} < \sqrt{2 + \sqrt{x_n}} = x_{n+1}. \end{aligned}$$

   Así, $x_n < x_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y por lo tanto, (x_n) es creciente.

4.3. Subsucesiones

Definición **4.3.1.** *Sea (x_n) una sucesión en* $\mathbb{R}$ $(x : \mathbb{N} \to \mathbb{R})$, *una* **subsucesión** *de (x_n) es una restricción de x a un subconjunto infinito*

$$\mathbb{N}^* = \{n_k \in \mathbb{N} : \quad n_k < n_{k+1}, \ k \in \mathbb{N}\},$$

de $\mathbb{N}$.

Nota **4.3.2.**

1. Podemos escribir una subsucesión de (x_n) mediante $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ o $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ o simplemente (x_{n_k}).
2. De la definición se sigue que toda sucesión es una subsucesión de si misma.
3. Nótese que, $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}$ es infinito si y sólo si $\mathbb{N}^*$ no es acotado superiormente, es decir para cada $n_0 \in \mathbb{N}$ existe $n_k \in \mathbb{N}^*$ tal que $n_k > n_0$.

4.3.3.

1. Para la sucesión (x_n) de término n-ésimo $x_n = (-1)^n$, podemos considerar las subsucesiones $(x_{2n} = 1)$ y $(x_{2n-1} = -1)$.
2. Para la sucesión (x_n) de término n-ésimo $x_n = \frac{n}{2}[1 + (-1)^{n+1}]$, podemos considerar las subsucesiones $(x_{2n} = 0)$ y $(x_{2n-1} = n)$.

4.4. Sucesiones Convergentes y Divergentes

Definición **4.4.1.** *Sea (x_n) una sucesión en* $\mathbb{R}$. *Un número real a se llama* **límite** *de (x_n) si para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 = n_0(a, \varepsilon)$*[1] $\in \mathbb{N}$ *tal que $n > n_0$ implica $|x_n - a| < \varepsilon$. (Ver, Figura 4.1)*

Nota **4.4.2.**

1. Cuando la sucesión (x_n) tiene límite a se escribe

[1] Esta notación indica que el n_o depende de ε y a

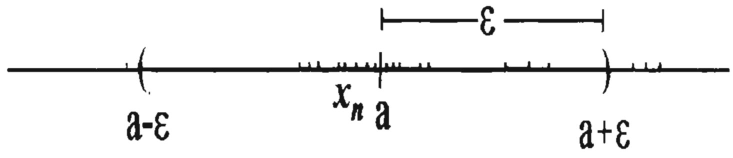

Figura 4.1: Sucesiones Convergentes

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \text{o} \quad (x_n) \to a.$$

2. La definición de límite de una sucesión puede escribirse de manera simbólica como sigue:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \Leftrightarrow \quad [\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} : \; n > n_0 \quad \Rightarrow \quad |x_n - a| < \varepsilon]$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \Leftrightarrow \quad [\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} : \; n > n_0 \quad \Rightarrow \quad x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)],$$

esto último significa que cada entorno $E(a, \varepsilon)$ contiene todos los términos x_n salvo para un número finito de índices n.

3. Nótese que,

$$\lim_{n\to\infty} x_n \neq a \quad \Leftrightarrow \quad [\exists\, \varepsilon > 0 : \; \forall n_0 \in \mathbb{N}, \; \exists n \in \mathbb{N} : n > n_0 \; y \; |x_n - a| \geq \varepsilon].$$

4. Si una sucesión (x_n) tiene límite a, entonces diremos que (x_n) es una sucesión **convergente** en caso contrario diremos que (x_n) es **divergente**.

4.4.3.

1. La sucesión $(x_n = \frac{1}{n})$ converge a 0.

En efecto, dado $\varepsilon > 0$, por la propiedad arquimediana de $\mathbb{R}$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. En consecuencia, si $n > n_0$ entonces

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon.$$

2. Claramente, si (x_n) es la sucesión constante, $x_n = c$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = c$.

3. La sucesión $(x_n = (-1)^n)$ es divergente.

   En efecto, supongamos que (x_n) converge, es decir existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$.
   Ahora, si $a = 1$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ (tomando $\varepsilon = \frac{1}{2}$ en la definición de límite) para todo $n > n_0$, lo cual no es posible pues si n es impar, entonces $x_n = -1 \notin (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$. Así, $a \neq 1$.
   De manera análoga se prueba que $a \neq -1$.
   Si $a \neq 1$ y $a \neq -1$, es posible hallar ε tal que $x_n \notin (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, para todo $n \in \mathbb{N}$ lo que contradice el hecho de que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$. Por lo tanto, la sucesión (x_n) diverge.

4. La sucesión $(x_n = a^n)$ converge a 0, si $0 < a < 1$.

   En efecto, si $0 < a < 1$, entonces $\frac{1}{a} - 1 > 0$. En consecuencia, existe $h > 0$ tal que $\frac{1}{a} - 1 = h$ y así,

$$a^n = \frac{1}{(1+h)^n}. \tag{1}$$

   Ahora, dado $\varepsilon > 0$ queremos hallar $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $n > n_0$ implique $|a^n - 0| = a^n < \varepsilon$.
   Por otro lado, por la desigualdad de Bernoulli, $(1+h)^n \geq 1 + nh$ y así,

$$\frac{1}{(1+h)^n} \leq \frac{1}{1+nh}. \tag{2}$$

   Luego, como $\frac{\varepsilon}{h} > 0$, por la propiedad arquimediana de $\mathbb{R}$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{h}. \tag{3}$$

   Por (3) (2) y (1) obtenemos que

$$\begin{aligned} n > n_0 \quad &\Rightarrow \quad \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\frac{1}{h} + n} < \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{h} \\ &\Rightarrow \quad \frac{1}{1+nh} < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad a^n = \frac{1}{(1+h)^n} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Teorema 4.4.4. *Sea (x_n) una sucesión en $\mathbb{R}$.*

1. *El límite de una sucesión es único.*

2. *Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, entonces toda subsucesión de (x_n) converge a a.*

3. *Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, entonces para todo $k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+k} = a$.*

4. *Si (x_n) converge, entonces (x_n) es acotada.*

Prueba:

1. Supongamos que $(x_n) \to a$ y $(x_n) \to b$. Entonces dado $\varepsilon > 0$ existen n_1 y n_2 en $\mathbb{N}$ tales que $n > n_1$ implica $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$, y $n > n_2$ implica $|x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$. Luego, si $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, entonces $n > n_0$ implica que

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad y \quad |x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4}$$

Ahora, si $n > n_0$, por (4) y la desigualdad triangular tenemos que

$$0 \leq |a - b| \leq |a - x_n| + |x_n - b| < \varepsilon.$$

En consecuencia, como ε es arbitrario concluimos que, $|a - b| = 0$ (ver teorema 2.1.4(14)) y así, $a = b$. Por lo tanto, 1 es cierto.

2. Sea (x_{n_k}) una subsucesión de (x_n). Como $(x_n) \to a$, entonces dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \quad \Rightarrow \quad |x_n - a| < \varepsilon. \tag{5}$$

Como $\mathbb{N}^* = \{n_k : n_k < n_{k+1},\ k \in \mathbb{N}\}$ es infinito, entonces para n_0 existe $n_{k_0} \in \mathbb{N}^*$ tal que $n_{k_0} > n_0$. En consecuencia, si $k > k_0$, entonces $n_k > n_{k_0} > n_0$ y por (5) se sigue que, $|x_{n_k} - a| < \varepsilon$. Por lo tanto, $(x_{n_k}) \to a$.

3. Como (x_{n+k}) es una subsucesión de (x_n), entonces por 2, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+k} = a$.

4. Supongamos que $(x_n) \to a$, entonces para $\varepsilon = 1$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica que $x_n \in (a-1, a+1)$. Sea

$$A = \{x_1, \ldots, x_{n_0}, a-1, a+1\},$$

entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $x_n \in [a, b]$, donde $a = \text{mín}\, A$ y $b = \text{máx}\, A$. Por lo tanto, (x_n) es acotada.

Nota **4.4.5.**

Del teorema 4.4.4, se obtienen condiciones suficientes para la divergencia de una sucesión a saber:

1. Si una sucesión posee dos subsucesiones que convergen a límites diferentes entonces la sucesión diverge.

2. Si una sucesión posee una subsucesión divergente entonces la sucesión diverge.

3. Si una sucesión no es acotada, entonces la sucesión diverge.

4.4.6.

1. Una sucesión puede ser acotada y no convergente, por ejemplo la sucesión $(x_n = (-1)^n)$ no converge, pues las subsucesiones $(x_{2n} = 1) \to 1$ y $(x_{2n-1} = -1) \to -1$. (Así, el recíproco de 3 del teorema 4.4.4 no es cierto.)

2. La sucesión (x_n) de término n-ésimo $x_n = \frac{n}{2}[1 + (-1)^{n+1}]$ diverge, pues la subsucesión $(x_{2n} = n)$, por no estar acotada es divergente.

4.5. Condiciones Suficientes de Convergencia

El siguiente teorema nos da una condición suficiente para la convergencia de una sucesión.

Teorema **4.5.1.** *Toda sucesión monótona y acotada de números reales es convergente.*

Prueba: Supongamos que (x_n) es una sucesión no decreciente y acotada superiormente.
Sea $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Evidentemente, $A \neq \emptyset$ y es acotado superiormente. Luego, por el Axioma Fundamental del Análisis, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $a = \sup A$. Afirmamos que $(x_n) \to a$.
En efecto, para cada $\varepsilon > 0$, por el teorema 2.5.14 existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$a - \varepsilon < x_{n_0} \leq a < a + \varepsilon. \tag{6}$$

Ahora, si $n > n_0$, entonces como (x_n) es no decreciente se sigue que

$$x_{n_0} \leq x_n. \tag{7}$$

Luego, por (6) y (7) si $n > n_0$, entonces $a - \varepsilon < x_{n_0} < x_n \leq a < a + \varepsilon$. Así, $n > n_0$ implica que $|x_n - a| < \varepsilon$ y por lo tanto lo afirmado es cierto.
El caso (x_n) no creciente y acotada inferiormente se prueba de manera análoga al caso anterior. ∎

Nota 4.5.2.

Del teorema 4.5.1, se concluye que:

1. Una sucesión (x_n) creciente y acotada superiormente es convergente y $(x_n) \to \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. (Ver, Figura 4.2)

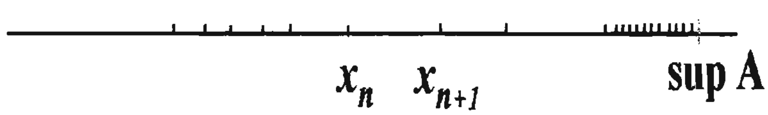

Figura 4.2: Condición Suficiente de Convergencia

2. Una sucesión (x_n) decreciente y acotada inferiormente es convergente y $(x_n) \to \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. (Ver, Figura 4.3)

3. De la prueba del teorema 4.5.1, concluimos que el teorema también vale cuando la sucesión (x_n) es monótona y acotada a partir de un cierto $n_0 \in \mathbb{N}$.

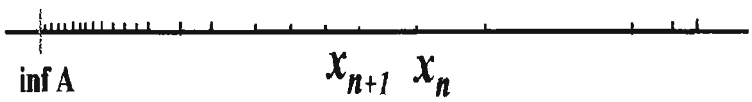

Figura 4.3: Condición Suficiente de Convergencia

4.5.3.

1. La sucesión de término n-ésimo $x_n = \frac{1}{n}$ es acotada inferiormente y es decreciente. Además, $\inf\{\frac{1}{n}\ n \in \mathbb{N}\} = 0$. Luego, por el teorema 4.5.1, $(\frac{1}{n}) \to 0$.

2. La sucesión con término n-ésimo $x_n = \frac{n}{n+1}$, es creciente y acotada superiormente.

   En efecto, obsérvese que, para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} n^2 + 2n < n^2 + 2n + 1 \quad &\Rightarrow \quad n(n+2) < (n+1)^2 \\ &\Rightarrow \quad x_n = \frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2} = x_{n+1}. \end{aligned}$$

   En consecuencia, (x_n) es creciente.
   Además, como $n < n+1$, implica que $x_n = \frac{n}{n+1} < 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
   Así, (x_n) es acotada superiormente.
   Afirmamos que, $\sup\{\frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\} = 1$.

   En efecto, 1 es una cota superior para el conjunto $\{\frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$.
   Supongamos que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $c < 1$ y

$$\frac{n}{n+1} \leq c, \tag{8}$$

   para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, $1 - c > 0$ y por la propiedad arquimediana de $\mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$c < \frac{n-1}{n}. \tag{9}$$

Como (9) contradice a (8), entonces lo afirmado es cierto.
Por lo afirmado y el teorema 4.5.1, se verifica que $(\frac{n}{n+1}) \to 1$.

Corolario 4.5.4. (Teorema de Bolzano-Weierstrass)
Toda sucesión acotada de números reales posee una subsucesión convergente.

Prueba: Sea (x_n) una sucesión acotada de números reales. Por el teorema 4.5.1, basta probar que (x_n) posee una subsucesión monótona. Un término x_{n_0} de la sucesión (x_n) se llama **cumbre** cuando $x_{n_0} \geq x_n$ para todo $n > n_0$. Definamos

$$\mathcal{D} = \{n \in \mathbb{N} : \ x_n \ \text{ es un término cumbre}\}.$$

Si $\mathcal{D}$ es finito, entonces sea $n_1 > \text{máx}\{n : n \in \mathcal{D}\}$. Como x_{n_1} no es un término cumbre existe $n_2 > n_1$ tal que $x_{n_1} < x_{n_2}$. De esta manera, x_{n_2} no es un término cumbre así, existe $n_3 > n_2$ tal que $x_{n_1} < x_{n_2} < x_{n_3}$.
Continuando de esta forma obtenemos una subsucesión (x_{n_k}) de (x_n) tal que $x_{n_k} < x_{n_{k+1}}$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Es decir, (x_{n_k}) es creciente.

Si $\mathcal{D}$ es infinito y $\mathcal{D}=\{n_1 < n_2 \ldots < n_k \ldots\}$, entonces la subsucesión $(x_n)_{n\in\mathcal{D}}$ sería no creciente.
Así, en cualquier caso (x_n) posee una subsucesión monótona. Por lo tanto el corolario queda probado. ∎

Teorema 4.5.5.

1. *Sea* $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. *Si* $b < a$, *entonces existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $x_n > b$, *para todo* $n > n_0$. *Análogamente, si* $a < b$, *entonces existe un* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $x_n < b$, *para todo* $n > n_0$.

2. *Si* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ *y* $x_n \leq z_n \leq y_n$, *para todo* $n > n_0$, *entonces* $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

3. *Si* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ *y* (y_n) *es una sucesión acotada, entonces* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$.

Prueba:

1. Como $b < a$, por la hipótesis aplicada a $\varepsilon = a - b$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica $x_n \in (a - a + b, a + a - b) = (b, 2a - b)$. Así, $x_n > b$, para todo $n > n_0$.
La segunda parte se prueba de manera similar.

2. Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario, entonces por hipótesis existen $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tales que $n > n_1$ implica que $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, y $n > n_2$ implica que $a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon$.
   Sea $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Luego, si $n > n_0$, entonces
   $$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \quad y \quad a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon. \tag{10}$$
   En consecuencia, por la hipótesis y (10) se sigue que $n > n_0$ implica que
   $$a - \varepsilon < x_n \leq z_n \leq y_n < a + \varepsilon.$$
   Así, $|z_n - a| < \varepsilon$ siempre que $n > n_0$ y así, $(z_n) \to a$.

3. Como (y_n) es una sucesión acotada, entonces existe $M > 0$ tal que
   $$|y_n| \leq M, \tag{11}$$
   para todo $n \in \mathbb{N}$.
   Por otro lado, como $(x_n) \to 0$, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica que,
   $$|x_n| = |x_n - 0| < \frac{\varepsilon}{M}. \tag{12}$$
   Luego, si $n > n_0$ por (11) y (12), tenemos que
   $$|x_n y_n - 0| = |x_n y_n| = |x_n||y_n| < \varepsilon.$$
   Por lo tanto, $(x_n y_n) \to 0$.

■

Nota 4.5.6.

Obsérvese que, de la definición de convergencia de una sucesión se obtiene que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} (x_n - a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} |x_n - a| = 0.$$

Corolario 4.5.7.

1. *Si* $(x_n) \to a$ *y* $a > 0$, *entonces existe* $n_0 \in N$ *tal que* $x_n > 0$ *para todo* $n > n_0$. *Análogamente, si* $a < 0$, *entonces existe un* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $x_n > 0$ *para todo* $n > n_0$.

2. *Sean* $(x_n) \to a$ *y* $(y_n) \to b$. *Si* $x_n \leq y_n$ *para todo* $n > n_0$, *entonces* $a \leq b$. *En particular, si* $x_n < b$ *para todo* $n > n_0$, *entonces* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leq b$.

Prueba:

1. Basta aplicar el teorema 4.5.5(1) en el caso $b = 0$.

2. Supongamos que $a > b$. Luego, por argumento de densidad existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $b < c < a$ y por el teorema 4.5.5(1) existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica que $y_n < c < x_n$, pero esto contradice la hipótesis. Así, 2 es cierto.

∎

4.5.8.

1. Sean $x_n = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y $y_n = \frac{1}{n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Claramente $x_n < y_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, pero $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.
   Este ejemplo muestra que, $x_n < y_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, no implica que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n < \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2+4} = 0$.

   En efecto, observemos que

$$0 < \frac{n+1}{n^2+4} < \frac{2\frac{n}{n}}{\frac{n^2+4}{n}} = \frac{2}{\frac{n^2}{n} + \frac{4}{n}} = \frac{2}{n + \frac{4}{n}} < \frac{2}{n}.$$

   En consecuencia, tomando $x_n = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y $y_n = \frac{2}{n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, por el teorema 4.5.5(2) concluimos que, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2+4} = 0$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0.$

   En efecto, como la sucesión de término n-ésimo, $y_n = (-1)^n$ es acotada y $(\frac{1}{n}) \to 0$, entonces por el teorema 4.5.5(3), $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0.$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

   En efecto, Si $a \geq 1$ y $b \geq 0$, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica que,

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + b^n \\ &\geq \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2. \qquad (13)\end{aligned}$$

   Luego, colocando $a = 1$ y $b = \sqrt[n]{n} - 1$ en (13) obtenemos que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}[1 + (\sqrt[n]{n} - 1)]^n &= n \geq \frac{n(n-1)}{2}(\sqrt[n]{n} - 1)^2 \\ &\Rightarrow \quad 1 \geq \frac{n-1}{2}(\sqrt[n]{n} - 1)^2 \\ &\Rightarrow \quad \sqrt{\frac{2}{n-1}} \geq \sqrt[n]{n} - 1 \geq 0.\end{aligned}$$

   Luego,

$$0 \leq \sqrt[n]{n} - 1 \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}. \qquad (14)$$

   Ahora, como $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\frac{2}{n-1}} = 0$ (para ver esto, verifique que $n_0 > \frac{2}{\varepsilon^2} + 1$ satisface la definición) , entonces por (14) y el teorema 4.5.5(2) se sigue que, $\lim\limits_{n\to\infty} [\sqrt[n]{n} - 1] = 0$. En consecuencia, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

4.6. Álgebra de Límites de Sucesiones

Teorema **4.6.1. (Operaciones con límites)**
Supongamos que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ *y que* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$*, entonces*

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b.$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = ab.$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}, \quad b \neq 0.$

4. *Sea* $x_n \geq 0$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*. Si* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$*, entonces* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n} = \sqrt{a}$*.*

Prueba:

1. Por la hipótesis, dado $\varepsilon > 0$ existen $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tales que $n > n_1$ implica que $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$, y $n > n_2$ implica que $|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$. Sea $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Así, $n > n_0$ implica que

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad y \quad |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{15}$$

Ahora, si $n > n_0$, por (15) obtenemos que,

$$|(x_n+y_n)-(a+b)| = |(x_n-a)+(y_n-b)| \leq |x_n-a|+|y_n-b| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Por lo tanto, $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$.

2. Obsérvese que,

$$x_n y_n - ab = x_n y_n - x_n b + x_n b - ab = x_n(y_n - b) + b(x_n - a). \tag{16}$$

Por otro lado, las sucesiones (x_n) y (b) es acotadas y además, $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - a) = \lim\limits_{n\to\infty}(y_n - b) = 0$. En consecuencia, por el teorema 4.5.5(3), 1 y (16) se sigue que.

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n - ab) = \lim_{n\to\infty} x_n(y_n - b) + \lim_{n\to\infty} b(x_n - a) = 0.$$

Así, $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = ab$.

3. Obsérvese que

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{x_n b - y_n a}{b y_n} = (x_n b - y_n a)\frac{1}{b y_n}. \tag{17}$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n b - y_n a) = 0$; por el teorema 4.5.5(3) y (17) basta probar que la sucesión $(z_n = \frac{1}{by_n})$ es acotada, para ver que 3 es cierto.
Sea $c = \frac{b^2}{2}$. Luego, $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n b) = b^2 > c > 0$, se sigue del teorema 4.5.5(1) que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica $c < y_n b$. Así, $z_n < \frac{1}{c}$ para todo $n > n_0$.
Sea $M = \max\{|z_1|, \ldots, |z_{n_0}|, \frac{1}{c}\}$; entonces $|z_n| < M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, la sucesión (z_n) es acotada y 3 queda probado.

4. Sea $a = 0$. Dado $\varepsilon > 0$, por la hipótesis existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n| < \varepsilon^2$ para todo $n > n_0$. En consecuencia, $|\sqrt{x_n}| < \varepsilon$ para todo $n > n_0$. Así, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n} = \sqrt{0} = 0$.
Sea $a \neq 0$. Dado $\varepsilon > 0$, por la hipótesis existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_0$, entonces

$$|x_n - a| < \varepsilon\sqrt{a}. \tag{18}$$

En consecuencia, si $n > n_0$, se sigue de (18) que,

$$|\sqrt{x_n} - \sqrt{a}| = \frac{|x_n - a|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{a}} \leq \frac{|x_n - a|}{\sqrt{a}} < \varepsilon.$$

Así, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n} = \sqrt{a}$.

∎

4.6.2.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$ si $|a| < 1$.

En efecto, supongamos que $0 < a < 1$. Como (a^n) es una sucesión decreciente y acotada inferiormente, entonces por el teorema 4.5.1, $(a^n) \to a = \inf\{a^n : 0 < a < 1 \ y \ n \in \mathbb{N}\}$.
Ahora, las subsucesiones $(a^{n^2}) \to a$ y $(a^{n^2+n}) \to a$. Así, a satisface la ecuación $a^2 = a$, pues $a^{n^2+n} = a^{n^2}a^n$. En consecuencia, $a = 0$ o $a = 1$. Como a no puede ser 1 (¿por qué?), entonces $a = 0$.

Nótese que,

$$\begin{aligned}
-1 < a < 0 \quad &\Rightarrow \quad 0 < |a| < 1 \\
&\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} |a|^n = 0 \\
&\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} |a^n| = 0 \\
&\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} |a^n - 0| = 0 \\
&\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a^n = 0.
\end{aligned}$$

Si $a = 0$, el resultado es evidente.

2. La sucesión (x_n) dada por $x_1 = \sqrt{2}$ y $x_n = \sqrt{2 + \sqrt{x_{n-1}}}$ $n \geq 2$ es acotada superiormente y es creciente. Luego, por el teorema 4.5.1, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $(x_n) \to a$. En consecuencia, a satisface $a = \sqrt{2 + \sqrt{a}}$. Es decir, $a^4 - 4a^2 - a + 4 = 0$.

El siguiente resultado nos permite resolver algunos límites de apariencia complicada.

Teorema **4.6.3.** *Sea $x_n > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = a$. Si $a < 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.*

Prueba: Como $a < 1$, entonces por un argumento de densidad existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $a < c < 1$. Luego, por el teorema 4,5,5(1) existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica $0 < \frac{x_{n+1}}{x_n} < c$. En consecuencia,

$$0 < x_{n+1} < cx_n < x_n, \tag{19}$$

para todo $n > n_0$. Por lo tanto, para todo $n > n_0$ la sucesión (x_n) es decreciente y acotada inferiormente. Así, por el teorema 4.5.1 existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $(x_n) \to b$. Además, por (19), $b \leq cb$, es decir,

$$(1 - c)b \leq 0. \tag{20}$$

Ahora, como $1 - c > 0$ y $b \geq 0$, entonces por (20) se sigue que, $b = 0$ y así, $(x_n) \to 0$. ∎

4.6.4.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n!} = 0$.

   En efecto, sea $a_n = \frac{n^2}{n!}$. Entonces

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2 n!}{n^2(n+1)!} = \frac{n+1}{n^2} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \to 0 < 1.$$

   Luego, por el teorema 4.6.3 $(x_n) \to 0$.

2. Consideremos la sucesión $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.
   Por el binómio de Newton tenemos que,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1}\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{n(n-1)\ldots[n-(n-1)]}{1\cdot 2\ldots n}\left(\frac{1}{n}\right)^n.$$

   En consecuencia,

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + 1 + \frac{1}{1\cdot 2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \ldots \\ &+ \frac{1}{1\cdot 2\ldots n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \qquad (21)\end{aligned}$$

   De (21) se sigue que (x_n) es creciente, pues cada uno de los sumandos (positivos) es mayor al pasar del valor n al valor $n+1$. Además, como cada expresión

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right), \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right), \ldots \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

   es menor que 1, se sigue de (21) que,

$$2 \leq x_n < 1 + 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}. \qquad (22)$$

   Además, como $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} < \frac{1}{2^2}, \ldots \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n} < \frac{1}{2^{n-1}}$ entonces, por (22) tenemos que,

$$2 \leq x_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots \frac{1}{2^{n-1}}. \qquad (23)$$

Ahora, como

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}}=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

entonces, por (23) se sigue que

$$2\leq x_n<1+2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}<3.$$

Así, la sucesión (x_n) es acotada y por el teorema 4.5.1 la sucesión (x_n) es convergente y por el corolario 4.5.7(2), $2\leq \lim\limits_{n\to\infty} x_n\leq 3$.
Escribimos, $e=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$. El número e es una de las constantes más famosas de las Matemáticas llamado número de Euler y su valor con diez cifras decimales es $e=2,7182818284$.

3. Si $0<a<e$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n n!}{n^n}=0$. En efecto, sea $x_n=\frac{a^n n!}{n^n}$. Entonces,

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{n^n a}{(n+1)^n}=a\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}\to\frac{a}{e}<1.$$

Luego, por el teorema 4.6.3 se sigue que $(x_n)\to 0$.

4.7. Sucesiones y Conceptos Topológicos

Teorema **4.7.1.**

1. *$a\in A'$ $\Leftrightarrow$ $\exists\ (x_n)\subset A\backslash\{a\}:\ (x_n)\to a$.*
2. *$a\in \overline{A}$ $\Leftrightarrow$ $\exists\ (x_n)\subset A:\ (x_n)\to a$.*
3. *$K\subset \mathbb{R}$ es compacto $\Leftrightarrow$ cada sucesión en K posee una subsucesión convergente en K.*

Prueba:

1. $(\Rightarrow)$ Si $a\in A'$, entonces procediendo como en la prueba del teorema 3.4.4(1) podemos hallar una sucesión $(x_n)\subset A\backslash\{a\}$ tal que $|x_n-a|<\frac{1}{n}$, para todo $n\in\mathbb{N}$. Así, $(x_n)\to a$.

($\Leftarrow$) Como $(x_n) \to a$, entonces dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica $x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Ahora, como $(x_n) \subset A \backslash \{a\}$, se sigue que $a \in A'$.

2. La prueba de este caso es similar al caso anterior. (Hacerla)

3. ($\Rightarrow$) Sea (x_n) una sucesión arbitraria en K. Como K es compacto, es acotado en $\mathbb{R}$. En consecuencia, (x_n) es una sucesión acotada en $\mathbb{R}$, entonces por el corolario 4.5.4, (x_n) posee una subsucesión convergente. Es decir, existen (x_{n_k}) y $a \in \mathbb{R}$ tal que $(x_{n_k}) \to a$. Ahora, por 2 y la hipótesis, $a \in \overline{K} = K$.

   ($\Leftarrow$) Supongamos que K no es compacto, es decir, K no es cerrado o K no es acotado.

   Si K no es cerrado, existe $(x_n) \subset K$ tal que $(x_n) \to a \notin K$. Luego, cualquier subsucesión de (x_n) converge a $a \notin K$ lo que contradice la hipótesis. Así, K es cerrado.

   Si K no es acotado, entonces para $x_1 \in K$ existiría $x_2 \in K$ tal que $|x_2| > x_1 + 1$, procediendo de esta manera obtendríamos una sucesión $(x_n) \subset K$ tal que $|x_{n+1}| > x_n + 1$. Así, cualquier subsucesión de (x_n) sería no acotada y por lo tanto no convergente en contradicción con la hipótesis.

∎

4.8. Límites infinitos para sucesiones

Definición **4.8.1.** *Una sucesión (x_n) se dice que tiene* **límite** $+\infty$ *y se escribe* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ *(o $(x_n) \to +\infty$), si dado $M > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica $x_n > M$.*
De manera análoga, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ *(o $(x_n) \to -\infty$), si dado $M > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica $x_n < -M$.*

Nota **4.8.2.**

1. De nuevo es necesario destacar que $+\infty$ y $-\infty$ no son números reales y cuando $(x_n) \to +\infty$ o $(x_n) \to -\infty$, entonces la sucesión es divergente.

2. Obsérvese que,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} (-x_n) = -\infty.$$

3. De la definición se sigue que

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty \;\Rightarrow (x_n)$ no es acotada superiormente.

   b) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty \;\Rightarrow\; (x_n)$ no es acotada inferiormente.

4.8.3.

1. Claramente, la sucesión con término n-ésimo $x_n = n^2[(-1)^n + 1]$ es no acotada superiormente, pero $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq +\infty$ ya que la subsucesión $(x_{2n-1}) \to 0$.
   Este ejemplo muestra que el recíproco de la nota 4.8.2(3a) no es cierto. De igual manera el recíproco de la nota 4.8.2(3b) no es cierto. (Dar un contraejemplo).

2. Si $a > 1$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = +\infty$.

   En efecto, como $a > 1$, entonces $a = 1 + h$ para algún $h > 0$. Luego, por la desigualdad de Bernoulli se tiene que

$$a^n = (1+h)^n \geq 1 + nh. \tag{24}$$

   Así, dado $M > 0$, sea $b = \frac{M-1}{h}$. Por ser $\mathbb{N}$ no acotado superiormente en $\mathbb{R}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > b$. Así, $1 + n_0 h > M$. En consecuencia, si $n > n_0$, entonces por (24)

$$1 + nh > 1 + n_0 h > M. \tag{25}$$

   Luego, por (24) y (25), $a^n > M$ cuando $n > n_0$. Por lo tanto,

$$(a^n) \to +\infty, \;\text{ si } a > 1.$$

Teorema **4.8.4.**

1. *Si (x_n) es una sucesión creciente y no acotada superiormente, entonces $(x_n) \to +\infty$. De manera análoga, si (x_n) es decreciente y no acotada inferiormente, entonces $(x_n) \to -\infty$.*

2. *Si $(x_n) \to +\infty$ y (y_n) es una sucesión acotada inferiormente, entonces $(x_n + y_n) \to +\infty$.*

3. *Si $(x_n) \to +\infty$ y existe $c > 0$ tal que $y_n > c$, para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $(x_n y_n) \to +\infty$.*

4. *Si $0 < c < x_n$, $y_n > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y $(y_n) \to 0$, entonces $(\frac{x_n}{y_n}) \to +\infty$.*

5. *Si (x_n) es acotada y $(y_n) \to +\infty$, entonces $(\frac{x_n}{y_n}) \to 0$.*

6. *Sea $x_n > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces, $(x_n) \to 0$ si sólo si $(\frac{1}{x_n}) \to +\infty$.*

Prueba:

1. Supongamos que (x_n) es una sucesión creciente y no acotada superiormente. Sea $M > 0$ arbitrario. Entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que
$$x_{n_0} > M. \tag{26}$$
Si $n > n_0$, por ser (x_n) creciente se sigue que
$$x_n > x_{n_0}. \tag{27}$$
Luego, por (26) y (27) si $n > n_0$, entonces $x_n > M$. Así, $(x_n) \to +\infty$. El segundo caso se prueba usando 2 de la nota 4.8.2

2. Como (y_n) es acotada inferiormente, existe K tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que
$$y_n \geq K. \tag{28}$$
Ahora, sea $M > 0$. Entonces como $(x_n) \to +\infty$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica
$$x_n > M(> M - K). \tag{29}$$

Así, por (28) y (29) para $n > n_0$ se sigue que

$$x_n + y_n > M - K + K = M.$$

Por lo tanto, $(x_n + y_n) \to +\infty$.

3. Sea $M > 0$ arbitrario. Como $(x_n) \to +\infty$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica que

$$x_n > \frac{M}{c}. \tag{30}$$

Luego, por la hipótesis y por (30) si $n > n_0$, entonces $x_n y_n > M$. Así, $(x_n y_n) \to +\infty$.

4. Sea $M > 0$ arbitrario. Como $(y_n) \to 0$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica que $y_n = |y_n - 0| < \frac{c}{M}$. Así,

$$\frac{1}{y_n} > \frac{M}{c}. \tag{31}$$

Luego, por la hipótesis y por (31) si $n > n_0$, entonces

$$\frac{x_n}{y_n} = x_n \frac{1}{y_n} > c\frac{M}{c} = M.$$

Así, $(\frac{x_n}{y_n}) \to +\infty$.

5. Como (x_n) es acotada, existe $K > 0$ tal que

$$|x_n| < K, \tag{32}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.
Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Como $(y_n) \to +\infty$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica que $y_n > \frac{K}{\varepsilon}$. En consecuencia, si $n > n_0$, entonces

$$\frac{1}{y_n} < \frac{\varepsilon}{K}. \tag{33}$$

Luego, por (32) y (33), si $n > n_0$, entonces

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - 0\right| = \left|\frac{x_n}{y_n}\right| = |x_n|\frac{1}{|y_n|} = |x_n|\frac{1}{y_n} < \frac{\varepsilon}{K}K = \varepsilon.$$

Así, $(\frac{x_n}{y_n}) \to 0$.

6. ($\Rightarrow$) Supongamos que $(x_n) \to 0$. Entonces dado $M > 0$ arbitrario, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $0 < x_n < \frac{1}{M}$. Así, $n > n_0$ implica que $\frac{1}{x_n} > M$. Por lo tanto, $(\frac{1}{x_n}) \to +\infty$.

   ($\Leftarrow$) Supongamos que $(\frac{1}{x_n}) \to +\infty$. Entonces para $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica que $\frac{1}{x_n} > \frac{1}{\varepsilon}$. Así, $n > n_0$ implica que $x_n < \varepsilon$. por lo tanto $(x_n) \to 0$.

■

Nota **4.8.5.**

1. Las hipótesis tomadas en el teorema 4.8.4, aseguran la veracidad de las conclusiones, pues con ellas evitamos las famosas indeterminaciones como $+\infty - \infty$ (sobre este tipo de expresiones es imposible concluir a priori sobre la existencia o no del límite). Además, se excluyen indeterminaciones tales como $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$. Recordemos que los límites más interesantes en el Cálculo son aquellos que presentan indeterminaciones.

2. Las partes 2,3,4 y 5 del teorema 4.8.4 pueden extenderse cuando el límite de la sucesión es $-\infty$.

4.8.6.

1. Sea $x_n = \frac{n^p}{a^n}$, $p \in \mathbb{N}$ y $a > 1$. Entonces $(\frac{a^n}{n^p}) \to +\infty$.
   En efecto, consideremos el cociente
   $$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a^n(n+1)^p}{a^n a n^p} = \frac{1}{a}\left(1+\frac{1}{n}\right)^p \to \frac{1}{a} < 1.$$
   Luego, por el teorema 4.6.3, $(x_n) \to 0$ y por el teorema 4.8.4(6), $(\frac{a^n}{n^p}) \to +\infty$.

2. Si $\alpha_n = n^p$ y $\beta_n = a^n$, $a > 1$ y $p \in \mathbb{N}$. Entonces $(\alpha_n) \to +\infty$ y $(\beta_n) \to +\infty$, pero $(\frac{\alpha_n}{\beta_n}) \to 0$.

3. Sea $x_n = n[2+(-1)^n]$ y $y_n = n$. Claramente, $(x_n) \to +\infty$ y $(y_n) \to +\infty$, pero $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$ no existe.

4.9. Tipos de Sucesiones

Definición **4.9.1.** *Una sucesión* (x_n) *se llama de* **Cauchy** *si*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ n_0 = n(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \ n, m > n_0 \quad \Rightarrow \quad |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Dos sucesiones (x_n) *y* (y_n) *se llaman* **Paralelas** *y se escribe* $(x_n) \parallel (y_n)$ *si*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ n_0 = n(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \ n > n_0 \quad \Rightarrow \quad |x_n - y_n| < \varepsilon.$$

Dos sucesiones (x_n) *y* (y_n) *se llaman* **Equivalentes** *y se escribe* $(x_n) \approx (y_n)$ *si*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ n_0 = n(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \ n, m > n_0 \quad \Rightarrow \quad |x_n - y_m| < \varepsilon.$$

Nota **4.9.2.**

1. La condición de Cauchy garantiza que los términos x_n para valores suficientemente grandes de n y m se aproximan arbitrariamente unos a otros.

2. La condición de equivalencia garantiza que los términos x_n y y_n de dos sucesiones, se aproximan arbitrariamente para valores de n y m suficientemente grandes.

3. De la definición se sigue que dos sucesiones (x_n) y (y_n) de números reales son paralelas si y sólo si la sucesión $(|x_n - y_n|)$ converge a 0. Es decir,
$$(x_n) \parallel (y_n) \quad \Leftrightarrow \quad (|x_n - y_n|) \to \ 0.$$
Así, dos sucesiones (x_n) y (y_n) son paralelas si sus términos se aproximan arbitrariamente para valores de n suficientemente grandes.

4.9.3.

1. La sucesión de término n-ésimo $x_n = \frac{1}{n}$ es de Cauchy.
En efecto, dado $\varepsilon > 0$, por la propiedad Arquimediana de $\mathbb{R}$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$.
Si $n, m > n_0$, entonces $\frac{1}{n}, \frac{1}{m} < \frac{1}{n_0}$. En consecuencia,
$$|x_n - x_m| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_0} = \frac{2}{n_0} < \varepsilon.$$
Así, (x_n) es de Cauchy.

2. Las sucesiones con términos n-ésimos $x_n = \frac{1}{n}$ y $y_n = \frac{2}{n}$ son paralelas.

En efecto, basta observar que, $\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{1}{n} - \frac{2}{n}| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

3. Las sucesiones con términos n-ésimos $x_n = \frac{1}{n}$ y $y_n = \frac{(-1)^n}{n}$ son paralelas.

En efecto, basta ver que, $\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{1}{n} - \frac{(-1)^n}{n}| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}|1 - (-1)^n| = 0$.

4. Las sucesiones de términos n-ésimos, $x_n = \frac{1}{n}$ y $y_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$ son equivalentes.

En efecto, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$. Luego, si $m, n > n_0$, entonces $\frac{1}{m^2}, \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$. En consecuencia,
$$|x_n - x_m| = \left|\frac{1}{n} - \frac{(-1)^m}{m^2}\right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m^2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$
Así, las sucesiones (x_n) y (y_n) son equivalentes.

Teorema **4.9.4.** *Sean (x_n) y (y_n) sucesiones de números reales y $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces:*

1. $(x_n) \to a \;\Rightarrow\; (x_n)$ *es de Cauchy.*

2. $(x_n) \parallel (x_n)$.

3. (x_n) *es de Cauchy* $\Leftrightarrow\; (x_n) \approx (x_n)$.

4. $(x_n) \to a$ *y* $(y_n) \to a \quad \Rightarrow \quad (x_n) \approx (y_n)$.

5. $(x_n) \approx (y_n) \quad \Rightarrow \quad (x_n) \parallel (y_n)$.

6. $(x_n) \approx (y_n) \quad \Rightarrow \quad (x_n)$ *y* (y_n) *son de Cauchy.*

7. (x_n) *y* (y_n) *de Cauchy y* $(x_n) \parallel (y_n) \quad \Leftrightarrow \quad (x_n) \approx (y_n)$.

8. $(x_n) \to a$ *y* $(y_n) \parallel (x_n) \quad \Rightarrow \quad (y_n) \to a$.

9. (x_n) *de Cauchy y* $(y_n) \parallel (x_n) \quad \Rightarrow \quad (y_n)$ *es de Cauchy.*

10. $(x_n) \approx (y_n) \quad \Leftrightarrow$ *la sucesión* $(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots)$ *es de Cauchy.*

Prueba:

1. Sea $\varepsilon > 0$. Entonces por la hipótesis existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica que $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. En consecuencia, si $n, m > n_0$, entonces $|x_n - x_m| \leq |x_n - a| + |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.
   Así, (x_n) es de Cauchy.

2. Como para todo $\varepsilon > 0$, $|x_n - x_n| = 0 < \varepsilon$. Entonces cualquier $n_0 \in \mathbb{N}$ satisface que $n > n_0$ implica que $|x_n - x_n| < \varepsilon$ y así, $(x_n) \parallel (x_n)$.

3. Este resultado es evidente de las definiciones.

4. Dado $\varepsilon > 0$. Entonces por la hipótesis existen $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tales que
   $$\left[n > n_1 \quad \Rightarrow \quad |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}\right] \quad y \quad \left[n > n_2 \quad \Rightarrow \quad |y_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}\right].$$
   En consecuencia, si $n > n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, entonces
   $$|x_n - x_m| \leq |x_n - a| + |y_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$
   Así, $(x_n) \approx (y_n)$.

5. Para probar este resultado basta tomar $m = n$ en la definición de sucesiones equivalentes para obtener sucesiones paralelas.

6. Dado $\varepsilon > 0$. Entonces por hipótesis existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n, m > n_1$ implica que $|x_n - y_m| < \frac{\varepsilon}{2}$.
En particular, si $m = n$, entonces $|x_m - y_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ siempre que $m > n_0$.
En consecuencia,

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - y_m| + |y_m - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

siempre que $m, n > n_0$ y por lo tanto, (x_n) es de Cauchy.

7. ($\Rightarrow$) Dado $\varepsilon > 0$. Por la hipótesis, existen $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tales que

$$n > n_1 \quad \Rightarrow \quad |x_n - y_n| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad m, n > n_2 \quad \Rightarrow \quad |y_n - y_m| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

En consecuencia, si $m, n > n_0 = \text{máx}\{n_1, n_2\}$, entonces

$$|x_n - y_m| \leq |x_n - y_n| + |y_n - y_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Así, $(x_n) \approx (y_n)$.

($\Leftarrow$) Como $(x_n) \approx (y_n)$, entonces por 6 y 7 se sigue que $(x_n) \parallel (y_n)$ y que (x_n) y (y_n) son de Cauchy.

8. Dado $\varepsilon > 0$. Por la hipótesis, existen $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tales que

$$\left[n > n_1 \quad \Rightarrow \quad |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}\right] \quad y \quad \left[n > n_2 \quad \Rightarrow \quad |x_n - y_n| < \frac{\varepsilon}{2}\right].$$

En consecuencia, si $n > n_0 = \text{máx}\{n_1, n_2\}$, entonces

$$|y_n - a| \leq |y_n - x_n| + |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Así, $(y_n) \to a$.

9. Dado $\varepsilon > 0$. Por la hipótesis, existen $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tales que

$$\left[n > n_1 \quad \Rightarrow \quad |x_n - y_n| < \frac{\varepsilon}{3}\right] \quad y \quad \left[m, n > n_2 \quad \Rightarrow \quad |x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{3}\right].$$

En consecuencia, si $n > n_0 = \text{máx}\{n_1, n_2\}$ entonces

$$|y_n - y_m| \leq |y_n - x_n| + |x_n - x_m| + |x_m - y_m| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Así, (y_n) es de Cauchy.

10. $(\Rightarrow)$ Nótese que, la sucesión $(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots)$ se puede escribir como:

$$z_n = \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}} & \text{si } n \text{ } es \text{ } impar \\ y_{\frac{n}{2}} & \text{si } n \text{ } es \text{ } par \end{cases}$$

Ahora, veamos que la sucesión (z_n) es de Cauchy.
Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario, como $(x_n) \approx (y_n)$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n, m > n_0 \quad \Rightarrow \quad |x_n - y_m| < \varepsilon.$$

Afirmamos que, $k_0 = 2n_0$ satisface que

$$j, k > k_0 \quad \Rightarrow \quad |z_j - z_k| < \varepsilon.$$

En efecto, basta ver que si $i \in \mathbb{N}$, entonces

$$i > k_0 = 2n_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{i+1}{2} > \frac{2n_0+1}{2} = n_0 + \frac{1}{2} > n_0.$$
$$i > k_0 = 2n_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{i}{2} > \frac{2n_0}{2} = n_0.$$

Así, en cualquier caso, si $j, k > k_0$, entonces $|z_j - z_k| < \varepsilon$ y por lo tanto, la sucesión $(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots)$ es de Cauchy.

$(\Leftarrow)$ Como (z_n) es de Cauchy en $\mathbb{R}$, entonces existe $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$(z_n) \to a.$$

Por otro lado, (x_n) y (y_n) son subsucesiones de (z_n), luego,

$$(x_n) \to a \quad y \quad (y_n) \to a.$$

En consecuencia, por 4, se sigue que, $(x_n) \approx (y_n)$.

∎

Nota 4.9.5.

1. El recíproco de 6 del teorema 4.9.4 no es cierto. Para ver esto basta tomar $(x_n) = (y_n) = ((-1)^n)$. Las sucesiones (x_n) y (y_n) son paralelas sin embargo $(x_n) \not\approx (y_n)$.

2. Dos sucesiones (x_n) y (y_n) pueden ser paralelas sin ser cada una de Cauchy.
   En efecto, basta tomar $(x_n) = (y_n) = (-1)^n$.

3. El recíproco de 7 del teorema 4.9.4 no es cierto. Para ver esto basta tomar $(x_n = \frac{1}{n})$ y $(y_n = \frac{1}{n} + 100)$. Claramente, (x_n) y (y_n) son de Cauchy pero $(x_n) \not\sim (y_n)$.

4.10. Límites de Funciones

Definición **4.10.1.** *Sean $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto, $f : A \to \mathbb{R}$ una función y $a \in A'$. Un número $L \in \mathbb{R}$ es el* **límite** *de $f(x)$ cuando x tiende para a y se escribe $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ (o $f(x) \to L$ $(x \to a)$), cuando:*

Dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe $\delta = \delta(\varepsilon, a)$[2] > 0 tal que si $x \in A$ y $0 < |x-a| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$. (Ver, Figura 4.4)

En símbolos

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \;\Leftrightarrow\; [\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 :\ x \in A \text{ y } 0 < |x-a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - L| < \varepsilon].$$

Nota **4.10.2.**

1. Obsérvese que, el límite L de una función es simplemente un número real.

2. Nótese que la función f no tiene por que estar definida en $x = a$.

3. De la definición se sigue que, si $V_\delta = (A\backslash\{a\}) \cap (a-\delta, a+\delta)$, entonces
$$\lim_{x\to a} f(x) = L \quad\Leftrightarrow\quad [\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : x \in V_\delta \;\Rightarrow\; f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)]$$
$$\lim_{x\to a} f(x) = L \quad\Leftrightarrow\quad \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 :\ f(V_\delta) \subset (L-\varepsilon, L+\varepsilon).$$

4. Supongamos que $a \notin A'$, entonces veamos que cualquier $L \in \mathbb{R}$ puede satisfacer que, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$.

   En efecto, sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Como $a \notin A'$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $V_\delta = \emptyset$. En consecuencia, $f[V_\delta] = f(\emptyset) = \emptyset \subset (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$.

[2] Esta notación indica que el δ depende de ε y de a.

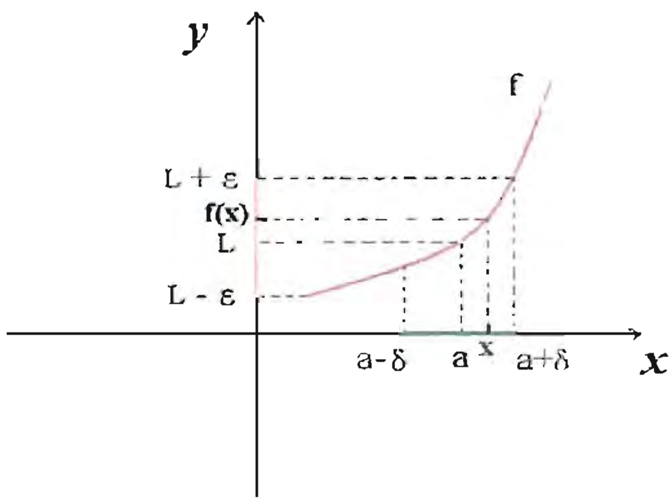

Figura 4.4: Límite de una Función

5. De 4, se sigue que, no tiene sentido hablar de límite de $f(x)$ cuando x tiende para a, si $a \notin A'$.

6. Obsérvese que, $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq L$ si y sólo si

$$\exists\ \varepsilon > 0 : \ \forall \delta > 0\ \exists\ x = x(\delta) \in A : \ 0 < |x - a| < \delta \ \ y \ \ |f(x) - L| \geq \varepsilon.$$

7. La noción de límite es **local**, es decir:

Dadas las funciones $f, g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y dado $a \in A'$, si existe una vecindad V de a tal que $f(x) = g(x)$ para todo $x (\neq a) \in V \cap A$, entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe si y sólo si $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existe. En tal caso, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

En efecto, supongamos que existe una vecindad V de a tal que $f(x) = g(x)$ para todo $x(\neq a) \in V \cap A$ y que $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe.
Como V es una vecindad de a ($a \in V^\circ$), existe δ_1 tal que $a \in (a - \delta_1, a + \delta_1) \subset V$. Entonces $f(x) = g(x)$ para todo $x \in V_{\delta_1}$.
Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \in \mathbb{R}$, entonces dado $\varepsilon > 0$ arbitrario existe $\delta_2 > 0$ tal

que $x \in V_{\delta_2}$ implica $|f(x) - L| < \varepsilon$.
Luego, para todo $x \in V_\delta(\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\})$, se verifica que

$$g(x) = f(x) \quad y \quad |f(x) - L| < \varepsilon.$$

En consecuencia, si $x \in V_\delta$, entonces $f(x) = g(x)$ y así, $|g(x) - L| < \varepsilon$.
Por lo tanto, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L$.
El recíproco se prueba de manera similar.

4.10.3.

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = c$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Entonces $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$.

   En efecto, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, cualquier $\delta > 0$ satisface que

   $$0 < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |c - c| = 0 < \varepsilon.$$

   Así, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$.

2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x$. Entonces, $\lim\limits_{x \to a} x = a$.

   En efecto, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, tomemos $\delta = \varepsilon$. Entonces

   $$0 < |x - a| < \delta = \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |x - a| < \varepsilon.$$

   Así, $\lim\limits_{x \to a} x = a$.

3. La función de Dirichlet $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (ver, Figura 4.5) dada por,

   $$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

   satisface que $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq L$, para todo $L \in R$.

   En efecto, supongamos que existe $L \in \mathbb{R}$ tal que, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$. Entonces para $\varepsilon = \frac{1}{2}$, existe $\delta > 0$ tal que, $0 < |x - a| < \delta$ implica $|f(x) - L| < \frac{1}{2}$.
   Ahora, el conjunto $(a - \delta, a + \delta)\backslash\{a\}$ contiene $x \in \mathbb{Q}$ y $x \notin \mathbb{Q}$. Luego, por la definición de f obtenemos que $|0 - L| < \frac{1}{2}$ y $|1 - L| < \frac{1}{2}$, lo cual es imposible (¿por qué?). Así, $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq L$, para cualquier $L \in \mathbb{R}$.

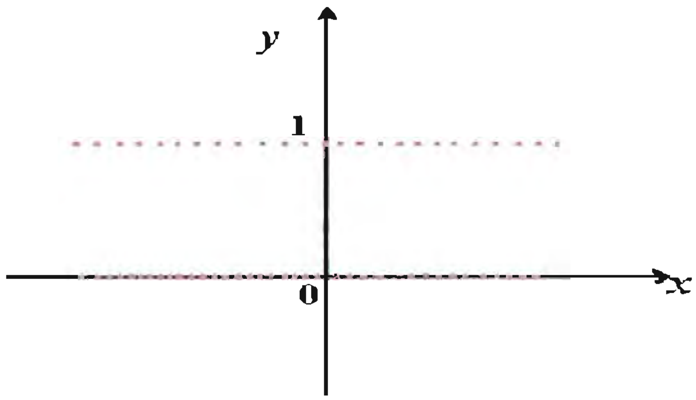

Figura 4.5: Función de Dirichlet

4. Sean $c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ fijo y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función dada por,

$$f(x) = \begin{cases} c & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -c & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Entonces $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$ si $a \geq 0$ y $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -c$ si $a < 0$. Además, $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ no existe.

En efecto, sea $a > 0$. Dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, tomemos $\delta = a$. Entonces

$$0 < |x - a| < a \quad \Rightarrow \quad 0 < x < 2a \quad \Rightarrow \quad |f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon.$$

Así, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$ si $a > 0$. De manera similar se prueba que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -c$ si $a < 0$.
Si $a = 0$, veamos que $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq L$, para cualquier $L \in \mathbb{R}$.
Supongamos que existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$. Si $c > 0$, sea $\varepsilon = \frac{c}{2}$, entonces existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \frac{c}{2}.$$

Ahora, como el conjunto $(-\delta, \delta)\setminus\{0\}$ contiene $x > 0$ y $x < 0$, entonces

$$|c - L| < \frac{c}{2} \quad y \quad |-c - L| < \frac{c}{2}.$$

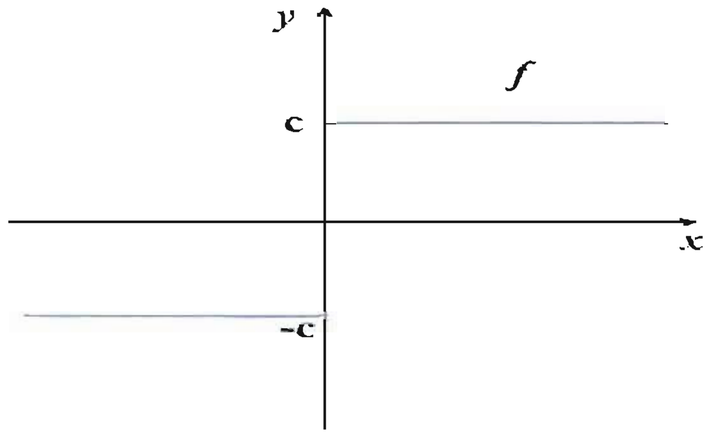

Figura 4.6: Función Constante

Así, $L \in (\frac{c}{2}, -\frac{3c}{2})$ y $L \in (-\frac{3c}{2}, -\frac{c}{2})$, lo cual es imposible. Si $c < 0$, tómese $\varepsilon = -\frac{c}{2}$ y procediendo como antes llegamos a una contradicción. Por lo tanto, $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq L$, para cualquier $L \in \mathbb{R}$.

5. $\lim\limits_{x\to 1} x^2 = 1$.

En efecto, sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Queremos hallar $\delta > 0$ tal que $0 < |x-1| < \delta$ implique que $|x^2 - 1| < \varepsilon$.
Como $|x^2 - 1| = |x-1||x+1|$, entonces debemos acotar el factor $|x+1|$. Sea $\delta = 1$ (cualquier otro $\delta > 0$ funciona). Luego, $|x-1| < 1$ implica $|x+1| < 2$. Por lo tanto, si tomamos $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{2}, 1\}$, se verifica que

$$0 < |x-1| < \delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{2}, 1\right\} \quad \Rightarrow \quad |x^2 - 1| < 2|x-1| < 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Así, $\lim\limits_{x\to 1} x^2 = 1$.

4.11. Límites de Funciones y Sucesiones

El siguiente teorema nos permite caracterizar el límite de una función en base a sucesiones.

Teorema 4.11.1. *Sean $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $a \in A'$. Entonces*

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad [\forall (x_n) \subset A\backslash\{a\} : (x_n) \to a \;\Rightarrow\; (f(x_n)) \to \; L].$$

Prueba: ($\Rightarrow$) Supongamos que $f(x) \to L$ ($x \to a$) y sea $(x_n) \subset A\backslash\{a\}$ tal que $(x_n) \to a$. Probemos que $(f(x_n)) \to L$.
Como $f(x) \to L$ ($x \to a$), entonces para $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe $\delta > 0$ tal que $x \in A$, $0 < |x - a| < \delta$ implica que

$$|f(x) - L| < \varepsilon. \tag{34}$$

Por otro lado, como $(x_n) \to a$, entonces para el $\delta > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica que

$$0 < |x_n - a| < \delta \tag{35}$$

pues $x_n \neq a$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, por (34) y (35) si $n > n_0$, entonces $|f(x_n) - L| < \varepsilon$. Así, $(f(x_n)) \to L$.

($\Leftarrow$) Supongamos que para toda sucesión $(x_n) \subset A\backslash\{a\}$ tal que $(x_n) \to a$ implica $(f(x_n)) \to L$. Probemos que $f(x) \to L$ ($x \to a$).
Supongamos que $f(x) \not\to L$ ($x \to a$). Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$, existe $x \in A$, $0 < |x - a| < \delta$ y $|f(x) - L| \geq \varepsilon$.
Luego, si $\delta = \frac{1}{n}$ $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in (A\backslash\{a\})$ tal que

$$0 < |x_n - a| < \frac{1}{n} \quad y \quad |f(x_n) - L| \geq \varepsilon.$$

Así, $(x_n) \to a$, pero $(f(x_n)) \not\to L$, lo que contradice la hipótesis. Por lo tanto, $f(x) \to L$ ($x \to a$). ∎

Corolario 4.11.2.

1. *Sean $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $a \in A'$. Si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim_{x\to a} f(x) = M$, entonces $L = M$ (Unicidad del límite).*

2. *Sean $f, g : A \subset \mathbb{R}$ y $a \in A'$. Si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim_{x\to a} g(x) = M$. Entonces*

   a) $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = L + M$.

   b) $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = LM$.

c) $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$, $M \neq 0$.

d) *Si* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ *y* g *es una función acotada en una vecindad de* a, *entonces* $\lim\limits_{x \to a} f(x)g(x) = 0$.

3. Sean $f, g, h : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in A'$ *y* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = L$. *Si* $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ *para todo* $x \in A \backslash \{a\}$, *entonces* $\lim\limits_{x \to a} h(x) = L$.

Prueba:

1. Sea $(x_n) \subset A \backslash \{a\}$ tal que $(x_n) \to a$. Entonces por la hipótesis y teorema 4.11.1, $(f(x_n)) \to L$ y $(f(x_n)) \to M$. Luego, por el teorema 4.4.4(1), $L = M$.

2. Sea $(x_n) \subset A \backslash \{a\}$ tal que $(x_n) \to a$. Entonces por la hipótesis y el teorema 4.4.4(1), $(f(x_n)) \to L$ y $(g(x_n)) \to M$. Luego, por el teorema 4.6.1(1), se sigue que $(f(x_n) + g(x_n)) \to L + M$, $(f(x_n)g(x_n)) \to LM$ y $(\frac{f(x_n)}{g(x_n)}) \to \frac{L}{M}$ $M \neq 0$.
En consecuencia, por el teorema 4.11.1, (a),(b) y (c) son ciertos.

   Sea V una vecindad de a. Entonces por la hipótesis, existe $M > 0$ tal que

$$|g(x)| \leq M, \tag{36}$$

   para todo $x \in V$. Sea $(x_n) \subset A \backslash \{a\}$ tal que $(x_n) \to a$. Entonces, para la vecindad V de a, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica $x_n \in V$.
En consecuencia, por (36) si $n > n_0$, entonces $|g(x_n)| \leq M$.
Por lo tanto, $(g(x_n))$ es una sucesión acotada en V y además por la hipótesis $f(x_n) \to 0$. Así, por el teorema 4.5.5(3), $(f(x_n)g(x_n)) \to 0$ y por el teorema 4.11(1), se sigue que $\lim\limits_{x \to a} f(x)g(x) = 0$. Así, (d) es cierto.

3. Sea $(x_n) \subset A \backslash \{a\}$ tal que $(x_n) \to a$. Entonces por la hipótesis

$$(f(x_n)) \to L \quad y \quad (g(x_n)) \to L. \tag{37}$$

   Por otro lado, como $(x_n) \subset A \backslash \{a\}$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$f(x_n) \leq h(x_n) \leq g(x_n). \tag{38}$$

Luego, por (37), (38) y el teorema 4,5,5(2) se sigue que $(h(x_n)) \to L$. En consecuencia, por el teorema 4.11.1, $\lim\limits_{x\to a} h(x) = L$.

Nota **4.11.3.**

1. Del teorema 4.11.1, obtenemos una condición suficiente para que $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq L$, a saber:

   Si existe $(x_n) \subset A\backslash\{a\}$, tal que $(x_n) \to a$, pero $(f(x_n)) \not\to L$, entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq L$.

2. También del teorema 4.11.1, obtenemos una condición suficiente para que $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ no exista, a saber:

   Si existen $(x_n), (y_n) \subset A\backslash\{a\}$ tales que $(x_n) \to a$ y $(y_n) \to a$, pero $(f(x_n)) \to L$ y $(f(y_n)) \to M$ con $M \neq L$, entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ no existe.

4.11.4.

1. $\lim\limits_{x\to a} \operatorname{sen}(\frac{1}{x})$ no existe.

   En efecto, supongamos que existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $L = \lim\limits_{x\to a} \operatorname{sen}(\frac{1}{x})$.
   Sean $x_n = \frac{1}{n\pi}$, $n \in \mathbb{N}$ y $y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+n\pi}$ $n \in \mathbb{N}$. Claramente, $(x_n) \to 0$ y $(y_n) \to 0$.
   Por otro lado, la función $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \operatorname{sen}(\frac{1}{x})$, satisface que

   $$f(x_n) = \operatorname{sen}(n\pi) = 0 \quad y \quad f(y_n) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = 1,$$

   para todo $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia, $(f(x_n)) \to 0$ y $(f(y_n)) \to 1$. Así, L no es único y por lo tanto, $\lim\limits_{x\to a} \operatorname{sen}(\frac{1}{x})$ no existe.

2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

   $$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

   Entonces, $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ no existe (para todo $a \neq 0$) y $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

En efecto, veamos que existen sucesiones $(x_n) \subset \mathbb{Q}$ y $(y_n) \subset \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ tales que $(x_n) \to a$ y $(y_n) \to a$ $(a \neq 0)$, pero $f(x_n) \to a$ y $f(y_n) \to 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $a \in (a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n})$. Como $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in \mathbb{Q} \cap [(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n})\backslash\{a\}]$ (obsérvese que, es posible tomar $x_n \neq a$, para todo $n \in \mathbb{N}$). Así, $(x_n) \to a$.
De manera similar se prueba la existencia de (y_n). En consecuencia, de la definición de f obtenemos que

$$f(x_n) = x_n \quad y \quad f(y_n) = 0,$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego, $(f(x_n)) \to a$ y $(f(y_n)) \to 0$, como $x_n \neq a$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $a \neq 0$, se sigue que $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ no es único. Esta contradicción conduce a que $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ no existe, cuando $a \neq 0$.

Veamos que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.
Dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, tomemos $\delta = \varepsilon$. Luego, como el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : \ 0 < |x| < \delta\}$ contiene $x \in \mathbb{Q}$ y $x \notin \mathbb{Q}$, se sigue por la definición de f que $|f(x)| = |x|, \quad x \in \mathbb{Q}$ y $|f(x)| = 0, \quad x \notin \mathbb{Q}$. En consecuencia,

$$0 < |x| < \delta = \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |f(x) - 0| < \varepsilon.$$

Así, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

Teorema 4.11.5. *Sean $f, g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in A'$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$. Si $L < M$, entonces existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in V_\delta$, se verifica que $f(x) < g(x)$.*

Prueba: Como $M > L$, sea $\varepsilon = \frac{M-L}{2}$. Luego, por la hipótesis existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que

$$x \in A,\ 0 < |x - a| < \delta_1 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \frac{M - L}{2} \qquad y$$

$$x \in A,\ 0 < |x - a| < \delta_1 \quad \Rightarrow \quad |g(x) - M| < \frac{M - L}{2}.$$

En consecuencia, si $x \in A$ y $0 < |x - a| < \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, entonces

$$L - \frac{M - L}{2} < f(x) < L + \frac{M - L}{2} \quad y \quad M - \frac{M - L}{2} < g(x) < M - \frac{M - L}{2}.$$

Así, $f(x) < \frac{L+M}{2}$ y $\frac{L+M}{2} < g(x)$ para todo $x \in V_\delta$.
Por lo tanto, $f(x) < g(x)$, para todo $x \in V_\delta$. ∎

Corolario 4.11.6. *Sean $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in A'$. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L < M$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $x \in V_\delta$ implica que $f(x) < M$.*

Prueba: Basta tomar $g(x) = M$, para todo $x \in A$ y aplicar el teorema 4.11.5. ∎

Corolario 4.11.7. *Sean $f, g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in A'$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$. Si $f(x) < g(x)$ para todo $x \in A\backslash\{a\}$, entonces $L \leq M$.*

Prueba: Supongamos que $M < L$, entonces por el teorema 4.11.5, existe $\delta > 0$ tal que $x \in V_\delta$ implica que $g(x) < f(x)$, lo que contradice a la hipótesis. Así, $L \leq M$. ∎

Nota **4.11.8.**

1. El teorema 4.11.5 y los corolarios 4.11.6 y 4.11.7 tienen sus versiones análogas cuando $M < L$, $L > M$ y $f(x) \geq g(x)$ (para todo $x \in A\backslash\{a\}$) respectivamente.

2. De la nota 4.10.2(7) se sigue que en el corolario 4.11.2(3) basta suponer que $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ para todo $x \in V$, donde V es una vecindad de a.
   Lo mismo ocurre con el teorema 4.11.5 y el corolario 4.11.7.

4.11.9.

Puede suceder que, $f(x) \neq g(x)$, para cada $x \in \mathbb{R}$ y $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x)$. Para ver esto basta tomar $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como, $f(x) = x$, $g(x) = -x$ y $a = 0$. Por lo tanto la hipótesis $L < M$ no puede ser sustituida por $L \leq M$ en el teorema 4.11.5.

4.12. Límites Laterales

Definición **4.12.1.** *Sean $f : A \to \mathbb{R}$, $a \in A'_+$. Un número real L se llama* **límite a la derecha** *de f(x) cuando x tiende para a y se escribe $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$ (o $f(x) \to L(x \to a^+)$) cuando dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe*

$\delta > 0$ *tal que* $x \in A$ *y* $0 < x - a < \delta$ *implica que* $|f(x) - L| < \varepsilon$.

En símbolos:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L \Leftrightarrow [\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 : \ x \in A \ y \ 0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon].$$

Análogamente, sean $f : A \subset \mathbb{R}$, $a \in A'_-$. *Un número real* L *se llama* **límite a la izquierda** *de f(x) cuando* x *tiende para* a *y se escribe* $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ *(o* $f(x) \to L(x \to a^-)$*) cuando dado* $\varepsilon > 0$ *arbitrario, existe* $\delta > 0$ *tal que* $x \in A$ *y* $0 < a - x < \delta$ *implica que* $|f(x) - L| < \varepsilon$.

En símbolos:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L \Leftrightarrow [\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 : \ x \in A \ y \ 0 < a - x < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon].$$

Nota **4.12.2.**

1. Los límites, $\lim_{x \to a^+} f(x)$ y $\lim_{x \to a^-} f(x)$ son llamados **límites laterales**.

2. El teorema 4.11.5, y los corolarios 4.11.6 y 4.11.7 siguen siendo válidos para los límites laterales.

3. Las propiedades generales sobre los límites se adecuan a los límites laterales, pues los límites $\lim_{x \to a^+} f(x)$ y $\lim_{x \to a^-} f(x)$ son simplemente límites ordinarios aplicados a las funciones $g = f_{|A \cap (a, +\infty)}$ y $g = f_{|A \cap (-\infty, a)}$ respectivamente.

4. El teorema 4.11.1 en el caso de límite por la derecha puede escribirse:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad [\forall\, (x_n) A \cap (a, \infty) : \ (x_n) \to a \ \Rightarrow \ (f(x_n)) \to L].$$

Teorema **4.12.3.** *Sean* $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función,* $a \in A'_+ \cap A'_-$. *Entonces*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \ \exists \lim_{x \to a^+} f(x), \lim_{x \to a^-} f(x) \ y \ \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L.$$

Prueba: ($\Rightarrow$) Supongamos que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$. Entonces, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario existe $\delta > 0$ tal que, $x \in A$ y $0 < |x-a| < \delta$ implica que $|f(x)-L| < \varepsilon$. Ahora, como $|x-a| < \delta$ si y sólo si $x - a < \delta$ y $a - x < \delta$, entonces si $x - a < \delta$ se sigue que $|f(x) - L| < \varepsilon$, y $a - x < \delta$ se sigue que $|f(x) - L| < \varepsilon$.
Así, existen $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$.

($\Leftarrow$) Supongamos que existen $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ y que

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L.$$

Entonces dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que, $x \in A$ y $0 < x - a < \delta_1$ implica que $|f(x) - L| < \varepsilon$; y $x \in A$ y $0 < a - x < \delta_2$ implica que $|f(x) - L| < \varepsilon$.
Sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, entonces $0 < x-a < \delta$ y $0 < a-x < \delta$. En consecuencia, $0 < |x-a| < \delta$ y por lo tanto, $|f(x) - L| < \varepsilon$.
Así, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$. ∎

Nota **4.12.4.**

El teorema 4.12.3 nos da una condición suficiente para que $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ no exista, a saber

Si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$ *y* $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = M$, *con* $L \neq M$, *entonces* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ *no existe.*

4.12.5.

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = [x]$ (parte entera de x). Sea $n \in \mathbb{Z}$ (fijo), luego, $\lim\limits_{x\to n} [x]$ no existe, pues $\lim\limits_{x\to n^+} [x] = n$ y $\lim\limits_{x\to n^-} [x] = n - 1$. Así, $\lim\limits_{x\to n} f(x)$ no existe, para cada $n \in \mathbb{Z}$ fijo.

2. Sea $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{x}$. Claramente, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ no existen y en consecuencia, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ no existe.

3. Sea $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{x}{|x|}$. Entonces $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$ y $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -1$. Así, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ no existe.

4. La función $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = a^{-\frac{1}{x}}$, $a > 0$, satisface que $\lim\limits_{x\to 0^+} a^{-\frac{1}{x}} = 0$, pero $\lim\limits_{x\to 0^-} a^{-\frac{1}{x}}$ no existe. Así, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ no existe.

4.13. Funciones Monótonas

Definición **4.13.1.** *Una función $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se llama* **monótona no decreciente** *cuando para cada $x, y \in A$, se verifica,*

$$x < y \quad \Rightarrow \quad f(x) \leq f(y).$$

La función f se llama **monótona no creciente** *cuando para cada $x, y \in A$, se verifica:*

$$x < y \quad \Rightarrow \quad f(y) \leq f(x).$$

La función f se llama **creciente** *cuando para cada $x, y \in A$, se verifica,*

$$x < y \quad \Rightarrow \quad f(x) < f(y).$$

La función f se llama **decreciente** *cuando para cada $x, y \in A$, se verifica,*

$$x < y \quad \Rightarrow \quad f(y) < f(x).$$

4.13.2.

1. La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

   es monótona no decreciente y $-f$ es una función monótona no creciente.

2. La función identidad es evidentemente creciente.

3. Toda función $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, creciente (respectivamente, decreciente) es inyectiva.

   En efecto, sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x \neq y$. Luego, si $x < y$, entonces por la hipótesis $f(x) < f(y)$ (respectivamente, $f(y) < f(x)$). En consecuencia, $f(x) \neq f(y)$.
   Si $y < x$, de manera similar concluimos que $f(x) \neq f(y)$. Así, f es inyectiva.

Teorema 4.13.3. *Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función monótona. Entonces para todo $a \in A \cap A'_+$ y para todo $b \in A \cap A'_-$ existen $\lim_{x\to a^+} f(x)$ y $\lim_{x\to b^-} f(x)$.*

Prueba: Supongamos que f es no creciente. El conjunto

$$\{f(x) : x \in A \text{ y } x > a\},$$

es acotado, pues, para todo $x > a$ por la hipótesis, $f(a) \geq f(x)$ y así, $f(a)$ es una cota superior para el conjunto $\{f(x) : x \in A \text{ y } x > a\}$ y además, el conjunto es no vacío. Luego, por el Axioma Fundamental del Análisis existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $L = \sup\{f(x) : x \in A \text{ y } x > a\}$.
Afirmamos que $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$.

En efecto, sea $\varepsilon > 0$ arbitrario, entonces por el teorema 2.5.14 existe $x \in A, x > a$ tal que $L - \varepsilon < f(x) \leq L$. Ahora, tomemos $\delta = x - a > 0$, entonces $f(a+\delta) > L - \varepsilon$.
Por otro lado, como f es no creciente, para todo $x \in A \cap (a, a+\delta)$ se verifica que $L - \varepsilon < f(a+\delta) \leq f(x) < L + \varepsilon$.
Así, existe $\delta > 0$ tal que $x \in A$ y $0 < x - a < \delta$ implica que $|f(x) - L| < \varepsilon$,
Por lo tanto, $\lim_{x\to a^+} f(x)$ existe.
De manera análoga, se prueba que, existe $\lim_{x\to b^-} f(x)$, y que

$$\lim_{x\to b^-} f(x) = \inf\{f(x) : x \in A \text{ y } x < b\}.$$

∎

Nota 4.13.4.

Obsérvese que, si f es no decreciente, entonces

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \inf\{f(x) : x \in A \text{ y } x > a\}.$$

Si f es no decreciente, entonces

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \sup\{f(x) : x \in A \text{ y } x < a\}.$$

4.14. Límites en el Infinito

Definición 4.14.1. *Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no acotado superiormente. Dada $f : A \to \mathbb{R}$, $L \in R$ se llama* **límite cuando x tiende a $+\infty$** *de $f(x)$ y escribimos $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ si dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe $M = M(\varepsilon)$*[3] *> 0 tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $x \in A$ y $x > M$. (Ver, Figura 4.7)*
En símbolos

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad [\forall \varepsilon > 0\ \exists M > 0 : \ x \in A \ y \ x > M \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon].$$

Cuando A no es acotado inferiormente, $L \in R$ se llama **límite cuando x tiende a $-\infty$** *de $f(x)$ y escribimos $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$ si dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe $M = M(\varepsilon) > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $x \in A$ y $x < -M$. (Ver, Figura 4.7)*
En símbolos

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad [\forall \varepsilon > 0\ \exists M > 0 : \ x \in A \ y \ x < -M \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon].$$

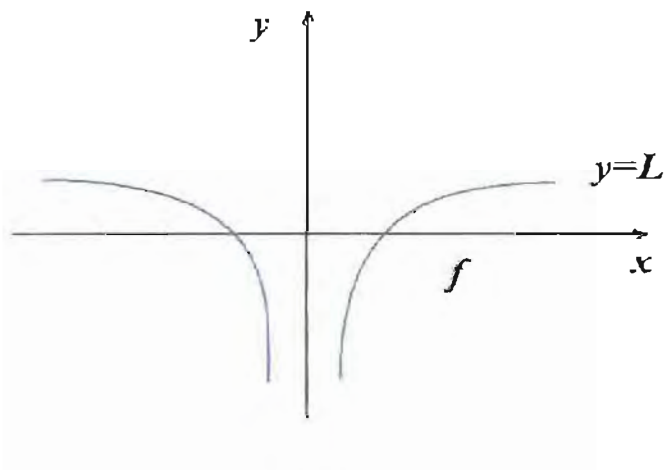

Figura 4.7: Límites en el Infinito

[3]Esta notación indica que el M depende tan sólo de ε

Nota **4.14.2.**

1. Los límites anteriores son conocidos como **límites en el infinito**.

2. Podemos establecer los teoremas para límites en el infinito, haciendo modificaciones en los teoremas para límites ordinarios. Se recomienda al lector, escribir y probar los teoremas con las modificaciones requeridas.

3. Los límites en el infinito son de "alguna manera" límites laterales, el $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ sería un límite por la izquierda mientras $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ sería un límite por la derecha.

4. Nótese que, si $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ entonces $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ es límite de una sucesión.

4.14.3.

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 - \frac{1}{x}) = 1.$

   En efecto, sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Como $|1 - \frac{1}{x} - 1| = \frac{1}{|x|}$, entonces si $x > 0$, tomemos $M = \frac{1}{\varepsilon}$. Así, $x > M = \frac{1}{\varepsilon}$ implica $|(1 - \frac{1}{x}) - 1| < \varepsilon$ y así 1 es cierto.

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e.$

   En efecto, para $x > 0$ por la propiedad arquimediana de $\mathbb{R}$ existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$n - 1 \leq x < n. \tag{39}$$

   Así, se verifican las desigualdades:

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}$$

$$1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{x} \leq 1 + \frac{1}{n}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}. \tag{40}$$

Claramente, por (39) si $x \to +\infty$, entonces $n \to +\infty$. Luego, aplicando el ejemplo 4.14.3(2) se sigue que,

$$\lim_{x\to-\infty}(1+\tfrac{1}{n})^{n+1} = \lim_{x\to-\infty}(1+\tfrac{1}{n+1})^{n} = e.$$

En consecuencia, por (40) y por el corolario 4.5.5(2), $\lim\limits_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^{x} = e$.

4.15. Limites Infinitos

Definición **4.15.1.** *Sean $A \subset \mathbb{R}$, $a \in A'$ y $f : A \to \mathbb{R}$ una función. Diremos que $f(x)$ tiende a $+\infty$ cuando x tiende para a (respectivamente, x tiende para a por la derecha) y escribimos $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ (respectivamente, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$) si para cada $M > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in A$ y $0 < |x-a| < \delta$ (respectivamente, $0 < x-a < \delta$) implica $f(x) > M$. (Ver, Figura 4.8)*

De manera similar, diremos que $f(x)$ tiende a $-\infty$ cuando x tiende para a (respectivamente, x tiende para a por la izquierda) y escribimos $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ (respectivamente, $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$) si para cada $M > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in A$ y $0 < |x-a| < \delta$ (respectivamente, $0 < a-x < \delta$) implica $f(x) < -M$. (Ver, Figura 4.8))

De manera análoga se definen $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$.

Nota **4.15.2.**

1. De nuevo recordamos que $-\infty$ y $+\infty$ no son números reales y estos símbolos sólo expresan el comportamiento de $f(x)$ cuando x tiende para a.

2. Los límites: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$, son llamados **límites infinitos**.

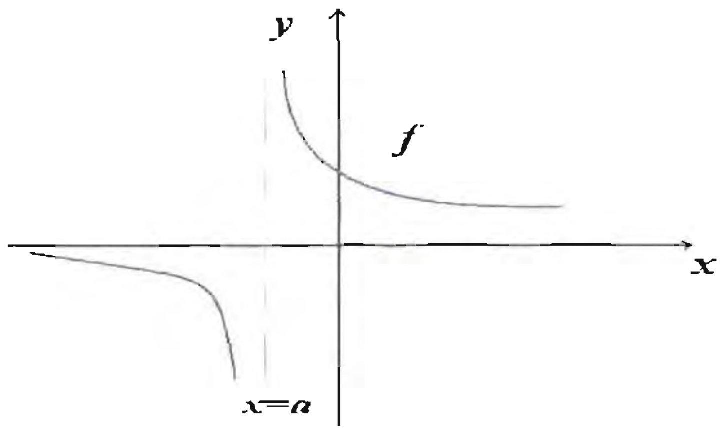

Figura 4.8: Límites Infinitos

Ejemplo 4.15.3.

1. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$.

   En efecto, sea $M > 0$ arbitrario. Nótese que, $\frac{1}{(x-1)^2} > M$ implica que $(x-1)^2 < \frac{1}{M}$ y así, $|x-1| < \frac{1}{\sqrt{M}}$. Por lo tanto, tomando $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$ se verifica que, si $0 < |x-1| < \delta$, entonces $\frac{1}{(x-1)^2} > M$ y por lo tanto, 1 es cierto.

2. $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = -\infty$.

   En efecto, sea $M > 0$ arbitrario. Si $\frac{1}{x} > M$, entonces $\frac{1}{M} > x$. Luego, basta tomar $\delta = \frac{1}{M}$ para ver que $0 < x < \delta$ implica que $\frac{1}{x} > M$ y así, 2 es cierto.

Teorema 4.15.4. *Sean $A \subset \mathbb{R}$, $a \in A'$ y $f, g : A \to \mathbb{R}$ una función.*

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow [\forall (x_n) \subset A\setminus\{a\},\ (x_n) \to a \Rightarrow (f(x_n)) \to +\infty]$.

2. *Si* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, *entonces* $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq L \in \mathbb{R}$ *y* $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq -\infty$.

3. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, *entonces f no es acotada en ninguna vecindad de a.*

4. *Si* $f(x) \leq g(x)$ *para todo* $x \in A$ *y* $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$*, entonces* $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$.

5. *Si* $\lim_{x\to a} f(x) = L, L \in \mathbb{R}$ *y* $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$*, entonces existe* $\delta > 0$ *tal que* $x \in A$ *y* $0 < |x - a| < \delta$ *implica* $f(x) < g(x)$.

6. *Si* $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$*, entonces para todo* $B \subset A$ *con* $a \in B'$*, se verifica que* $\lim_{x\to a} h(x) = +\infty$*, donde* $h = f_{|B}$*. Además, si* $B = A \cap (a - \delta, a + \delta)$ *entonces* $\lim_{x\to a} h(x) = +\infty$ *implica que* $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$*, donde* $h = f_{|B}$.

7. *Si* $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ *y* g *es acotada inferiormente, entonces* $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = +\infty$.

8. *Si* $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ *y* g *es acotada inferiormente por un número positivo, entonces* $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = +\infty$.

9. *Si* $0 < c < f(x)$*,* $g(x) > 0$ *para todo* $x \in A$ *y* $\lim_{x\to a} g(x) = 0$*, entonces* $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.

10. *Si* f *es acotada y* $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$*, entonces* $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

11. *Si* $f(x) > 0$ *para todo* $x \in A$*, entonces*

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to a} \left(\frac{1}{f(x)}\right) = +\infty.$$

12. *Si* $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ *y* $\lim_{y\to +\infty} g(y) = L$*, entonces* $\lim_{x\to a} g[f(x)] = L$.

Prueba:

1. ($\Rightarrow$) Supongamos que, $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$. Sea $M > 0$ arbitrario, entonces existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in A \text{ y } 0 < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) > M. \tag{41}$$

Sea $(x_n) \subset A \backslash \{a\}$ tal que $(x_n) \to a$, entonces para el δ hallado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica $0 < |x_n - a| < \delta$. En consecuencia, de

(41) se sigue que, $f(x_n) > M$ siempre que $n > n_0$. Así, $(f(x_n)) \to +\infty$. El caso $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$, se prueba de manera similar.

($\Leftarrow$) Supongamos que, $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq +\infty$. Entonces, existe $M > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existe $x \in A$, con

$$0 < |x - a| < \delta \ y \ \ f(x) \leq M. \tag{42}$$

Sea $\delta = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, entonces por (42), para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in A\backslash\{a\}$ tal que $0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}$ y $f(x_n) \leq M$. Así, $(x_n) \to a$ pero $(f(x_n)) \not\to +\infty$, en contradicción con la hipótesis. Por lo tanto, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$.

2. Supongamos que, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$.
   Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, $L \in R$. Entonces, para toda sucesión $(x_n) \subset A\backslash\{a\}$ $(x_n) \to a$, se tiene que, $(f(x_n)) \to L$, pero esto contradice a 1. Así, $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ no puede ser L para cualquiera que sea el $L \in \mathbb{R}$.
   Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$. Entonces, para toda sucesión $(x_n) \subset A\backslash\{a\}$, con $(x_n) \to a$, $(f(x_n)) \to -\infty$, pero esto contradice 1. Así, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$.

3. Esto es una consecuencia inmediata de la definición.

4. Sea $M > 0$ arbitrario. Entonces, por hipótesis existe, $\delta > 0$ tal que

$$x \in A \ y \ 0 < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) > M. \tag{43}$$

   Por otro lado, como $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in A$, se sigue de (43) que $g(x) > M$ siempre que $x \in A$ y $0 < |x - a| < \delta$. En consecuencia, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$.

5. Dado $\varepsilon = 1$, entonces por hipótesis existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$x \in A \ y \ 0 < |x - a| < \delta_1 \quad \Rightarrow \quad f(x) < L + 1. \tag{44}$$

   Ahora, tomando $M = L + 1$, por la otra parte de la hipótesis, existe $\delta_2 > 0$ tal que,

$$x \in A \ y \ 0 < |x - a| < \delta_2 \quad \Rightarrow \quad g(x) > L + 1. \tag{45}$$

   Luego, tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ por (44) y (45) se verifica que, $g(x) > f(x)$ siempre que x este en una vecindad de a.

6. Sea $M > 0$ arbitrario, entonces por hipótesis existe $\delta > 0$ tal que,

$$x \in A \; y \; 0 < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) > M. \tag{46}$$

Ahora, como $B \subset A$, $a \in B'$ y $h = f_{|B}$, entonces de (46) se sigue que

$$x \in B \; y \; 0 < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad h(x) > M.$$

Así, $\lim\limits_{x \to a} h(x) = +\infty$.

Para ver la segunda parte de 6, sea $M > 0$ arbitrario. Como $\lim\limits_{x \to a} h(x) = +\infty$, entonces existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in B \; y \; 0 < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad h(x) > M. \tag{47}$$

Ahora, como $h = f_{|B}$, donde $B = A \cap (a - \delta, a + \delta)$, entonces de (47) se sigue que

$$x \in A \; y \; 0 < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) > M.$$

En consecuencia, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.

7. Sea $M > 0$ arbitrario. Entonces, por la hipótesis existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in A \; y \; 0 < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) > M. \tag{48}$$

Por otro lado, como g es inferiormente acotada, existe K tal que para todo $x \in A$ se verifica

$$g(x) > K. \tag{49}$$

En consecuencia, de (48) y (49) se sigue que existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in A \; y \; 0 < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) + g(x) > M + K > M.$$

Por lo tanto, $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)] = +\infty$.

8. Sea $M > 0$ arbitrario. Entonces, por hipótesis, existe $\delta > 0$ tal que,

$$x \in A \; y \; 0 < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) > \frac{M}{K}. \tag{50}$$

donde K es la misma que en (49). En consecuencia, de (49) y (50) se sigue que

$$x \in A \ y \ 0 < |x-a| < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x)g(x) > \frac{M}{K}K = M.$$

Por lo tanto, $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = +\infty$.

9. Para probar 9, proceder como en la prueba de 4 del teorema 4.8.4.

10. Para probar 10, proceder como en la prueba de 5 del teorema 4.8.4.

11. Para probar 11, proceder como en la prueba de 6 del teorema 4.8.4.

12. Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Entonces, por hipótesis existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in A \ y \ 0 < |x-a| < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) > \varepsilon. \tag{51}$$

Por otro lado, existe $M > 0$ tal que

$$y > M \quad \Rightarrow \quad |g(y) - L| < \varepsilon. \tag{52}$$

Luego, si tomamos $\varepsilon = M$, entonces por (51) y (52) se tiene que

$$x \in A \ y \ 0 < |x-a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |g[f(x)] - L| < \varepsilon.$$

Así, $\lim\limits_{x\to a} g[f(x)] = L$.
El caso $\lim\limits_{x\to a} g[f(x)] = +\infty$ se prueba de manera similar al caso anterior.

∎

Nota **4.15.5.**

1. El teorema 4.15.4 tiene su versión dual cuando $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

2. Al igual que para los límites de sucesiones, en los límites de funciones se presentan las "expresiones indeterminadas", es decir expresiones de la forma: $\frac{0}{0}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$,0^0, ∞^0, 1^∞.

   Por ejemplo, la expresión $\frac{0}{0}$, desde el punto de vista aritmético no tiene sentido pues, $0 \in \mathbb{R}$ no tiene inverso multiplicativo, pero desde el punto del Análisis Matemático la expresión $\frac{0}{0}$ tiene el siguiente sentido:

Sean $A \subset \mathbb{R}$, $f, g : A \to \mathbb{R}$ *y* $a \in A'$. *Supongamos que* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. *Luego, tomando* $B = \{x \in A : g(x) \neq 0\}$ *y* $a \in B'$. *Entonces tiene sentido preguntarse si existe* $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Ahora, puede ocurrir:
Caso I. $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$, para algún $L \in \mathbb{R}$, como se puede ver en el siguiente ejemplo:

Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = x - 1$. Entonces $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} g(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = 2$.

Caso II. $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ no existe, como se puede ver ejemplo siguiente ejemplo:

Sean $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x \operatorname{sen}(\frac{1}{x})$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x$. Entonces, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$ pero $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ no existe.

Por el mismo argumento $\infty - \infty$ es una "expresión indeterminada". Basta por ejemplo tomar:

$f, g : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$ y $g(x) = \frac{1}{x^2}$. Claramente, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = \infty$, pero $\lim\limits_{x\to 0} [f(x) - g(x)] = 1$. también podemos encontrar ejemplos en los cuales $\lim\limits_{x\to 0} [f(x) - g(x)]$ no exista.

3. Una poderosa herramienta muy utilizada en los cursos de Cálculo para atacar la "expresiones indeterminadas"es conocida como la **Regla de L'Hôpital** y la estudiaremos en el capitulo 6.

4.16. Ejercicios

1. Demuestre usando la definición que:

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, si $a > 0$.

   b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 1$, $\alpha > 0$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n} = \text{máx}(a,b)$.

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \mid x_n \mid = \mid a \mid$, si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

2. (a) Probar que si una subsucesión de una sucesión de Cauchy converge entonces, también converge la sucesión.

   (b) Probar que toda sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$ es acotada.

3. Pruebe que toda sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$ es convergente.

4. Sea $x_1 = 1$ defina $x_{n+1} = 1+\sqrt[4]{x_n}$. Demuestre que (x_n) es convergente, además calcule su límite.

5. Pruebe que si
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ -x & \text{si } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$$
   entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ no existe, siempre que $a \neq 0$.

6. Dar un ejemplo para mostrar que la siguiente definición de límite es falsa.
$$\forall\delta > 0\ \exists\varepsilon > 0\ :\ 0 <\mid x-a \mid < \delta \Rightarrow \mid f(x) - L \mid < \varepsilon.$$

7. Probar que si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_1+\cdots+x_n}{n} = a$. ¿Es cierto el recíproco?

8. (a) Pruebe que si $(x_{2n}) \to a$ y $(x_{2n-1}) \to a$, entonces $(x_n) \to a$.

   (b) Supóngase que, $(x_n) \to a$ y $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Probar que A tiene un único punto de clausura.

   (c) Sea (x_n) una sucesión dada por $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ y $x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_{n-2})$ para todo $n \geq 3$. Probar que (x_n) converge, además calcule su límite.

9. Sea $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ y $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

   a) Probar que $\overline{X} = X \cup \{a\}$.

   b) Pruebe que $M = X \cup \{a\}$ es compacto.

10. Sea (x_n) una sucesión acotada en $\mathbb{R}$. Sea $X_n = \{x_n, x_{n+1} \cdots\}_{n\in\mathbb{N}}$. Defina $a_n = \inf(X_n)$ y $b_n = \sup(X_n)$. Probar:

    a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

    b) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\} = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

    c) Llamaremos $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ y $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Entonces, (x_n) converge si y sólo si $a = b$.

11. ¿Existen funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que verifican:

    a) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ y

    b) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ para algún $a \in \mathbb{R}$?

12. Probar que si $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = L$ y $b \neq 0$, entonces $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(bx)}{x} = bL$.

13. Pruebe que

    a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(-x)$.

    b) $\lim\limits_{x\to 0} f(|\, x\,|) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

    c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x^2) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

    d) $\lim\limits_{x\to a^+} f(\frac{1}{x}) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

    e) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} f(x-a)$.

    f) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} f(x^3)$.

    g) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \;\Leftrightarrow\; \lim\limits_{x\to a} [f(x) - L] = 0$.

    h) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{h\to 0} f(a+h)$.

14. (a) Si no existen los límites: $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)$. ¿Pueden existir $\lim\limits_{x\to a} [f(x) + g(x)]$ y $\lim\limits_{x\to a} [f(x)g(x)]$?

    (b) Si existen $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a} [f(x)+g(x)]$. ¿Debe existir $\lim\limits_{x\to a} g(x)$?

    (c) Si existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ yño existe $\lim\limits_{x\to a} g(x)$. ¿Puede existir $\lim\limits_{x\to a} [f(x)+ g(x)]$?

(d) Si existen los límites $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to a} [f(x)g(x)]$. ¿Se sigue de ello que existe $\lim\limits_{x \to a} g(x)$?

15. El siguiente problema es una construcción de los números reales utilizando sucesiones de Cauchy de números racionales.

    a) Sean (x_n) y (y_n) dos sucesiones de Cauchy en $\mathbb{Q}$, diremos que (x_n) es equivalente con (y_n) si $\lim\limits_{n \to \infty} (x_n - y_n) = 0$. Probar que la relación definida es de equivalencia.

    b) Supóngase que X es el conjunto de todas las sucesiones equivalentes a (x_n) y Y el conjunto de todas las sucesiones equivalentes a (y_n). Probar que, $X \cap Y = \emptyset$ o $X = Y$.

    Lo anterior nos dice que, el conjunto de todas las sucesiones de Cauchy en $\mathbb{Q}$, puede descomponerse en partes disjuntas, y cada miembro de estas partes es equivalente a alguna sucesión fija. Así, defínase cada una de estas partes como un número real y denótese al conjunto de todos los números reales como $\mathbb{R}$.

    c) Si α y β son números reales, sean (x_n) una sucesión en α y (y_n) una sucesión en β. Defínase $\alpha + \beta$ como la colección de todas las sucesiones equivalentes a la sucesión $(x_n + y_n)$. Probar que $(x_n + y_n)$ es de Cauchy y que la operación $\alpha + \beta$ está bien definida.
    Definir la multiplicación y proceder como en el caso anterior.

    d) Probar que $\mathbb{R}$ con las operaciones suma y multiplicación es un cuerpo.

    e) Defínase los números reales positivos de modo que $\mathbb{R}$ se convierta en un cuerpo ordenado.

    f) Probar que toda sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$ es convergente.

4.17. Algunas Sugerencias para la solución de los ejercicios

1. (a) Si $a > 1$, haga los arreglos adecuados para aplicar la desigualdad de Bernoulli.

Si $0 < a < 1$, entonces $\frac{1}{\sqrt[n]{a}} - 1 > 0$ y así, existe $x > 0$ tal que $\frac{1}{\sqrt[n]{a}} = 1 + x$. Ahora, utilice el teorema 4.5.5(2).

(b) Como $\alpha > 0$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n^\alpha} < \frac{1}{n^{\frac{1}{p}}}$. De nuevo aplique el teorema 4.5.5(2).

(c) Considere los casos $a = 0$ o $b = 0$ y $0 < b \leq a$.

(d) Utilice la desigualdad 8 del teorema 2.2.10.

2. Sea (a_n) una sucesión de Cauchy y (a_{n_k}) una subsucesión de (a_n) tal que $(a_{n_k}) \to a \in \mathbb{R}$. Luego, aplique la desigualdad triangular.

3. Como toda sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$ es acotada a la luz del ejercicio 2 y el teorema 4.5.1, basta probar que toda sucesión en $\mathbb{R}$ tiene una subsucesión no decreciente o bien una subsucesión no creciente.
Otra forma más inmediata de probar el resultado es utilizando el teorema de Bolzano-Weierstrass.

4. Pruebe que la sucesión (x_n) es creciente y acotada superiormente. Además, el límite L satisface la ecuación

$$L^4 - 4l^3 + 6L^2 - 5L + 1 = 0.$$

5. Ver el ejemplo 4.11.4(2).

6. El contraejemplo es fácil.

7. Nótese que,

$$\begin{aligned}\left|\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} - a\right| &= \frac{|x_1 - a| + \cdots + |x_{n_0-1} - a|}{n} \\ &+ \frac{|x_{n_0} - a| + \cdots + |x_n - a|}{n}.\end{aligned}$$

8. (a) Este se resuelve con una manipulación de los índices n, $2n$ y $2n-1$.
(b) Utilice el Método de Reducción al Absurdo.
(c) Separe los términos de orden par de los de orden impar y pruebe que

(x_n) es acotada. Además verifique que las subsucesiones (x_{2n}) y (x_{2n-1}) son decreciente y creciente respectivamente. Por último verifique que, $(x_{2n}), (x_{2n-1}) \to \frac{2}{3}$ y use la parte (a).

9. (a) Pruebe que $\overline{X} \supset X \cup \{a\} \subset \overline{X}$. Además, use el hecho de que el rango de una sucesión convergente posee un único punto de clausura.
(b) Pruebe que M es cerrado y acotado en $\mathbb{R}$. Recuerde que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ y que X es acotado.

10. Para probar (a) y (b, demuestre que (a_n) es no decreciente y acotada superiormente y que (b_n) es no creciente y acotada inferiormente. Luego, por la nota 4.5.2 los resultados son ciertos.
(c) $(\Rightarrow)$ Considere $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ y use el teorema 4.7.1(2).
$(\Leftarrow)$ Para el conjunto A definido anteriormente pruebe que $a = \text{mín}\{a^* : a^* \in \overline{A}\}$ y $b = \text{máx}\{b^* : b^* \in \overline{A}\}$. Así, (x_n) posee al menos dos subsucesiones convergentes. Ahora, considere los conjuntos $A = \{x_n : x_n \leq a - \varepsilon\}$ y $B = \{x_n : a + \varepsilon \leq x_n\}$. Pruebe que A y B son conjuntos finitos y así, $A \cup B$ es finito. En consecuencia,...

11. Suponga que existe una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfaga (a) y (b) y llegue a una contradicción.

12. Utilice el teorema 4.6.1(2) y el hecho de que $\lim\limits_{bx \to 0} \frac{f(bx)}{bx} = L$.

13. Este ejercicio se resuelve manipulando adecuadamente las definiciones.

14. El lector no debería tener problemas en dar las respuestas.

15. Consultar[17], pág 743.

4.18. Ejercicios Varios

1. Sea (a_n) una sucesión de números reales tal que

$$a_{n+1} = \frac{3(1 + a_n)}{3 + a_n}, \quad a_1 = 3$$

probar que $(a_n) \to \sqrt{3}$.

2. Dados $a, b \in \mathbb{R}^+$, defina inductivamente las sucesiones (x_n) y (y_n) colocando

$$x_1 = \sqrt{ab}, \quad y_1 = \frac{a+b}{2} \quad y$$

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}.$$

Probar que (x_n) y (y_n) convergen al mismo límite.

3. (a) Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}$.

(b) Si $(x_n) \to \infty$ y $a \in \mathbb{R}$, probar que

$$\lim_{n\to\infty} \left[\sqrt{\ln(x_n + a)} - \sqrt{\ln x_n}\right] = 0.$$

4. Sean $f, g :\to \mathbb{R}$ funciones definidas por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

Pruebe que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{y\to 0} g(y) = 0$. ¿Existe $\lim\limits_{x\to 0} g[f(x)]$?

5. Pruebe que, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$ (respectivamente, $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$) si y sólo si para toda sucesión decreciente (respectivamente, creciente) $(x_n) \subset \mathbb{R}$ con $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = a$, se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = L$.

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función, definida por $f(x) = x \operatorname{sen} x$. Pruebe que, para todo $c \in \mathbb{R}$, existe $(x_n) \subset \mathbb{R}$ con $(x_n) \to \infty$ y $(f(x_n)) \to c$.

"... La curva de crecimiento que llamaremos gráfico de la función f, es una curva continua, sin un sólo salto, sin un sólo vacío entre punto y punto, una curva que puede dibujarse -idealmente- sin levantar ni un ápice la pluma del papel. En estas condiciones, decimos que f es una función continua.
En realidad, el concepto de continuidad en su formulación matemática correcta es algo más complicado; estrechamente ligado al concepto de límite, se debe también a la afilada mente analista de Cauchy."
Joaquín Navarro

OBJETIVOS (Capítulo 5)

- Adquirir y aplicar el concepto de continuidad y continuidad uniforme.
- Asociar los conceptos topológicos con los conceptos de continuidad y continuidad uniforme.
- Aplicar los resultados básicos sobre continuidad y continuidad uniforme en la solución de problemas.

Capítulo 5

Funciones Continuas

El concepto de continuidad de una función, también se debe al eminente matemático **Agustin Louis Cauchy (1789-1857)** y está ligado al concepto de límite. El concepto de continuidad es esencial en el estudio del Análisis Matemático como lo demostraremos en el desarrollo del presente capítulo. Otro matemático que aportó resultados fundamentales en el estudio de la continuidad de una función fue **Bernard Bolzano (1781-1848)**, uno de ellos es el famoso teorema de los valores intermedios para funciones continuas.

En el presente capítulo estudiaremos en detalle los conceptos de continuidad y continuidad uniforme y los resultados básicos sobre estos conceptos, para lograr esto es imprescindible aplicar los conocimientos adquiridos en los capítulos 2 y 3.

5.1. Continuidad en un Punto y en un Conjunto

Definición **5.1.1.** *Sean $A \subset \mathbb{R}$ y $a \in A$. Una función $f : A \to \mathbb{R}$ se llama* **continua en x=a** *si, para cada $\varepsilon > 0$ arbitrario existe $\delta{=}\delta(a,\varepsilon)$*[1] *tal que $x \in A$ y $|x-a| < \delta$ implica $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$. (Ver Figura 5.1)*
En símbolos:

$$\begin{aligned} f \text{ es continua en } x = a \ &\Leftrightarrow\ [\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ x \in A \text{ y } |x-a| < \delta \\ &\Rightarrow\ |f(x) - L| < \varepsilon]. \end{aligned}$$

[1]Esta notación indica que el δ depende de ε y de a.

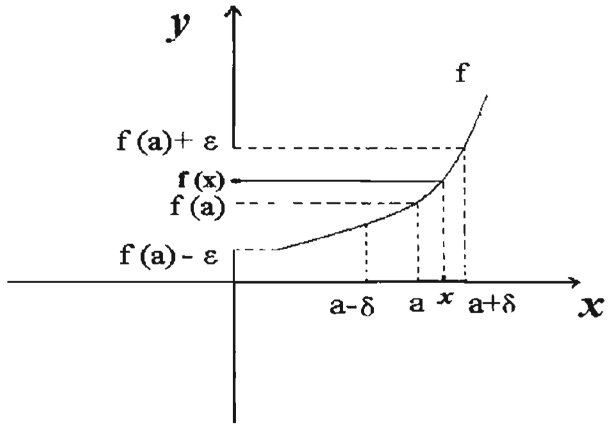

Figura 5.1: Continuidad de una Función en un Punto

Nota **5.1.2.**

1. La función $f : A \to \mathbb{R}$ es continua en A, si es continua en cada punto de A.

2. De la definición se sigue que, *f es continua en $x = a$* si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $f[(a-\delta, a+\delta)] \subset (f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon)]$.

3. Obsérvese que, si $a \in A$, puede ocurrir que,

   Caso I. $a \notin A'$ (es decir, a es un punto aislado de A), en tal caso afirmamos que f es continua en $x = a$.

   En efecto, como $a \notin A'$ existe $\delta > 0$ tal que $(a-\delta, a+\delta) \cap A = \{a\}$. Así, para todo $\varepsilon > 0$ se verifica que

$$f[(a-\delta, a+\delta)] = \{f(a)\} \subset (f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon).$$

   En consecuencia, f es continua en $x = a$.

   Caso II. $a \in A'$ (es decir, a es un punto de acumulación de A) en tal caso

$$f \textit{ es continua en } x = a \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

4. La noción de continuidad es local, es decir, $f : A \to \mathbb{R}$ es continua en $x = a$ si y sólo si existe una vecindad V de a tal que $f_{|V \cap A}$ es continua en $x = a$. (Verificarlo)

5. Nótese que, f no es continua en $x = a$ si sólo si

$$\exists\, \varepsilon > 0 : \ \forall \delta > 0 \ \exists\, x = x(\delta, a) \in A, \ |x - a| < \delta \ y \ |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon.$$

En tal caso f se llama discontinua en $x = a$.

5.1.3.

1. Claramente la función $f : \mathbb{R} \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \operatorname{sen}(\frac{1}{x})$ es discontinua en $x = 0$ (ni siquiera está definida en $x = 0$).

2. La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

es continua en $x = 0$ (ver corolario 4.11.2(2(d))).

3. La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

es continua en $x = 0$, pero es discontinua en todo punto $x \neq 0$ (ver ejemplo 4.11.4(2)).

4. Toda función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, es continua en $\mathbb{N}$, ya que cada $n \in \mathbb{N}$ es punto aislado de $\mathbb{N}$.

5. Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ fijo. Entonces

$$f(x) = \begin{cases} c & \text{si } x \geq 0 \\ -c & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

es discontinua en $x = 0$ y continua para todo $x \neq 0$ (ver ejemplo 4.10.3(4)).

5.2. Condición de Lipschitz y Continuidad

Definición **5.2.1.** *Sean $A \subset \mathbb{R}$ y $f : A \to \mathbb{R}$ una función, f se llama de* **Lipschitz**, *si existe un $M > 0$ tal que*

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|,$$

para todo $x, y \in A$.

5.2.2.

1. La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x$, es de Lipschitz.

   En efecto, para todo $x, y \in \mathbb{R}$ se verifica que

   $$|f(x) - f(y)| = |2x - 2y| = 2|x - y|.$$

   Así, basta tomar $M = 2$, para que f sea de Lipschitz.

2. La función $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x + \frac{1}{x}$, es de Lipschitz.

   En efecto, para todo $x, y \in \mathbb{R}$ se verifica

   $$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| x + \frac{1}{x} - y - \frac{1}{y} \right| = \left| (x - y)\frac{xy - 1}{xy} \right| \\ &= |x - y| \left| \frac{xy - 1}{xy} \right|. \qquad (1) \end{aligned}$$

   Ahora, como $x, y \geq 1$, entonces $|\frac{xy-1}{xy}| < 1$. En consecuencia, tomando $M = 1$, por (1) se sigue que f es de Lipschitz.

Nota **5.2.3.**

1. Toda función de Lipschitz es continua.
   En efecto, sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función de Lipschitz. Sean $a \in A$ y $\varepsilon > 0$ arbitrarios, entonces existe $M > 0$ tal que

   $$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|,$$

   para todo $x, y \in A$. En consecuencia, tomando $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$, podemos ver que f es continua en a.

2. El recíproco del resultado anterior no es cierto, para ver esto basta tomar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$, la cual es claramente continua más no es de Lipschitz. (¿Por qué?)

5.3. Tipos de Discontinuidades

Definición **5.3.1.** *Una función $f : A \to \mathbb{R}$ tiene una* **discontinuidad de primera especie** *en $a \in A$, cuando f es discontinua en a y además $\lim_{x\to a^+} f(x)$ y $\lim_{x\to a^-} f(x)$ existen.*
La función f tiene una **discontinuidad de segunda especie** *en $a \in A$, cuando f es discontinua en a y además $\lim_{x\to a^+} f(x)$ o $\lim_{x\to a^-} f(x)$ no existen.*

5.3.2.

1. La función $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \operatorname{sen}(\frac{1}{x})$ tiene una discontinuidad de segunda especie en $x = 0$, pues $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen}(\frac{1}{x})$ y $\lim_{x\to 0^-} \operatorname{sen}(\frac{1}{x})$ no existen.

2. La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} c & \text{si } x \geq 0 \\ -c & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

donde $c \neq 0$ es fijo en $\mathbb{R}$, tiene una discontinuidad de primera especie en $x = 0$, pues $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ y $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ existen.

Nota **5.3.3.**

Por el teorema 4.13.3, se sigue que las funciones monótonas no admiten discontinuidades de segunda especie.

5.4. Continuidad y Sucesiones

Teorema **5.4.1.** **(Caracterización de la continuidad por sucesiones)** *Sean $f : A \to \mathbb{R}$ y $a \in A$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *f es continua en $x = a$.*

2. *f es secuencialmente continua en $x = a$ (Es decir, para toda sucesión $(x_n) \subset A$ tal que $(x_n) \to a$ se verifica que $(f(x_n)) \to f(a)$).*

3. *f preserva sucesiones convergentes (Es decir, para toda sucesión $(x_n) \subset A$ convergente en A se verifica que $(f(x_n))$ converge en $\mathbb{R}$).*

Prueba: Si $a \notin A'$, entonces claramente f es continua en $x = a$.
Si $a \in A'$, entonces por el teorema 4.11.1 se concluye que f es continua en $x = a$ si y sólo si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Así, $1 \Leftrightarrow 2$.

Supongamos que, 2 es cierto. Sea $(x_n) \subset A$ una sucesión convergente en A, entonces existe $a \in A$ tal que $(x_n) \to a$. Luego, por la hipótesis, $(f(x_n)) \to f(a) \in \mathbb{R}$. Así, 3 es cierto.

Supongamos que 3 es cierto. Sea $(x_n) \subset A$ tal que $(x_n) \to a$. Entonces la sucesión $(x_1, a, x_2, a, \dots) \to a$ y por 3, existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $(f(x_1), f(a), f(x_2), f(a), \dots) \to y$. Ahora, la subsucesión constante $(f(a), f(a), f(a), \dots) \to f(a)$, en consecuencia, $y = f(a)$. Por lo tanto, la subsucesión $(f(x_1, f(x_2), f(x_3), \dots)) \to f(a)$. Es decir, $(f(x_n)) \to f(a)$ y así, 2 es cierto. Por lo tanto, $2 \Leftrightarrow 3$ y el teorema queda probado. ∎

Corolario 5.4.2. *Sean $f, g : A \to \mathbb{R}$ funciones continuas en $a \in A$, entonces $f + g$ y fg son continuas en a. Además, $\frac{f}{g}$ es continua en a, siempre que $g(a) \neq 0$.*

Prueba: Si $a \notin A'$, entonces el resultado es evidente. Si $a \in A'$, el resultado es una consecuencia inmediata del teorema 5.4.1, el corolario 4.11.2(2) y nota 5.1.2.

Nota **5.4.3.**

Del teorema 5.4.1 obtenemos condiciones suficientes para que una función $f : A \to \mathbb{R}$ sea discontinua en $x = a \in A$, a saber:

Si existe una sucesión $(x_n) \subset A$ tal que $(x_n) \to a$ (respectivamente, (x_n) converge en A) pero, $(f(x_n)) \not\to f(a)$ (respectivamente, $(f(x_n))$) no converge, entonces f no es continua en $x = a$.

5.4.4.

La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

es discontinua en $x = 0$.
En efecto, la sucesión $(x_n = \frac{1}{n}) \to 0$, pero la sucesión $(f(x_n) = e^n) \to +\infty$.

5.5. Funciones Secuencialmente Regular de Cauchy

Definición **5.5.1.** *Una función $f : A \to \mathbb{R}$ se llama* **Secuencialmente Regular de Cauchy** *(SRC) si f preserva las sucesiones de Cauchy, es decir, si $(x_n) \subset A$ es de Cauchy, entonces $(f(x_n))$ es de Cauchy.*

Lema **5.5.2.** *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *f es SRC.*
2. *f preserva sucesiones equivalentes, es decir, si (x_n) y (y_n) son sucesiones equivalentes en A, entonces $(f(x_n))$ y $(f(y_n))$ son sucesiones equivalentes en $\mathbb{R}$.*

Prueba: $(1 \Rightarrow 2)$ Sean $(x_n), (y_n) \subset A$ tal que $(x_n) \approx (y_n)$. Entonces, por el teorema 4.9.4(10), la sucesión $(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots)$ es de Cauchy en A. Luego, por 1, $(f(x_1), f(y_1), f(x_2), f(y_2), \dots)$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$, en consecuencia, por el teorema 4.9.4(10), $(f(x_n)) \approx (f(y_n))$ y así, 2 es cierto.

$2 \Rightarrow 1$ Sea (x_n) de Cauchy en A. Entonces, por el teorema 4.9.4(4), $(x_n) \approx (x_n)$ en A. Luego, por 2, $(f(x_n)) \approx (f(x_n))$ en $\mathbb{R}$ y de nuevo por el teorema 4.9.4(3), $(f(x_n))$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$. Por lo tanto, 1 es cierto. ∎

Teorema **5.5.3.** *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función. Si f es SRC, entonces f es continua en A.*

Prueba: Sean $a \in A$ arbitrario y $(x_n) \subset A$ tal que $(x_n) \to a$. Consideremos la sucesión constante $(y_n = a)$. Luego, $(y_n) \to a$ y por el teorema 4.9.4(4) $(x_n) \approx (y_n)$. En consecuencia, como f es SRC por el lema 5.5.2, $(f(x_n)) \approx (f(y_n))$, es decir, $(f(x_n)) \approx (f(a))$. Así, por el teorema 4.9.4(5), $(f(x_n)) \parallel (f(a))$.
Por otro lado, $(f(x_n)) \to f(a)$ y así, por el teorema 4.9.4(8), se sigue que $(f(x_n)) \to f(a)$. Por lo tanto, a la luz del teorema 5.4.1, f es continua en $x = a$ y el teorema queda completamente probado. ∎

Nota **5.5.4.**

El recíproco del teorema 5.5.3 no es cierto, para ver esto, basta tomar el siguiente

5.5.5.

Sea $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{x}$. Es fácil verificar que f es continua, más no es SRC. (Verificarlo)

El siguiente teorema nos da una condición adicional para que el recíproco del teorema 5.5.3 sea cierto.

Teorema **5.5.6.** *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función. Si A es conjunto cerrado y f es continua, entonces f es SRC.*

Prueba: Sea (x_n) una sucesión de Cauchy en A. Veamos que $(f(x_n))$ es de Cauchy.
Como (x_n) es sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $(x_n) \to a$. Ahora, como A es cerrado por el teorema 4.7.1(2), $a \in A$. En consecuencia, por la continuidad de f se sigue que $(f(x_n)) \to f(a)$ y por el teorema 4.9.4(1), la sucesión $f(x_n)$ es de Cauchy. Así, el teorema queda probado. ∎

5.6. Teoremas sobre Funciones Continuas

Teorema **5.6.1.** *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función continua en $a \in A$. Si $f(a) \neq 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in A \cap (a-\delta, a+\delta)$, $f(x)$ tiene el mismo signo de $f(a)$.*

Prueba: Supongamos que $f(a) > 0$. Sea $\varepsilon = f(a)$, entonces por la continuidad de f en a, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in A \text{ y } |x-a| < f(a) \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(a)| < f(a). \tag{2}$$

Ahora, como

$$|f(x) - f(a)| < f(a) \quad \Leftrightarrow \quad 0 < f(x) < 2f(a), \tag{3}$$

entonces, por (2) y (3), $f(x) > 0$ siempre que $x \in A \cap (a-\delta, a+\delta)$.
El caso $f(a) < 0$ se prueba de manera similar. ∎

Corolario **5.6.2.** *Sean $f, g : A \to \mathbb{R}$ funciones continuas en $a \in A$. Si $f(a) > g(a)$ (respectivamente, $f(a) < g(a)$), entonces existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > g(x)$ (respectivamente, $f(x) < g(x)$), para todo $x \in A \cap (a-\delta, a+\delta)$.*

Prueba: Supongamos que $f(a) > g(a)$. Definamos, $h : A \to \mathbb{R}$, mediante $h(x) = f(x) - g(x)$, claramente h es continua. Ahora, como $h(a) > 0$, entonces por el teorema 5.6.1, existe $\delta > 0$ tal que $h(x) > 0$ para todo $x \in A \cap (a-\delta, a+\delta)$.
Así, $f(x) > g(x)$ siempre que $x \in A \cap (a-\delta, a+\delta)$. El caso $f(a) < g(a)$ se prueba de manera similar. ∎

Corolario 5.6.3. *Sean $f, g : A \to \mathbb{R}$ funciones continuas. Dados $B = \{x \in A : f(x) < g(x)\}$ y $D = \{x \in A : f(x) \leq g(x)\}$. Entonces, existen conjuntos $G \subset \mathbb{R}$ abierto y $F \subset \mathbb{R}$ cerrado tales que $B = A \cap G$ y $D = A \cap F$. En particular, si A es abierto, entonces B es abierto y si A es cerrado, entonces D es cerrado.*

Prueba: Por el corolario 5.6.2 para cada $y \in B$ existe un intervalo $I_y = (y - \delta_y, y + \delta_y)$ tal que

$$\{y\} \subset A \cap I_y \subset B. \tag{4}$$

Luego, por (4) se sigue que

$$\bigcup_{y\in B}\{y\} \subset \bigcup_{y\in B} A \cap I_y \subset B. \tag{5}$$

Ahora, como $B = \bigcup\limits_{y\in B}\{y\}$, por (5) se tiene que

$$B \subset A \cap \bigcup_{y\in B} I_y \subset B. \tag{6}$$

En consecuencia, tomando $G = \bigcup\limits_{y\in B} I_y$, por el teorema 3.1.13(3) G es un conjunto abierto y por (5), $B = A \cap G$.

La segunda parte del corolario 5.6.3 se resuelve, observando que $D = A \backslash \{x \in A : \ g(x) < f(x)\}$.
Luego, para el conjunto $\{x \in A : \ g(x) < f(x)\}$ por la primera parte, existe $G \subset \mathbb{R}$ abierto tal que

$$\{x \in A : \ g(x) < f(x)\} = A \cap G. \tag{7}$$

Por lo tanto, de (7) se sigue que

$$D = A\backslash(A \cap G) = A \cap (\mathbb{R}\backslash G). \tag{8}$$

Así, tomando $F = \mathbb{R}\backslash G$ por el teorema 3.13(3) y por (8), F es cerrado y $D = A \cap F$.
El caso particular es evidente. ∎

5.7. Composición de Funciones Continuas

Teorema **5.7.1.** *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ continua en $a \in A$ y sea $g : B \to \mathbb{R}$ continua en $b = f(a) \in B$ y $f(A) \subset B$. Entonces, $f \circ g : A \to \mathbb{R}$ es continua en a.*

Prueba: Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario, como g es continua en b, existe $\lambda > 0$ tal que

$$y \in B \ \ y \ \ |y - b| < \lambda \quad \Rightarrow \quad |g(y) - g(b)| < \varepsilon. \tag{9}$$

Por otro lado, como f es continua en a, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in A \ y \ |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(a)| < \lambda. \tag{10}$$

Luego, si $x \in A$ y $|x - a| < \delta$ se sigue de (9) y (10) que

$$|g[f(x)] - g(b)| = |(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)| < \varepsilon.$$

Así, $g \circ f$ es continua en a. ∎

5.8. Teoremas de Bolzano y de los Valores Intermedios

Teorema **5.8.1. (Teorema de Bolzano)**
Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Si $f(a)f(b) < 0$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Prueba: Como $f(a)g(a) < 0$, entonces podemos asumir que $f(a) < 0 < f(b)$. Por la continuidad de f en a y por ser $f(a) < 0$, existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < 0$ para todo $x \in [a, b] \cap (a, a + \delta)$. De manera análoga por la continuidad de f en b y por ser $f(b) > 0$, existe $\lambda > 0$ tal que $f(x) > 0$ para todo $\in [a,b] \cap (b-\lambda, b)$. En consecuencia, los conjuntos

$$A = \{x \in (a,b) : \ f(x) < 0\} \quad y \quad B = \{y \in (a,b) : \ f(y) > 0\},$$

son no vacíos, disjuntos y por el corolario 5.6.3 son abiertos.
Si no existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$, entonces $(a,b) = A \cup B$ y así, (a,b) sería disconexo en contradicción con el teorema 3.7.6. Por lo cual, el teorema queda completamente probado. ∎

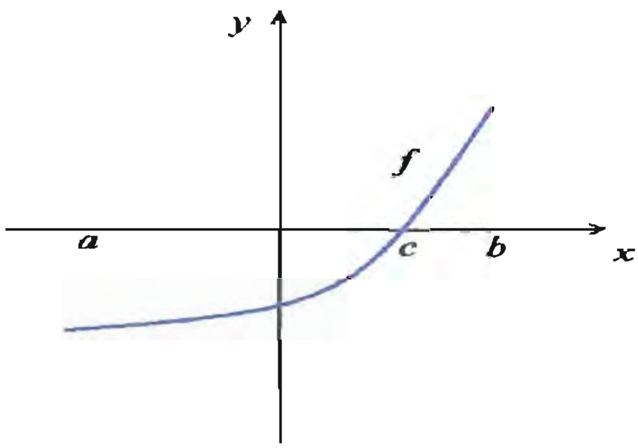

Figura 5.2: Interpretación Geométrica del Teorema de Bolzano

Corolario 5.8.2. (Teorema de los valores intermedios)
Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Si $f(a) < d < f(b)$ (respectivamente, $f(a) > d > g(a)$), entonces existe $x \in (a,b)$ tal que $f(x) = d$.

Prueba: Sea $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = f(x) - d$. Entonces, claramente g satisface las condiciones del teorema de Bolzano y así, existe $x \in (a,b)$ tal que $g(x) = 0$. En consecuencia, existe $x \in (a,b)$ tal que $f(x) = d$. ∎

Corolario 5.8.3. *Toda función continua transforma conexos en conexos. Es decir, si $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ es continua, entonces $f(I)$ es un intervalo.*

Prueba: Si f es la función constante, digamos $f(x) = c$ ($c \in \mathbb{R}$, fijo) para todo $x \in I$, entonces $f(I) = \{c\} = [c, c]$ el cual es un intervalo.
Supongamos que f no es la función constante. A la luz del teorema 2.5.1 8, basta tomar $y, z \in f(I)$ tal que $y < w < z$ y probar que $w \in f(I)$.
Como $y, z \in f(I)$, entonces existen $x_1, x_2 \in I$ tales que $y = f(x_1)$ y $z = f(x_2)$.
Así, $f(x_1) < w < f(x_2)$.
Ahora, como f es continua, entonces por el corolario 5.8.2, se sigue que existe $x \in I$ tal que $w = f(x)$. En consecuencia, $w \in f(I)$ y el corolario 5.8.3 queda probado. ∎

Nota **5.8.4.**

1. El teorema de Bolzano nos asegura que la ecuación $f(x) = 0$ tiene al menos una raíz real, cuando f es continua en $[a, b]$ y $f(a) \cdot f(b) < 0$.

2. Geométricamente, el teorema de Bolzano nos indica que la gráfica de una función continua definida en un intervalo cerrado y acotado, con signos diferentes en los entremos del intervalo debe cortar al eje x al menos una vez. (Ver Figura 5.2)

5.8.5.

1. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a) \leq a$ y $b \leq f(b)$. Entonces, existe al menos un $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = c$.

   En efecto, consideremos la función $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x - f(x)$. Claramente, g es continua y
   $$g(b) = b - f(b) \leq 0 \leq a - f(a) = g(a).$$
   Luego, por el teorema de Bolzano, existe $c \in [a, b]$ tal que $g(c) = 0$, es decir, $f(c) = c$.

   Un punto $c \in A$ tal que $f(c) = c$ se llama un **punto fijo** de la función $f : A \to \mathbb{R}$. El ejemplo 5.8.5(1) es la versión en la recta del "**Teorema del Punto Fijo de Brouwer**".

2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$. Entonces, la ecuación $f(x) = 0$ tiene al menos una

raíz real.

En efecto, por las definiciones de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, podemos tomar $K > 0$ y $M < 0$ tales que

$$[x \geq K \quad\Rightarrow\quad f(x) \geq 1] \quad y \quad [x \leq M \quad\Rightarrow\quad f(x) \leq -1].$$

Ahora, como f es continua en el intervalo $[M, K]$, por el teorema de Bolzano existe $x \in (M, K) \subset \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0$.

3. Todo polinomio de grado impar de coeficientes reales tiene al menos una raíz real.
   En efecto, consideremos $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ el polinomio dado por $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, con $a_n \neq 0$ (podemos asumir, $a_n > 0$) y n impar.
   Claramente, $\lim\limits_{x\to+\infty} p(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} p(x) = -\infty$ (pues, n es impar).
   En consecuencia, p satisface las condiciones del ejemplo 5.8.5(1) y por lo tanto, $p(x) = 0$ para algún $x \in \mathbb{R}$.

5.9. Continuidad y Compacidad

Teorema **5.9.1.** *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función continua. Si A es un conjunto compacto, entonces $f(A)$ es compacto.*

Prueba: A la luz del teorema 4.7.1(3), basta tomar una sucesión $(y_n) \subset f(A)$ y probar que posee una subsucesión convergente en $f(A)$.
Ahora, si $(y_n) \subset f(A)$, entonces $y_n = f(x_n)$, $x_n \in A$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como A es un conjunto compacto, por el teorema 4.7.1(3), existen una subsucesión (x_{n_k}) de (x_n) y $a \in A$ tales que $(x_{n_k}) \to a$.
Por otro lado, por ser f continua, el teorema 5.4.1 nos asegura que

$$f(x_{n_k}) \to f(a). \tag{11}$$

Así, (11) nos da una subsucesión $(y_{n_k} = f(x_{n_k}))$ de (y_n) tal que $(y_{n_k}) \to f(a) \in f(A)$. Por lo tanto, el teorema queda probado. ∎

Corolario 5.9.2. *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función continua. Si A es compacto, entonces f está acotada.*

Prueba: Por el teorema 5.9.1, $f(A)$ es compacto y por el teorema 3.6.5, $f(A)$ está acotado, así, f está acotada en $\mathbb{R}$. ∎

Corolario **5.9.3. (De Weierstrass)**
Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función continua. Si A es un conjunto compacto, entonces f alcanza sus valores máximo y mínimo. Es decir, existen $x_0, x_1 \in A$ tales que $f(x) \in [f(x_0), f(x_1)]$, para todo $x \in A$.

Prueba: Como f es continua, entonces teorema 5.9.1 $f(A)$ es un conjunto compacto. Luego, por el corolario 5.9.2, $f(A)$ está acotado en $\mathbb{R}$. Evidentemente, $f(A)$ es no vacío, así, existen $y_0 = \inf f(A)$ y $y_1 = \sup f(A)$. Ahora, por el teorema 3.2.4 $y_0, y_1 \in \overline{f(A)}$, y por el teorema 3.6.5 $f(A)$ es cerrado y así, y_0, $y_1 \in f(A)$. En consecuencia , existen $x_0, x_1 \in A$ tales que $f(x) \in [f(x_0), f(x_1)]$, para todo $x \in A$. ∎

5.10. Continuidad de la Función Inversa

Dada una función biyectiva $f : A \to B \subset \mathbb{R}$ continua, surge una pregunta natural ¿es $f^{-1} : B \to A$ continua? La respuesta en general es no, como lo muestra el siguiente

5.10.1.

Sea $f : [0,1) \cup [2,3] \to [0,2]$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1) \\ x-1 & \text{si } x \in [2,3] \end{cases}$$

claramente, f es continua en cada punto de su dominio. (Ver Figura 5.3) Además, f es una biyección, donde $f^{-1} : [0,2] \to [0,1) \cap [2,3]$ dada por

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1) \\ x+1 & \text{si } x \in [1,2] \end{cases}$$

no es continua en $x = 1$. (¿por qué?) (Ver Figura 5.3)

Nota **5.10.2.**

Es necesario destacar que en el ejemplo 5.10.1 el dominio de f no es un conjunto conexo (tampoco es compacto). Los teoremas 5.10.4 y 5.10.5 nos dan condiciones suficientes para que la inversa de una función continua sea una función continua.

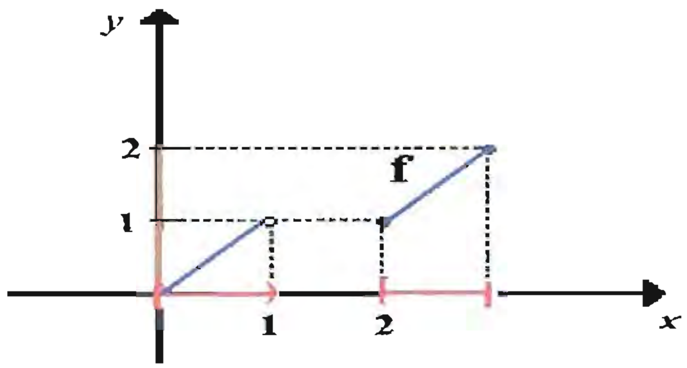

Figura 5.3: Función continua con inversa discontinua

Teorema 5.10.3. *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo no degenerado. Toda función continua e inyectiva es monótona.*

Prueba: Supongamos que $I = [a, b]$ $(a \neq b)$. Como f es inyectiva, entonces $f(a) \neq f(b)$.
Si $f(a) > f(b)$, veamos que f es creciente en I. Si f no fuera creciente en I, existirían $x, y \in I$ tales que

$$x < y \quad y \quad f(y) < f(x). \tag{12}$$

Ahora puede ocurrir que:
Caso I. $f(a) < f(y)$.
Entonces, por (11), $f(a) < f(y) < f(x)$. Luego, como f es continua por el corolario 5.8.2, existe $c \in (a, x)$ tal que

$$f(c) = f(y). \tag{13}$$

Por ser $c \neq y$, entonces (15) contradice la inyectividad de f.

Caso II. $f(a) > f(y)$. Entonces, como $f(a) < f(b)$, se sigue que $f(y) < f(a) < f(b)$. De nuevo, por el corolario 5.8.2, existe $c \in (y, b)$ tal que

$$f(c) = f(a). \tag{14}$$

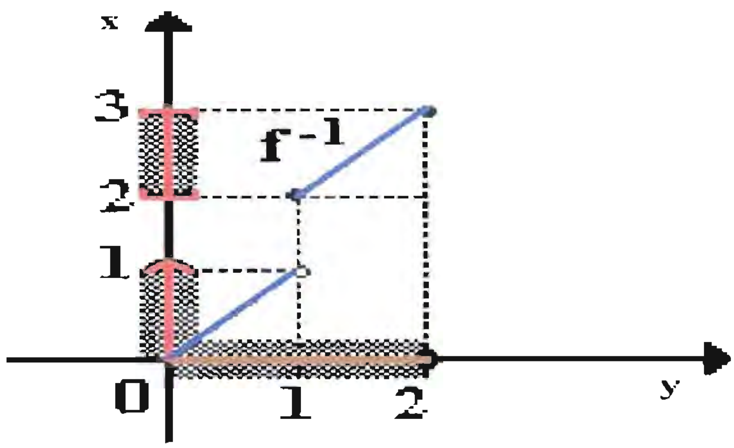

Figura 5.4: Función Inversa Discontinua

Ahora, como $c \neq a$, entonces (16) contradice la inyectividad de f.
Como $f(a) \neq f(y)$, entonces en cualquier caso f no creciente en I, lo conduce a contradicción. Por lo tanto, f es creciente en I.

El caso, $f(a) > f(b)$ se prueba de manera similar.
Cuando I es un intervalo arbitrario, supongamos que f no es monótona, entonces existirían $x_1, x_2, y_1, y_2 \in I$, tales que $x_1 > y_1$ y $x_2 < y_2$ pero

$$f(x_1) < f(y_1) \quad y \quad f(x_2) > f(y_2).$$

Sean $a = \min\{x_1, y_1, x_2, y_2\}$ y $b = \max\{x_1, y_1, x_2, y_2\}$. Claramente, $f_{|[a,b]}$ es continua e inyectiva más no monótona en contradicción con la primera parte. Así, el teorema queda probado. ∎

Teorema **5.10.4.** *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una biyección continua. Si A es compacto, entonces f tiene inversa continua.*

Prueba: Sea $b \in f(A)$ arbitrario, veamos que $g = f^{-1}$ es continua en b. Supongamos que g no es continua en b. En consecuencia existirían $\varepsilon > 0$ y una sucesión $y_n = f(x_n), n \in \mathbb{N}$ tal que

$$(y_n) \to b \quad y \quad |g(y_n) - g(b)| \geq \varepsilon.$$

Es decir, existe $a \in A$ y $x_n \in A$ tal que

$$(y_n) \to b \quad y \qquad |x_n - a| \geq \varepsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{15}$$

Ahora, como $x_n \in A$, y A es compacto, por el teorema 4.7.1(3) existen una subsucesión (x_{n_k}) de (x_n) y $a' \in A$ tal que

$$(x_{n_k}) \to a'. \tag{16}$$

Luego, de (15) y (16) se tiene que, $|a-a'| \geq \varepsilon$. En consecuencia $a \neq a'$. Ahora, como f es continua, entonces por el teorema 5.4.1 se sigue que, $f(x_{n_k}) \to f(a')$. Así, $(y_{n_k} = f(x_{n_k}))$ es una subsucesión de (y_n) tal que

$$(y_{n_k}) \to f(a'). \tag{17}$$

En consecuencia, por (15), (17) y el teorema 4.11.2(1), $f(a) = f(a')$, pero esto contradice la inyectividad de f y así, el teorema queda probado. ∎

Teorema **5.10.5.** *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo no degenerado. Toda función continua e inyectiva $f : I \to \mathbb{R}$ tiene inversa $f^{-1} : f(I) \to I$ continua.*

Prueba: Si $I = [a, b]$ $(a \neq b)$, entonces como I es compacto, por el teorema 5.10.4, f^{-1} es continua.
El caso en que I sea un intervalo arbitrario se deja como ejercicio al lector. ∎

5.11. Homeomorfismos

Definición **5.11.1.** *Sean $A, B \subset \mathbb{R}$. Un* **homeomorfismo** *entre A y B es una biyección continua $f : A \to B$ cuya inversa $f^{-1} : B \to A$ es continua. Si tal función existe A y B se llaman* **homeomorfos.**

Nota **5.11.2.**

El teorema 5.10.5 nos asegura que si $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ es continua entonces I y $f(I)$ son homeomorfos. En el caso I compacto, el teorema 5.10.4 nos asegura que I y $f(I)$ son homeomorfos.

5.11.3.

1. Sean $A = [2,3] \cup \{4,5\}$ y $B = [8,9] \cup \{7,10\}$. Entonces A y B son homeomorfos.

   En efecto, la función $f : A \to B$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 7 & \text{si } x = 4 \\ 10 & \text{si } x = 5 \\ x + 6 & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

   es un homeomorfismo entre A y B (verificarlo).

2. El intervalo $(-1, 1)$ es homeomorfo a $\mathbb{R}$.

   En efecto, la función $f : \mathbb{R} \to (-1,1)$ dada por $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ es un homeomorfismo entre $(-1,1)$ y $\mathbb{R}$ (verificarlo).

5.12. Continuidad Uniforme

Definición **5.12.1.** *Sean $A \subset \mathbb{R}$ y $f : A \to \mathbb{R}$ una función. f se llama* **uniformemente continua (UC) en** *A, si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon)$*[2] *$> 0$ tal que si para todo $x, y \in A$ y $|x - y| < \delta$, entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.*
En símbolos,

$$f \text{ es UC en } A \Leftrightarrow [\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : \forall\, x, y \in A \ \text{ y } \ |x - y| < \delta \ \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon].$$

Nota **5.12.2.**

1. La diferencia esencial entre la continuidad y la continuidad uniforme de una función f en A es; que para el primer caso el δ a considerar depende de cada $x \in A$ y de ε mientras en el segundo caso el δ a considerar es el mismo para todo $x, y \in A$ y tan sólo depende de ε.

2. Claramente, si f es uniformemente continua en A, entonces f es continua, como veremos luego el recíproco no es cierto.

3. De la definición 5.12.1, podemos obtener una condición necesaria y suficiente para que f no sea uniformemente continua en A se tiene que:

[2] En este caso el delta sólo depende de ε

$$f \, no \, es \, UC \Leftrightarrow [\, \exists \, \varepsilon > 0 : \forall \, \delta > 0 \; \exists \, x, y \in A \;\; |x - y| < \delta \; y \;\; |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon.$$

4. Si $f : A \to \mathbb{R}$ es una función de Lipschitz, entonces f es UC en A.

   En efecto, Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Como f es de Lipschitz existe $M > 0$ tal que,
$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|,$$
   para todo $x, y \in A$. Así, $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ satisface la condición de la CU de f en A.

5. No toda función UC en A es de Lipschitz en A. Para ver esto, considérese la función $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{x}$, la cual es UC en $[0, +\infty)$ pero no es de Lipschitz (verificarlo).

5.12.3.

1. Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \operatorname{sen} x^2$, entonces f no es UC en $[0, \infty)$.
   En efecto, si f fuera uniformemente continua en $[0, \infty)$, entonces para $\varepsilon = \frac{1}{2}$, existiría, $\delta > 0$ tal que $x, y \geq 0$ y $|x - y| < \delta$ implicarían
$$|\operatorname{sen} x^2 - \operatorname{sen} y^2| < \frac{1}{2}. \tag{18}$$
   Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos $x_n = \sqrt{\pi}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}$ y $y_n = \sqrt{\pi}\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{2}}$, entonces $(x_n - y_n) \to 0$ y así, para el δ, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica
$$|x_n - y_n| < \delta. \tag{19}$$
   Así, de (17) y (18) se sigue que
$$|\operatorname{sen}(x_n)^2 - \operatorname{sen}(y_n)^2| = \left|\operatorname{sen}\left(\pi\frac{n}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\pi\frac{n+1}{2}\right)\right| = 1 < \frac{1}{2},$$
   lo cual no es posible, en consecuencia, f no es UC en $[0, \infty)$.

2. La función $f : (1, 2) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{x}$ es UC en $(1, 2)$.
   En efecto, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario queremos hallar $\delta > 0$ tal que
$$[\forall x, y \in A \;\; y \;\; |x - y| < \delta] \;\; \Rightarrow \;\; |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Si $x, y \in (1,2)$, entonces $x, y > 1$ y así, $\frac{1}{xy} < 1$. En consecuencia,

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| < \frac{|x-y|}{xy} < |x-y|.$$

Por lo tanto, tomando $\delta = \varepsilon$, obtenemos lo que queríamos. Luego, f es UC en $(1,2)$.

5.13. Continuidad Uniforme y Sucesiones

Teorema **5.13.1.** *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *f es UC en A.*

2. *f preserva sucesiones paralelas (es decir, si $(x_n), (y_n)$ son sucesiones paralelas en A, entonces $(f(x_n)), (f(y_n))$ son sucesiones paralelas en $\mathbb{R}$).*

Prueba: (1) $\Rightarrow$ (2) Sean (x_n) y (y_n) sucesiones paralelas en A. Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario, por 1, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x, y \in A$ se verifica que

$$|x-y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{20}$$

Como $(x_n) \parallel (y_n)$ para el δ hallado existe $n_\delta \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_\delta \quad \Rightarrow \quad |x_n - y_n| < \delta. \tag{21}$$

Luego,de (19) y (20) se sigue que, existe $n_\delta \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_\delta \quad \Rightarrow \quad |f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon.$$

Así, $(f(x_n)) \parallel (f(y_n))$ y por lo tanto, 2 es cierto.

(2) $\Rightarrow$ (1) Supongamos que 1 no es cierto, es decir, existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$, existen $x, y \in A$ con $|x-y| < \delta$ y $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$.
En consecuencia, para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos $\delta_n = \frac{1}{n}$, entonces existen $(x_n), (y_n) \subset A$ tales que

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad y \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon. \tag{22}$$

Ahora, como $|x_n - y_n| \to 0$, entonces $(x_n) \parallel (y_n)$ y por 2, $(f(x_n)) \parallel (f(y_n))$. Así, $|f(x_n) - f(y_n)| \to 0$, en contradicción con (21). Por lo tanto, 2 es cierto. ∎

5.13.2.

La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ es continua, pero no es UC.

En efecto, sean $x_n = n + \frac{1}{n}$ y $y_n = n$. Claramente,

$$|x_n - y_n| = \left| n + \frac{1}{n} - n \right| = \frac{1}{n} \to 0.$$

Así, $(x_n) \parallel (y_n)$.
Por otro lado,

$$|f(x_n) - f(y_n)| = \left| (n + \frac{1}{n})^2 - n^2 \right| = 2 + \frac{1}{n^2} > 2.$$

En consecuencia, $|f(x_n) - f(y_n)| \not\to 0$ y por lo tanto, $(f(x_n)) \nparallel (f(y_n))$.
Luego, por teorema 5.13.1, f no es UC en $\mathbb{R}$.
La continuidad de f es evidente.

5.14. Continuidad Uniforme y Funciones SRC

Teorema **5.14.1.** *Sean $f : A \to \mathbb{R}$ una función. Si f es UC en A, entonces f es SRC.*

Prueba: Sea (x_n) una sucesión de Cauchy en A, veamos que $(f(x_n))$ es de Cauchy.
Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario, como f es UC en A existe $\delta > 0$ tal que

$$|x - y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon, \tag{23}$$

para todo $x, y \in A$.
Por otro lado, como (x_n) es de Cauchy en A, para el δ hallado existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > n_0 \quad \Rightarrow \quad |x_n - y_m| < \delta. \tag{24}$$

Luego, de (22) y (23) se sigue que

$$m, n > n_0 \quad \Rightarrow \quad |f(x_n) - f(y_m)| < \varepsilon,$$

siempre que $m, n > n_0$. Así, $(f(x_n))$ es de Cauchy y por lo tanto, f es SRC. ∎

Nota **5.14.2.**

El recíproco del teorema 5.14.1 no es cierto como lo muestra el siguiente

5.14.3.

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$, por ejemplo 5.13.2, f no es UC en $\mathbb{R}$. Como f es continua y $\mathbb{R}$ es cerrado, se sigue del teorema 5.5.6 que f es SRC.

Nota **5.14.4.**

1. La clase de las funciones SRC es una clase intermedia entre la clase de las funciones continuas y la clase de las funciones uniformemente continuas.

2. El recíproco del teorema 5.14.1 es cierto si agregamos una condición adicional como lo muestra el siguiente

Teorema **5.14.5.** *Sean $f : A \to \mathbb{R}$ una función. Si f es SRC y A está acotado, entonces f es UC en A.*

Prueba: Supongamos que f no es UC. Procediendo como en (2) $\Rightarrow$ (1) del teorema 5.13.1, existen $\varepsilon > 0$ y las sucesiones $(x_n), (y_n) \subset A$ tales que, $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ y

$$|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon. \tag{25}$$

Ahora, como $(x_n) \subset A$ y A está acotado, entonces por el corolario 4.5.4, existen una subsucesión (x_{n_k}) de (x_n) y $a \in \mathbb{R}$ tales que

$$(x_{n_k}) \to a. \tag{26}$$

En consecuencia, como $|x_{n_k} - y_{n_k}| < \frac{1}{n_k}$ y por (25) se sigue que,

$$(y_{n_k}) \to a. \tag{27}$$

Luego, por (25) y (26) la sucesión $(x_{n_1}, y_{n_2}, x_{n_3}, y_{n_4}, \dots) \to a$ y así, es de Cauchy, entonces por la hipótesis $(f(x_{n_1}), f(y_{n_2}), f(x_{n_3}), f(y_{n_4}) \dots)$ es de Cauchy en contradicción con (24). Por lo tanto, f es UC en A. ∎

5.15. Continuidad y Continuidad Uniforme

Corolario 5.15.1. (Teorema de Heine)
Toda función continua definida en un conjunto compacto A es UC en A.

Prueba: Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto compacto y $f : A \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces A es cerrado y como f es continua por el teorema 5.5.6, f es SRC. Además, como A está acotado en $\mathbb{R}$ por el teorema 5.14.5, se sigue que f es UC en A. ∎

Nota **5.15.2.**

Otra prueba del corolario 5.15.1, se puede dar usando el teorema 5.13.1.

En efecto, Si f no fuera UC en A (compacto) , entonces por el teorema 5.13.1 existirían sucesiones (x_n) y (y_n) en A tales que $(x_n) \parallel (y_n)$, pero

$$(f(x_n)) \not\parallel (f(y_n)). \tag{28}$$

Ahora, como $(x_n) \subset A$ y A es compacto, existen (x_{n_k}) subsucesión de (x_n) y $a \in \mathbb{R}$ tales que

$$(x_{n_k}) \to a. \tag{29}$$

Por otro lado, $(x_n) \parallel (y_n)$ implica que,

$$(|x_{n_k} - y_{n_k}|) \to 0. \tag{30}$$

En consecuencia, por (28) y (29) se sigue que

$$(y_{n_k}) \to a. \tag{31}$$

Así, por (28), (30) y la continuidad de f en A, se sigue que

$$(f(x_{n_k})) \to f(a) \quad y \quad (f(y_{n_k})) \to f(a). \tag{32}$$

Por lo tanto, de (31) obtenemos que $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \to 0$, pero esto contradice (27) y así, f es UC en A.

5.16. Ejercicios

1. Probar sin usar directamente la condición de conexidad del intervalo $[a,b]$:
Si f es continua en $[a,b]$ y $f(a) < 0 < f(b)$ entonces existe $x \in [a,b]$ tal que $f(x) = 0$.

2. Si f es continua en a entonces existe un $\delta > 0$ tal que f está acotada en $(a-\delta, a+\delta)$.

3. Sin usar directamente la condición de compacidad del intervalo $[a,b]$ demuestre:
Si f es continua en $[a,b]$ entonces f está acotada superiormente en $[a,b]$.

4. Sin usar directamente la compacidad del intervalo $[a,b]$ demuestre:
Si f es continua en $[a,b]$, entonces f alcanza su valor máximo en $[a,b]$.

5. Sea f continua en [a,b] y $f(x) \in \mathbb{Q}$ para todo $x \in [a,b]$. ¿Qué puede decirse acerca de f?

6. ¿Cuántas funciones continuas f existen satisfaciendo que $[f(x)]^2 = x^2$ para todo $x \in D(f)$?

7. Supóngase que f y g son funciones continuas en [a,b] y que $f(a) < g(a)$ pero $f(b) > g(b)$. Pruebe que $f(x) = g(x)$ para algún $x \in [a,b]$.

8. Sea $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$, continua. Pruebe que $f(x) = x$ para algún $x \in [0,1]$.

9. Supóngase que f satisface la conclusión del teorema de los valores intermedios y que f toma sólo una vez cada uno de los valores. Pruebe que f es continua.

10. Supóngase que f satisface $f(x+y) = f(x) + f(y)$ y que f es continua en $x = 0$. Pruebe que f es continua en todo punto de su dominio.

11. Pruebe: (a) f continua en a implica que $|f|$ es continua en a.
(b) Toda f continua puede escribirse de la forma $f = g + h$, g par y continua y h impar y continua.
(c) Toda f continua puede escribirse de la forma $f = g - h$, g, h no negativas y continuas.

12. (a) Pruebe que si f es continua en L y que $\lim_{x \to a^+} g(x) = L$, entonces $\lim_{x \to a^+} f[g(x)] = f(L)$.

    (b) Ver que la condición de continuidad es esencial en (a).

13. (a) Probar que si f es continua en $[a, b]$, entonces existe una función g continua en $\mathbb{R}$ que satisface que $g(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$.
    (b) Véase que (a) puede ser falsa si se considera f continua en (a, b).

14. Demuestre que la restricción de toda función continua es continua.

15. Sean $f, g : X \subset \mathbb{R} \to Y \subset \mathbb{R}$, continuas en a. Si $f(a) \neq g(a)$, pruebe que existe un entorno abierto B de centro en a tal que $f(B) \cap g(B) = \emptyset$. En particular si $x \in B$ entonces $f(x) \neq g(x)$.

16. Sean I, J intervalos en $\mathbb{R}$ y $f : I \to J$ una biyección creciente. Demuestre que f (y en consecuencia f^{-1}) es continua.

17. Sea $X = A \cup B$. Sea $f : X \subset \mathbb{R} \to Y \subset \mathbb{R}$ una función. Probar que si $f_{|A}$ y $f_{|B}$ son continuas, entonces f es continua en $A \cap B$.

18. Sea $f(x) = x^2$, $x \in [-1, 0] \cup (1, \infty) = M$. Considere $f : M \to [0, \infty)$. ¿Son f y f^{-1} funciones continuas?

19. Demuestre que si f y g son homeomorfismos, entonces $f \circ g$ es un homeomorfismo.

20. Sean $X = [0, 1] \cup \{2, 3\}$ y $Y = [5, 6] \cup \{4, 7\}$. Defina un homeomorfismo entre X y Y.

21. Demuestre que todo intervalo (a, b) es homeomorfo a $\mathbb{R}$.

22. Una función $f : I \subset \mathbb{R} \to$ definida en un intervalo I, se llama **convexa** en I si para cada par $x, y \in I$ y cada par $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $\alpha + \beta = 1$ se verifica que,
$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y).$$

    a) Probar que si f es convexa en I, entonces
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b},$$

siempre que $a, b, c \in I$ y $a < b < c$.

b) Probar que f es convexa en I si y sólo si

$$\begin{vmatrix} 1 & a & f(a) \\ 1 & b & f(b) \\ 1 & c & f(c) \end{vmatrix} \geq 0,$$

siempre que $a, b, c \in I$ con $a < b < c$.

c) Probar que si f es convexa en I, entonces f es continua en I. Además, Si $a, b, c \in I$ con $a < b < c$ y

$$\begin{vmatrix} 1 & a & f(a) \\ 1 & b & f(b) \\ 1 & c & f(c) \end{vmatrix} \geq 0,$$

entonces f es continua en I.

23. Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y f una función continua en I tal que existen y son finitos los límites laterales en los extremos de I. Probar que f es UC en I.

24. Probar que si $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función UC en A y A está acotado, entonces f está acotada. Es decir, si f no está acotada cuando A está acotado, entonces f no es UC en A.

25. Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Si A es abierto, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

    a) f es continua en A.

    b) Para cada abierto G de $\mathbb{R}$ se tiene que $f^{-1}(G)$ es abierto.

    c) Para cada intervalo abierto y acotado I en $\mathbb{R}$ se tiene que $f^{-1}(I)$ es abierto.

26. Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Si F es cerrado, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

    a) f es continua en A.

    b) Para cada cerrado H de $\mathbb{R}$ se tiene que $f^{-1}(H)$ es cerrado.

    c) Para cada subconjunto H de A se tiene que $f(\overline{H}) \subset \overline{f(H)}$ es abierto.

5.17. Algunas Sugerencias para la solución de los ejercicios

1. Defina $A = \{x: \ a \leq x \leq b, \ y \ f(t) < 0 \ \forall t \in [a,x]\}$. Si $\alpha = \sup A$, verifique que, $f(\alpha) = 0$.

2. Aplique la definición de continuidad de f en $x = a$ para $\varepsilon = 1$.

3. Defina
$$A = \{x: \ a \leq x \leq b \ y \ f \ acotada \ en[a,b]\}.$$
Verifique que $\alpha = \sup A = b$, esto probaría que f está acotada superiormente en $[a,x]$...

4. Para verificar que $\alpha = \sup f([a,b]) = f(y)$ para algún $y \in [a,b]$, defina $g(x) = \frac{1}{\alpha - f(x)}$, $x \in [a,b]$ y pruebe que g no está acotada superiormente en $[a,b]$...

5. Aplique el teorema de Bolzano.

6. Una función f es evidente.

7. Defina una función $h: [a,b] \to \mathbb{R}$ utilizando las funciones f y g. Luego, aplique el teorema de Bolzano.

8. Proceda de manera similar al ejercicio 7.

9. Aplique el método de reducción al absurdo.

10. Demuestre que $f(0) = 0$ y que $f(x) - f(x_0) = f(x - x_0)$.

11. (a) Recuerde que $||x| - |y|| \leq |x - y|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

    (b) Use una adecuada combinación de la función f.

12. (a) Use adecuadamente las hipótesis.

    (b) Dar un ejemplo de una función f no continua para la cual $\lim\limits_{x \to a^+} f[g(x)] \neq f(L)$.

13. (a) Existe una g clara de elegir.

    (b) Tómese $f(x) = \frac{1}{x-a}$.

14. Utilice una adecuada manipulación de la definición de continuidad.

15. Suponga que $f(a) > g(a)$ y aplique la condición de continuidad para $\varepsilon = \frac{f(a)-g(a)}{3}$.

16. Un dibujo será de gran ayuda.

17. Aplique la definición.

18. Un dibujo será de gran ayuda (ver el ejemplo 5.11.3(1)).

19. Esto debe ser evidente de la definición de homeomorfismo.

20. Proceder como en el ejemplo 5.11.3(1).

21. Utilizar el ejemplo 5.11.3(2) y el ejercicio 20.

22. (a) Nótese que

$$b = \frac{c-b}{c-a}a + \frac{b-a}{c-a}c \quad y \quad \frac{c-b}{c-a} + \frac{b-a}{c-a} = 1.$$

    (b) ($\Rightarrow$) Use las relaciones dadas en la ayuda para la prueba de (a).

    ($\Leftarrow$) En este sentido no debería haber problemas.

    (c) Sean $a \in I$ y $\psi : I\backslash\{a\} \to \mathbb{R}$ dada por $\psi(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Pruebe que ψ es creciente y utilice el teorema 4.13.3.

23. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ los extremos del intervalo I. Defínase $L = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ y $M = \lim\limits_{x \to b^-} f(x)$. Ahora, encuentre α y β en I tales que $L < \alpha < \beta < M$ y recuerde que f es UC en $[\alpha, \beta]$.

24. Nótese que, $\overline{A} \subset \cup_{x \in A}(x - \delta, x + \delta)$. Además, $\overline{A}$ es compacto.

25. ($a \Rightarrow b$) Pruebe que $f^{-1}(A) \subset (f^{-1}(A))^{\circ}$. Sea $a \in f^{-1}(V)$ arbitrario, como V es abierto y f es continua en el abierto G,...

$(b \Rightarrow c)$ Esto es inmediato de la hipótesis b.

$(c \Rightarrow a)$ Sean $a \in G$ y $\varepsilon > 0$ arbitrarios. Considere $f^{-1}((f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon))$ y use la hipótesis (c).

26. $(a \Rightarrow b)$ Aplique la caracterización de clausura por sucesiones.

$(b \Rightarrow c)$ Nótese que, $H \subset f^{-1}[f(H)] \subset f^{-1}f[\overline{f(H)}]$.

$(c \Rightarrow)$ Aplique el método de reducción al absurdo.

5.18. Ejercicios Varios

1. Dada una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Argumente si son ciertas o falsas los siguientes enunciados:

   1.1.- $f([a,b])$ es un conjunto compacto.

   1.2.- $f([a,b))$ es conexo.

   1.3.- $f^{-1}(\{0\})$ es cerrado.

   1.4.- $f^{-1}(\mathbb{R})$ y $f^{-1}(\emptyset)$ son simultáneamente abiertos y cerrados.

   1.5.- $f((a,b))$ es abierto.

2. Demuestre que la función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \operatorname{sen}(\arctan e^x),$$

   es acotada y su rango es un intervalo.

3. Sean $f, g : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformemente continuas. Pruebe que:

   3.1.- $f + g$ es uniformemente continua.

   3.2.- Si f y g son acotadas, entonces fg es uniformemente continua.

4. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función que verifica la propiedad del valor intermedio en $[a,b]$. Si f es monótona, entonces f es continua en $[a,b]$.

5. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$f(x) = x + 0,001[x]$$

donde $[x]$ es la parte entera del número x. Comprobar que para cada $\varepsilon > 0,001$ se puede hallar un $\delta{=}\delta(w,\varepsilon)$[3] tal que $|f(x) - f(w)| < \varepsilon$ si $|x - w| < \delta$, mientras para $0 < \varepsilon \leq 0,001$ no se puede hacer esto para todo los valores de x. ¿En qué puntos deja de ser continua la función?

6. Supongamos que para cada $\delta > 0$, existe $\varepsilon = \varepsilon(\delta, a)$, tal que se verifica la desigualdad $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ siempre que $|x - a| < \delta$. ¿Se deduce de aquí que la función f es continua en a ¿Qué propiedad de la función f se describe por las desigualdades dadas?

7. Supongamos que para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon, a)$, tal que si $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, entonces $|x - a| < \delta$. ¿Se deduce de aquí que la función f es continua en a ¿Qué propiedad de la función f se describe por las desigualdades dadas?

8. Demuestre que el polinomio $P(x) = 1 + 3x + x^2 + x^5$ tiene al menos una raíz real.

9. Sea $f(x) = \tan x$. A pesar de ser $f(\frac{\pi}{4}) = 1$ y $f(3\frac{\pi}{4}) = -1$, no existe ningún punto x en el intervalo $[\frac{\pi}{4}, 3\frac{\pi}{4}]$ tal que $f(x) = 0$. Explicar por qué no hay contradicción con el teorema de Bolzano.

[3]Esta notación indica que el δ depende de ε y de w.