"La idea central del Cálculo diferencial es la noción de derivada. *Igual que la integral, la derivada fue originada por un problema de Geometría: el problema de hallar la tangente en un punto a una curva. Sin embargo, a diferencia de la integral, la derivada aparece muy tarde en la historia de la Matemática. Este concepto no se formuló hasta el siglo XVII, cuando el matemático francés Pierre de Fermat, trató de determinar los máximos y mínimos de ciertas funciones".* **Tom Apostol**

OBJETIVOS (Capítulo 6)

- Adquirir, interpretar y relacionar los conceptos básicos sobre diferenciabilidad.
- Estudiar, interpretar y asociar los teoremas principales sobre funciones derivables.
- Aplicar los teoremas de Rolle, Lagrange, Darboux y L'Hôpital en la solución de problemas.

Capítulo 6

Derivadas de las funciones reales

Gran parte de los logros tecnológicos y sin exagerar la casi totalidad de las aplicaciones de las Leyes Físicas de la naturaleza reposan en última instancia en un acontecimiento impensado, por lo poco conocido y que se dió a finales del siglo XVII. Este acontecimiento es el **Cálculo Infinitesimal**, suma del **Cálculo Diferencial** y el **Cálculo Integral**.

Son **Isaac Newton (1643-1727)** y **Gottfriend Wilhelm Leibniz (1646-1716)**, en trabajos independientes a quienes pueden atribuírsele la definición de **derivada**. Se cuenta que Leibniz publico primero, los mismos resultados que Newton descubriera 10 años antes. La historia, no obstante ha sido más generosa con Leibniz que con Newton y esto lo decimos por la notación:

La notación de Newton era poco sugestiva, lo que nosotros llamamos f(x), o y él lo llamaba "cantidades fluentes", y la derivada de f en x él la llamaba "fluxión". Además escribía $\dot{\mathbf{y}}$ en lugar de **y'**. Cierto es que Leibniz escribía $\frac{dy}{dx}$, para indicar la derivada de y con respecto a la variable x, esta notación es la que se usa actualmente.

Después importantes matemáticos como **Taylor (1685-1731)**, **Wallis (1616-1703)** y los **Bernoulli** (**Daniel (1700-1782)**, **Jacob (1654-1705)**, **Johann (1667-1705)**, y **Nicolas (1695-1726)**) entre otros, presentan multitud de ideas en el campo de la aplicación de las derivadas, tales como las Ecuaciones Diferenciales, el Cálculo de Variaciones, etc.

Pero el punto crucial de nuestra historia se ubica a mediados del siglo XIX, con los formidables Matemáticos **Agustin Louis Cauchy (1789-1857)** Y **Karl Weiestrass (1815-1897)**, quienes más hicieron para depurar el Cálculo Diferencial, sometiéndolo a una completa y continua revisión y escrito en lenguaje riguroso y moderno.

En el Análisis Clásico se encontraban algunos errores, uno de los más célebres era el de que toda función continua tenía derivada, esto respondía a la idea intuitiva de que toda curva dibujada en un papel, sin levantar el lapíz debía poseer necesariamente tangentes en todos los puntos. El propio Weierstrass sorprendió al mundo matemático cuando dió un ejemplo de una curva continua en todo su dominio sin tangente en ningún punto de su dominio.

En la actualidad, el Cálculo Diferencial representa una herramienta de trabajo científico primordial para Ingenieros, Físicos, Químicos, Economistas y por supuesto los Matemáticos.

La motivación del concepto de derivada a través de los problemas físicos como el de la velocidad que cambia en cada instante, la aceleración del movimiento variado, la intensidad de la corriente alterna, etc y los problemas geométricos como el de hallar rectas tangentes a curvas, nos muestran que los conceptos matemáticos como el de la derivada no están al margen de la vida, sino que son el reflejo matemático de fenómenos que ocurren en la naturaleza.

Así estos conceptos se desarrollaron históricamente a partir de aquellos problemas que la vida diaria generaba, unos de orden mecánico y otros de orden geométrico. Por lo tanto, podemos concluir una vez más que la matemática no es una ciencia acabada e invariante.

Este capítulo esta dedicado al estudio detallado de los conceptos y resultados fundamentales del Cálculo Diferencial. Uno de estos resultados es el famoso teorema del Valor Medio frecuentemente atribuido a **Joseph Louis Lagrange (1736-1813)** sobre todo en la literatura Europea. No obstante el primer enunciado de este teorema apareció en un trabajo de **André-Marie Ampere (1775-1837)** donde asumía que la derivada era continua. Quince años más tarde Cauchy probo el resultado como aparece actualmente.

6.1. Funciones Derivables

Definición 6.1.1. *Sean $f : A \to \mathbb{R}$ y $a \in A \cap A'$. La* **derivada** *de f en a denotada por $f'(a)$ se define como*

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}. \tag{1}$$

siempre que el límite exista. En este caso se dice que f es **derivable** *en $x = a$ y si $f'(x)$ existe para cada $x \in A \cap A'$ se dice que f es derivable en A.*

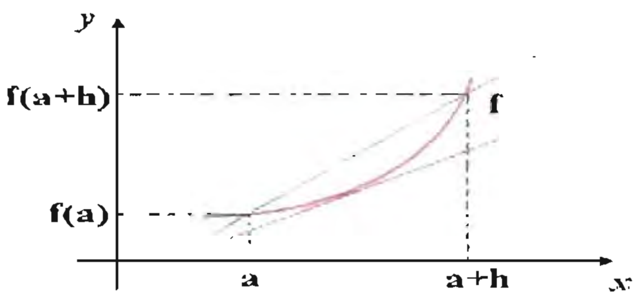

Figura 6.1: Definición de Derivada

Nota 6.1.2.

1. Si hacemos $x = a + h$, entonces cuando $h \to 0$, $x \to a$. Luego, podemos escribir (1) como

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \tag{2}$$

2. Si f es derivable en A, entonces obtenemos una nueva función $g : A \cap A' \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = f'(x)$, llamada **función derivada de** f. Si g es continua en A se dice que f es de **clase** C_A^1.

3. Otras notaciones para la derivada de f en a son

$$\frac{df}{dx}(a),\ Df(a),\ \frac{df}{dx}\Big|_{x=a}.$$

4. Cuando $a \in A \cap A'_+$, entonces si existe

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}, \tag{3}$$

lo escribimos como $f'_+(a)$, análogamente, cuando $a \in A \cap A'_-$, entonces si existe

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}, \tag{4}$$

lo escribimos como $f'_-(a)$. A $f'_+(a)$ y $f'_+(a)$ se les llama **derivadas laterales** de f en a.
Claramente, f es derivable en a si y sólo si existen $f'_+(a)$ y $f'_-(a)$. En este caso, $f'_+(a) = f'_-(a) = f'(a)$.

5. Si $f : A \to \mathbb{R}$ tiene derivada en $a \in A \cap A'$, entonces dado $B \subset A$, tal que $a \in B \cap B'$, la función $g = f_{|B}$ es derivable en a y $g'(a) = f'(a)$. (Verificarlo)
Si $B = I \cap A$, I un intervalo abierto tal que $a \in I$, entonces la existencia de $g'(a)$ implica la existencia de $f'(a)$, $g = f_{|B}$. (Verificarlo)

6. Si $h \neq 0$, entonces los dos puntos $(a, f(a))$ y $(a+h, f(a+h))$ determinan como en la figura 6.1, una recta cuya pendiente es

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

La recta tangente a la gráfica de f en $(a, f(a))$ se define como la recta que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y cuya pendiente es

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h},$$

siempre que este límite exista.

6.1.3.

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función constante dada por $f(x) = c$ ($c \in \mathbb{R}$ fijo), entonces $f'(a) = 0$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

En efecto, se $a \in \mathbb{R}$ arbitrario, obsérvese que

$$\lim_{x \to a} \tfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x \to a} \tfrac{0-0}{x-a} = \lim_{x \to a} \tfrac{0}{x-a} = \lim_{x \to a} 0 = 0 \tag{5}$$

en consecuencia, $f'(a) = 0$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

2. La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x$ es derivable en $\mathbb{R}$, y $f'(a) = 1$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

   En efecto, sea $a \in \mathbb{R}$ arbitrario, nótese que

   $$\lim_{x \to a} \tfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x \to a} \tfrac{x-a}{x-a} = \lim_{x \to a} 1 = 1.$$

   Luego, $f'(a) = 1$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la función valor absoluto, dada por $f(x) = |x|$, entonces f no es derivable en $x = 0$.

   En efecto, obsérvese que,

   $$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x}{x} = 1 \tag{6}$$

   siempre que $x > 0$ y

   $$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{-x}{x} = -1, \tag{7}$$

   siempre que $x < 0$. Luego, por (6) y (7), $f'_+(0) = 1 \neq -1 = f'_-(0)$. Por lo tanto, f no es derivable en $x = 0$.

4. La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

   $$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

   es derivable en $x = 0$ y $f'(0) = 0$.

   En efecto, para cada $x \neq 0$ se verifica que

   $$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = \frac{x^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{x})}{x} = x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right). \tag{8}$$

   Ahora, como $\alpha(x) = \operatorname{sen}(\frac{1}{x})$ está acotada y $\beta(x) = x \to 0 \quad (x \to 0)$, entonces de (8) y el corolario 4.11.2(2(d)) se sigue que, $f'(0) = 0$.

5. La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x\,\mathrm{sen}(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

es continua en 0 pero no es derivable en 0.

En efecto, por el argumento dado en el ejemplo 6.1.3(4) se sigue que f es continua en 0. Por otro lado, para todo $x \neq 0$ se tiene que

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = \frac{x\,\mathrm{sen}(\frac{1}{x})}{x} = \mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right). \tag{9}$$

Como $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{sen}(\frac{1}{x})$ no existe (ver ejemplo 4.11.4(1)), entonces de (9) se sigue que f no es derivable en 0.

6.2. La Diferencial

Teorema 6.2.1. *Sean $a \in A \cap A'$ y $f : A \to \mathbb{R}$ una función. f es derivable en a si y sólo si existe una función lineal $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $Tx = \lambda x$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\lim_{h\to 0} \left|\tfrac{f(a+h)-f(a)-Th}{h}\right| = 0. \tag{10}$$

Prueba: ($\Rightarrow$) Supongamos que f es derivable en $x = a$, entonces

$$\lim_{h\to 0} \left|\tfrac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a)\right| = \lim_{h\to 0} \left|\tfrac{f(a+h)-f(a)-hf'(a)}{h}\right| = 0.$$

Así, basta tomar $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $Tx = f'(a)x$.

($\Leftarrow$) Supongamos que existe una función lineal $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $Tx = \lambda x$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$ que satisface (10). Luego,

$$\lim_{h\to 0} \left|\tfrac{f(a+h)-f(a)}{h} - \lambda\right| = 0.$$

En consecuencia,

$$\lim_{h\to 0} \tfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lambda.$$

Así, f es derivable en a y $f'(a) = \lambda$. ∎

Nota **6.2.2.**

Sea $f : A \to \mathbb{R}$ es derivable en $a \in A \cap A'$, a la función lineal $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $Tx = f'(a)x$, se llama **diferencial de** f **en** a. Nótese que, $Th = f'(a)h$ es una aproximación a $f(a+h) - f(a)$ para h suficientemente pequeño.

6.2.3.

Dada la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f(x) = 2x$, veamos que f es derivable en cada $a \in \mathbb{R}$ y hallemos la diferencial de f en a.

Sea $a \in \mathbb{R}$ arbitrario y $h \neq 0$, nótese que,

$$\left|\frac{f(a+h) - f(a) - \lambda h}{h}\right| = \left|\frac{2(a+h) - 2a - \lambda h}{h}\right| = \left|\frac{h(2-\lambda)}{h}\right| = |2-\lambda|, (11)$$

Luego, si $\lambda = 2$, (11) tiende a 0 cuando h tiende a 0. En consecuencia, podemos tomar $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $Tx = 2x$ y por el teorema 6.2.1, f es derivable en a y la diferencial de f en a es $Tx = 2x$. Además, $f'(a) = 2$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

6.3. Diferenciabilidad y Continuidad

Teorema **6.3.1.** *Sean $f : A \to \mathbb{R}$ y $a \in A \cap A'$. Si existen $f'_+(a)$ y $f'_-(a)$ (pueden no ser iguales) entonces f es continua en a.*

Prueba: Como para todo $x \neq a$ se verifica que

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a).$$

Entonces por la hipótesis

$$\lim_{x \to a^+} [f(x) - f(a)] = \lim_{x \to a^+} \tfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \lim_{x \to a^+} (x - a) = f'_+(a)0 = 0. \qquad (12)$$

Análogamente, concluimos que

$$\lim_{x \to a^-} [f(x) - f(a)] = 0. \qquad (13)$$

En consecuencia, de (12) y (13) se sigue que, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ y así, f es continua en a. ∎

Nota **6.3.2.**

1. Claramente del teorema 6.3.1, se sigue que si f es derivable en a, entonces f es continua en a. Por el ejemplo 6.1.3(3), el recíproco del resultado anterior no es cierto.

2. Una función f puede se derivable en a sin que $|f|$ sea derivable en a como lo muestra el ejemplo 6.1.3(3), pero agregando una condición adicional obtenemos el siguiente

Teorema **6.3.3.** *Sean $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $a \in I$, I un intervalo abierto. Si f es derivable en a y $f(a) \neq 0$, entonces $|f|$ es derivable en a.*

Prueba: Como f es derivable en a entonces f es continua en a y por ser $f(a) \neq 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$f(x) \neq 0, \tag{14}$$

para todo $x \in (a - \delta, a + \delta) \cap I$. (Ver teorema 5.6.1)
Si $f(a) > 0$, entonces por el ejemplo 5.8.5(4), $f(x) > 0$ para todo $x \in (a - \delta, a + \delta) \cap I$. Luego, $|f| = f$ en $(a - \delta, a + \delta) \cap I$ y por la hipótesis f es derivable en a.
Si $f(a) < 0$, entonces por el ejemplo 5.8.5(4), $f(x) < 0$ para todo $x \in (a - \delta, a + \delta) \cap I$. Luego, $|f| = -f$ en $(a - \delta, a + \delta) \cap I$ y por la hipótesis $-f$ es derivable en a y por lo tanto f es derivable en a. ∎

6.3.4.

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Claramente, f no es derivable en 0 (ni siquiera es continua en $x = 0$). Por otro lado, $|f| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ viene dada por $|f|(x) = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$, la cual es derivable en $\mathbb{R}$. Este ejemplo muestra que $|f|$ puede ser derivable en a sin que f sea derivable en a.
En el ejercicio 2 se darán condiciones suficientes para que $|f|$ derivable implique f derivable.

6.4. Álgebra de Derivadas

Teorema **6.4.1. (Operaciones con derivadas)**
Sean $f, g : A \to \mathbb{R}$ funciones derivables en $a \in A \cap A'$. Entonces las funciones $f+g$, fg y $\frac{f}{g}$ $(g(a) \neq 0)$ son derivables en a y

1. $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.
2. $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.
3. $(\frac{f}{g})'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{[g(a)]^2}$, $(g(a) \neq 0)$

Prueba:

1. Nótese que, para todo $x \neq a$ se verifica que,
$$\begin{aligned} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x-a} &= \frac{f(x) + g(x) - f(a) - g(a)}{x-a} \\ &= \frac{f(x) - f(a)}{x-a} + \frac{g(x) - g(a)}{x-a}. \end{aligned} \tag{15}$$
En consecuencia, como f y g son derivables en a se sigue de (15) que, $f+g$ es derivable en a y así, 1 es cierto.

2. Para todo $x \neq a$ se tiene que
$$\begin{aligned} \frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x-a} &= \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x-a} \\ &= \frac{f(x)g(x) - f(x)g(a) + f(x)g(a) - f(a)g(a)}{x-a} \\ &= g(a)\frac{f(x) - f(a)}{x-a} + f(x)\frac{g(x) - g(a)}{x-a}. \end{aligned} \tag{16}$$
Como f y g son derivables en a y f es continua en a, entonces por (16), fg es derivable en a y así, 2 es cierto.

3. Obsérvese que, para $x \neq a$ se sigue que,
$$\begin{aligned} \frac{(\frac{1}{g})(x) - (\frac{1}{g})(a)}{x-a} &= \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}}{x-a} \\ &= -\frac{g(x) - g(a)}{x-a}\frac{1}{g(x)g(a)}. \end{aligned} \tag{17}$$

Luego, como g es derivable en a y g es continua en a con $g(a) \neq 0$, de (17) se sigue que, $\frac{1}{g}$ es derivable en a y

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{[g(a)]^2}. \tag{18}$$

Por otro lado, como $(\frac{f}{g})(x) = f(x)\frac{1}{g(x)}$. Entonces de 2 y (18), obtenemos 3, para $g(a) \neq 0$.

∎

6.5. Regla de la Cadena

Teorema 6.5.1. (Regla de la Cadena)
Sean $f : A \to \mathbb{R}$, $g : B \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in A \cap A'$, $b \in B \cap B'$, $f(A) \subset B$ y $b = f(a)$. Si f es derivable en a y g es derivable en b, entonces $h = g \circ f : A \to \mathbb{R}$ es derivable en a y

$$(g \circ f)'(a) = g'[f(a)]f'(a).$$

Prueba: Definamos las funciones $\alpha : A \to \mathbb{R}$ y $\beta : B \to \mathbb{R}$ mediante

$$\alpha(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) & \text{si } x \neq a \\ 0 & \text{si } x = a \end{cases}$$

y

$$\beta(y) = \begin{cases} \frac{g(y)-g(b)}{y-b} - g'(b) & \text{si } y \neq b \\ 0 & \text{si } y = b \end{cases}$$

Como f y g son derivables en a y b respectivamente, entonces α y β son continuas en a y b respectivamente. Ahora, por la definición de α y β tenemos que

$$\begin{aligned} h(x) - h(a) &= g[f(x)] - g[f(a)] \\ &= g(y) - g(b) \\ &= (y-b)[\beta(y) + g'(b)] \\ &= [f(x) - f(a)][\beta(y) + g'(b)] \\ &= (x-a)[\alpha(x) + f'(a)][\beta(y) + g'(b)]. \end{aligned} \tag{19}$$

Luego, para $x \neq a$ por (19) obtenemos que

$$\frac{h(x)-h(a)}{x-a} = [\alpha(x)+f'(a)][\beta(y)+g'(b)]. \tag{20}$$

Por otro lado, si $x \to a$, por la continuidad de α y f en a y β en b se tiene que

$$\alpha(x) \to \alpha(a) = 0 \;\; y \;\; y = f(x) \to b = f(a) \;\; (\Rightarrow \;\; \beta(y) \to \beta(b) = 0). \tag{21}$$

En consecuencia, de (20) (21) se sigue que, h es derivable en a y que $h'(a) = g'[f(a)]f'(a)$. ∎

Corolario **6.5.2.** *Sea $f : A \to B \subset \mathbb{R}$ una biyección con inversa $g = f^{-1} : B \to A$. Si f es derivable en $a \in A \cap A'$ y g es continua en $b = f(a)$, entonces g es derivable en b si y sólo si $f'(a) \neq 0$. Además, $g'(b) = \frac{1}{f'(a)}$.*

Prueba: ($\Rightarrow$) Supongamos que g es derivable en b. Veamos que $f'(a) \neq 0$. Sea $(x_n) \subset A \backslash \{a\}$ tal que $(x_n) \to a$. Entonces por la continuidad de f en a (f es derivable en a) se tiene que $(f(x_n)) \to f(a) = b$ y por la inyectividad de f se sigue que $(f(x_n)) \subset B \backslash \{b\}$. En consecuencia, por el teorema 4.7.1(1) $b \in B \cap B'$.
Por otro lado, como $(g \circ f)(x) = x$, entonces por la regla de la cadena

$$g'[f(a)]f'(a) = g'(b)f'(a) = 1.$$

Por lo cual, $f'(a) \neq 0$.

($\Leftarrow$) Supongamos que $f'(a) \neq 0$ y probemos que g es derivable en b.
Para todo $x \neq a$ tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{g(y)-g(b)}{y-b} &= \frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(b)}{y-b} \\ &= \frac{f^{-1}[f(x)]-f^{-1}[f(a)]}{f(x)-f(a)} \\ &= \frac{x-a}{f(x)-f(a)} \\ &= \frac{1}{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}. \end{aligned} \tag{22}$$

Ahora, si $y \to b$, entonces por la continuidad de g en b se sigue que, $g[f(x)] \to g(b)$, es decir, $x \to a$ y por (22) g es derivable en b y $g'(b) = \frac{1}{f'(a)}$.

6.5.3.

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable y consideremos las funciones $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $g(x) = f[f(f(x))]$ y $h(x) = 2[f(x)]^2$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$g'(x) = f'(x)f'[f(x)]f'[f(f(x))] \text{ y } h'(x) = 4f(x)f'(x).$$

6.6. Derivadas Laterales y Monotonía

Teorema **6.6.1.** *Sean $f : A \to \mathbb{R}$ una función y $a \in A \cap A'_+$ (respectivamente, $a \in A \cap A'_-$). Si $f'_+(a) > 0$ (respectivamente, $f'_-(a) > 0$), entonces existe $\delta > 0$ tal que $f(a) < f(x)$ (respectivamente, $f(x) < f(a)$), para todo $x \in (a, a+\delta) \cap A$ (respectivamente, para todo $x \in (a-\delta, a) \cap A$).*

Prueba: Por la hipótesis, $\lim\limits_{h \to 0^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'_+(a) > 0$. Entonces por el teorema 4.11.5, existe $\delta > 0$ tal que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0, \tag{23}$$

para todo $x \in (a, a+\delta) \cap A$. En consecuencia, para $x > a$ se sigue de (23) que $f(x) > f(a)$ para todo $x \in (a, a+\delta)$.
El caso $f'_+(a) < 0$, se resuelve de manera similar. ∎

Nota **6.6.2.**

El teorema 6.6.1 tiene su dual para $f'_-(a)$.

Corolario **6.6.3.** *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ monótona no decreciente. Si $f'_+(a)$ y $f'_-(a)$ existen, entonces $f'_+(a) \geq 0$ y $f'_-(a) \geq 0$.*

Prueba: Supongamos que $f'_+(a)$ existe y que $f'_+(a) < 0$. Entonces por el teorema 6.6.1, existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < f(a)$ para todo $x \in (a-\delta, a+\delta) \cap A$. En consecuencia, $a < x$ y $f(x) < f(a)$, en contradicción con la hipótesis. Así, $f'_+(a) \geq 0$.
De manera similar se prueba el caso en que exista $f'_-(a)$. ∎

Corolario **6.6.4.** *Sea $a \in A \cap A'$. Si $f : A \to \mathbb{R}$ es derivable en a con $f'(a) > 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que, $x, y \in A$ y $a - \delta < x < a < y < a + \delta$ implica $f(x) < f(a) < f(y)$.*

Prueba: Como $a \in A \cap A'$, entonces $a \in A \cap A'_+$ y $a \in A \cap A'_-$.
Por otro lado, como $f'(a) > 0$, entonces $f'_+(a) > 0$. Luego, por el teorema 6.6.1, existen $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tales que

$$f(a) < f(y) \quad y \quad f(x) < f(a),$$

para todo $y \in (a, a+\delta_1) \cap A$ y para todo $x \in (a-\delta_2, a) \cap A$. En consecuencia, para $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$ se tiene que

$$[x, y \in A \;\; y \;\; a - \delta < x < a < y < a + \delta] \quad \Rightarrow \quad f(x) < f(a) < f(y).$$

∎

Nota **6.6.5.**

1. El corolario 6.6.3 tiene su versión dual cuando f es no creciente. (Enunciarlo y probarlo)
2. El corolario 6.6.4 tiene su versión dual cuando $f'(a) < 0$. (Enunciarlo y probarlo)

El estudio sobre el comportamiento de una función, así, como muchos problemas que se nos presentan en la vida real son atacados a través del estudio y localización de los máximos y mínimos de una función.

Pierre de Fermat (1601-1665) fue uno de los primeros investigadores que utilizó las derivadas para la determinación de los máximos y mínimos de una función.

6.7. Extremos Locales y Absolutos

Definición **6.7.1.** *Una función $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiene un* **máximo** *(respectivamente,* **mínimo***)* **local** *en $a \in A$ si existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \leq f(a)$ (respectivamente, $f(a) \leq f(x)$) para todo $x \in (a - \delta, a + \delta) \cap A$.*
Si $f(x) \leq f(a)$ (respectivamente, $f(a) \leq f(x)$) para todo $x \in A$, entonces f tiene **máximo** *(respectivamente,* **mínimo***)* **absoluto** *en a.*
De la definición se sigue que todo máximo (respectivamente, mínimo) es máximo (respectivamente, mínimo) local. El recíproco no es cierto (dar un contraejemplo).

6.7.2.

La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = |x|$ tiene mínimo absoluto en $x = 0$, pues $f(0) = 0 \leq |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Se puede verificar que una función f tiene máximo absoluto (respectivamente, local) en a si y sólo si $-f$ tiene mínimo absoluto (respectivamente, local) en a.

Corolario 6.7.3. *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función tal que existe $f'_+(a)$ (respectivamente, $f'_-(a)$) en $a \in A \cap A'_+$ (respectivamente, $a \in A \cap A'_-$). Si f tiene un máximo local en a, entonces $f'_+(a) \leq 0$ (respectivamente, $f'_-(a) \geq 0$). (Ver Figura 6.2)*

Prueba: Supongamos que $f'_+(a) > 0$. Entonces por el teorema 6.6.1, existe $\delta_1 > 0$ tal que $f(x) > f(a)$ para todo $x \in (a, a + \delta) \cap A$.
Por otro lado, f tiene un máximo local en a, luego, existe $\delta_2 > 0$ tal que $f(a) \geq f(x)$ par todo $x \in (a - \delta_2, a + \delta_2) \cap A$. Ahora, si $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$, entonces para todo $x \in (a, a + \delta) \cap A$ se tiene que

$$f(x) > f(a) \quad y \quad f(x) \leq f(a),$$

lo cual es absudo. Así, $f'_+(a) \leq 0$.
El caso en que exista $f'_-(a)$ y f tenga un máximo local en a se resuelve de manera análoga al caso anterior. ∎

Nota **6.7.4.**

El corolario 6.7.3 tiene su dual cuando f tiene un mínimo local en a. (Enunciarlo y probarlo)

Corolario 6.7.5. *Sean $a \in A \cap A'$ y $f : A \to \mathbb{R}$ una función derivable en a. Si f tiene un máximo (respectivamente, mínimo) local en a, entonces $f'(a) = 0$. (Ver Figura 6.2)*

Prueba: Por el corolario 6.7.3 se sigue que

$$f'_+(a) \leq 0 \quad y \quad f'_-(a) \geq 0. \tag{24}$$

Ahora, como f es derivable en a, entonces

$$f'(a) = f'_+(a) = f'_-(a). \tag{25}$$

En consecuencia, de (24) y (25), se sigue que $f'(a) = 0$. ∎

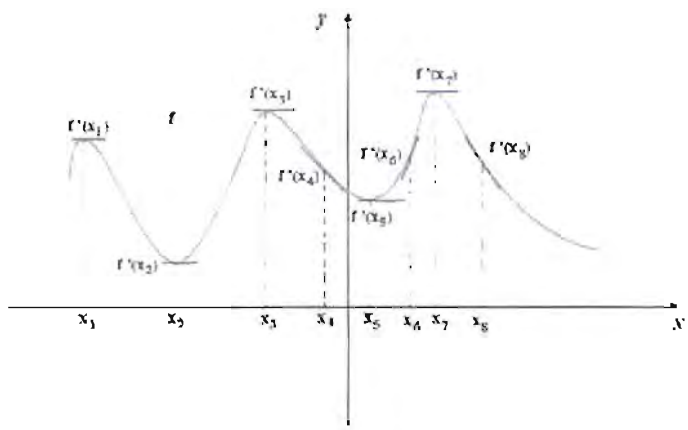

Figura 6.2: Extremos de una Función

6.7.6.

1. La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$ es creciente en $\mathbb{R}$ y $f'(x)$ no es positiva para todo $x \in \mathbb{R}$, ya que $f'(0) = 0$. En corolario 6.9.9 encontraremos que si f es no decreciente, entonces $f' \geq 0$.

2. La derivada de una función puede ser positiva sin ser f monótona, para ver esto considere $f : A = (0,1) \cup (2,3) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \in (0,1) \\ x - 1 & \text{si } x \in (2,3) \end{cases}$$

Entonces f satisface que $f'(x) > 0$ para todo $x \in A$, pero f no es creciente en A. (¿Por qué?)
El corolario 6.9.8 nos dará condiciones suficientes para que $f' > 0$ implique f creciente.

3. Una función f puede tener un máximo (o mínimo) local en a y esto no es suficiente para concluir que $f'(a) = 0$. Por ejemplo, la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -|x|$ tiene un máximo local en $x = 0$, pero f no tiene derivada en 0.

También puede suceder que f tenga un máximo en a pero $f'(a) \neq 0$.

Por ejemplo, la función $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x$, satisface que $f'_{-}(1) = 1 \neq 0$, pero en $x = 1$, la función f alcanza su valor máximo.

Definición **6.7.7.** *Un punto $a \in A \cap A'$ se llama un* **punto crítico** *de una función $f : A \to \mathbb{R}$ si $f'(a) = 0$. (Ver Figura 6.2)*

Nota **6.7.8.**

Si $a \in A \cap A'_{+} \cap A'_{-}$ es un punto de máximo o mínimo local de una función derivable $f : A \to \mathbb{R}$, entonces por el corolario 6.8.5, a es un punto crítico de f. Nótese que, el recíproco es falso como lo muestra el ejemplo 6.8.6(1).

6.8. Teorema de Darboux

El próximo teorema muestra un resultado sorprendente que garantiza que la función derivada f' de una función f satisface la propiedad del valor intermedio sin la condición de que f' sea continua, tal teorema se conoce como teorema de Darboux en honor al matemático **G. Darboux (1842-1917)**.

Teorema **6.8.1. (De Darboux)**
Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivable. Si $f'(a) < d < f'(b)$ (respectivamente, $f'(a) > d > f'(b)$), entonces existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $f'(x_0) = d$.

Prueba: Definamos la función $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ mediante $g(x) = f(x) - dx$. Claramente, g es derivable en $[a, b]$ y $g'(x) = f'(x) - d$.
Por otro lado, como g es continua en $[a, b]$, por el corolario 5.9.3 de Weierstrass g alcanza su valor mínimo sobre $[a, b]$. Sea $x_0 \in [a, b]$ el punto donde g alcanza su valor mínimo.

Afirmación. $x_0 \in (a, b)$.
En efecto, si $x_0 = a$, entonces por la hipótesis $g'(a) < 0$. En consecuencia, por el teorema 6.6.1, existe $x > a$ tal que $g(x) < g(a)$, lo que contradice el hecho de que de g al alcanza su valor mínimo en x_0.
Si $x_0 = b$, entonces por la hipótesis $g'(b) > 0$. Luego, por el teorema 6.15, existe $x < b$ tal que $g(x) > g(b)$, lo que contradice el hecho de que g alcanza su valor mínimo en x_0. Así, la afirmación es cierta.
Ahora, por la afirmación y el corolario 6.7.5, se sigue que $f'(x_0) = d$. El caso $f'(a) > d > f'(b)$ se prueba de manera análoga al caso anterior. ∎

Corolario 6.8.2. *Sea I un intervalo en $\mathbb{R}$ y $f : I \to \mathbb{R}$ una función derivable en I. Entonces la función f' no tiene discontinuidades de primera especie.*

Prueba: Sea $a \in I$ arbitrario. Probar que f' no tiene discontinuidades de primera especie en a es equivalente a probar que:
$\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)$ y $\lim\limits_{x\to a^-} f'(x)$ existen, entonces f' es continua en a.
Consideremos $L = \lim\limits_{x\to a^+} f'(x)$ y probemos $L = f'(a)$.
Supongamos que $L \neq f'(a)$. Entonces puede ocurrir:
Caso 1. $L > f'(a)$. Entonces por un argumento de densidad existe $d \in \mathbb{R}$ tal que

$$f'(a) < d < L = \lim_{x\to a^+} f'(x). \tag{26}$$

Ahora, por (26) y el corolario 4.11.6, existe $\delta > 0$ tal que

$$f'(x) > d \tag{27}$$

para todo $x \in (a, a+\delta) \cap I$. Luego, si $x = a + \frac{\delta}{2}$, entonces por (26) y (27) se tiene que

$$f'(a) < d < f'\left(a + \frac{\delta}{2}\right). \tag{28}$$

En consecuencia, por el teorema de Darboux aplicado a $g = f_{|[a,a+\frac{\delta}{2}]}$, existe $x_0 \in (a, a+\frac{\delta}{2})$ tal que $g'(x_0) = f'(x_0) = d$. Pero esto último contradice a (27) y así, $L > f'(a)$ no es posible.

Caso 2. $L < f'(a)$. Este caso se prueba procediendo de manera similar al caso anterior.
En consecuencia, $f'(a) = L$.
Por último, procediendo de manera análoga a la primera parte se puede probar que $L = \lim\limits_{x\to a^-} f'(x)$. Por lo tanto, cuando existen $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)$ y $\lim\limits_{x\to a^-} f'(x)$ entonces f' es continua en $x = a$. Así, f' no tiene discontinuidades de primera especie. ∎

6.8.3.

La función $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

no puede ser la derivada de ninguna función $g : A \to \mathbb{R}$.

En efecto, si existe una función $g : A \to \mathbb{R}$ tal que $g'(x) = f(x)$, entonces $\lim\limits_{x\to 1^+} g'(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to 1^-} g'(x) = 1$, es decir g' tiene discontinuidades de primera especie, en contradicción con el corolario 6.7.2 Por lo tanto, f no es la derivada de ninguna función g.

6.9. Teoremas de Rolle y del Valor Medio

El siguiente teorema conocido como teorema de Rolle, en honor a **Michael Rolle (1652-1719)**, quien en 1690 lo estableció, nos dice que la función derivada f' de una función continua f que asume los mismos valores en los extremos de un intervalo, tiene al menos un cero en el interior del intervalo. Y desde el punto de vista geométrico el teorema de Rolle puede interpretarse como: *El gráfico de una función continua en un intervalo y derivable en el interior del intervalo, con valores coincidentes en los extremos del intervalo tiene una tangente horizontal en algún punto en el interior del intervalo.* (Ver Figura 6.3)

Teorema **6.9.1. (De Rolle)**
Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$. Si f es derivable en (a,b) y $f(a) = f(b)$, entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Prueba: Como f es continua en $[a,b]$, entonces por el corolario 5.9.3 de Weierstrass existen

$$m = \text{mín}\{f(x) : x \in [a,b]\} \quad y \quad M = \text{máx}\{f(x) : x \in [a,b]\}$$

Ahora, por la hipótesis si $m = f(a)$ y $M = f(b)$) (o $M = f(a)$ y $m = f(b)$), entonces $m = M$ y así, f sería una función constante en $[a,b]$. Luego, cualquier $c \in (a,b)$ satisface que $f'(c) = 0$ y por lo tanto, el resultado sería cierto.
Por otro lado, si f alcaza su valor máximo o mínimo en algún $c \in (a,b)$, entonces por el corolario 6.8.5, $f'(c) = 0$. Así, el teorema queda probado. ∎

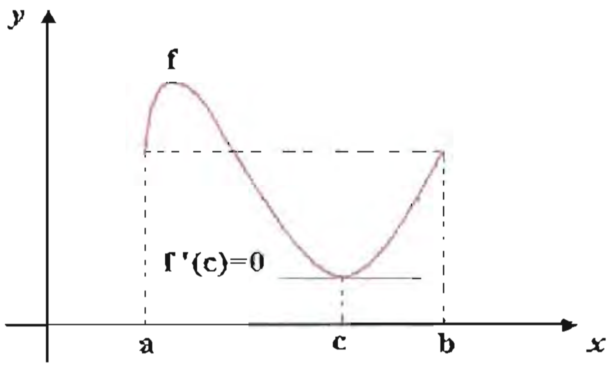

Figura 6.3: Interpretación geométrica del teorema de Rolle

6.9.2.

Sean f, g dos funciones derivables en el intervalo (a, b) tal que $f'g - fg' \neq 0$ en (a, b). Entonces entre dos ceros de f se encuentra uno de g.

En efecto, razonando por reducción al absurdo, supongamos que existen $x, y \in (a, b)$ con $x < y$ y $f(x) = f(y) = 0$ pero $g(t) \neq 0$ para todo $t \in [x, y]$. Como la función $\frac{f}{g}$ satisface las condiciones del teorema de Rolle (verificarlas) en $[x, y]$, entonces existe $c \in (x, y)$ tal que $(\frac{f}{g})'(c) = 0$. Es decir,

$$\frac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{[g(c)]^2} = 0.$$

En consecuencia, $f'(c)g(c) - f(c)g'(c) = 0$, en contradicción con la hipótesis. Así, el resultado es cierto.

Uno de los resultados más importantes y de mayor importancia del Análisis Matemático es el Teorema del Valor Medio establecido por **J.L Lagrange (1736-1813).**

Teorema 6.9.3. (Del Valor Medio)(TVM)
Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$. Si f es derivable en (a, b), entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Prueba: Consideremos la función $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a).$$

Claramente, por las hipótesis g es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Además, $g(a) = g(b) = 0$. En consecuencia, g satisface las condiciones del teorema de Rolle y por lo tanto, existe $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$. Es decir,

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

Así, $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. ∎

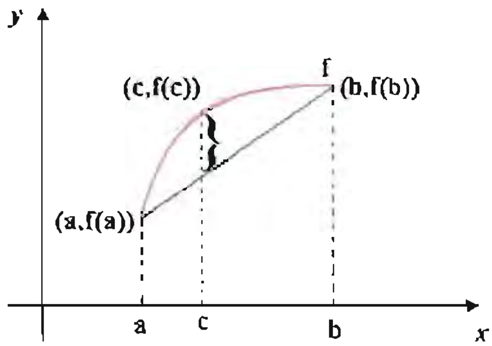

Figura 6.4: Interpretación geométrica del teorema del valor medio

Nota 6.9.4.

1. Una ayuda para definir la función g, en la prueba del TVM se puede hallar considerando la función g como la "distancia" entre la función f y la función que define la recta secante que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

2. El teorema del valor medio tiene la siguiente interpretación geométrica: *Para una función continua f definida en un intervalo $[a, b]$ y derivable*

en (a,b) existe un punto $c \in (a,b)$ donde la pendiente de la recta tangente la la curva $(x, f(x))$ en el punto $(c, f(c))$ es paralela a la recta que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ cuya pendiente es $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. (Ver Figura 6.4)

3. Obsérvese que, si consideramos $f(a) = f(b)$ en el teorema del valor medio obtenemos que existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$ y este es el teorema de Rolle. Así, el teorema del valor medio puede considerarse como una extensión del teorema de Rolle.

6.9.5.

Usemos el teorema del valor medio para verificar que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$.

En efecto, asumiendo que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = e^x$ es derivable en $\mathbb{R}$ y que $f'(x) = e^x$ para cada $x \in \mathbb{R}$. Entonces f satisface las condiciones del teorema del valor medio en $[0, x]$, $x > 0$. En consecuencia, existe $c \in (0, x)$ tal que $f'(c) = e^c = \frac{e^x - 1}{x}$. Así, $e^x = 1 + xe^c$ y como $c > 0$ se sigue que $e^x > 1 + x$ para todo $x > 0$. Por lo tanto, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$e^{\frac{x}{n+1}} > 1 + \frac{x}{n+1} > \frac{x}{n+1}.$$

Luego,

$$0 < \frac{x^n}{e^x} < \frac{A}{x} \tag{29}$$

donde $A = (n+1)^{n+1}$. Ahora, si $x \to +\infty$, entonces por (29) y el corolario 4.5.5(2) se sigue que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$.

Nota **6.9.6.**

No siempre ocurre que si una función f tiene derivada nula en cada punto de su dominio, entonces f es una función constante en su dominio. Para ver esto, considérese la función $f : A = (0,1) \cup (2,3) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in (0,1) \\ 2 & \text{si } x \in (2,3) \end{cases}$$

Claramente, $f'(x) = 0$ para todo $x \in A$, pero f no es una función constante en A.

El siguiente corolario nos da condiciones suficientes para concluir que si una función f tiene derivada nula entonces f es una función constante.

Corolario 6.9.7. *Sean I un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$, una función derivable en I, tal que $f'(x) = 0$ para cada $x \in I$. Entonces f es constante en I.*

Prueba: Sean $a, b \in I$ $(a < b)$ arbitrarios, para ver que f es constante en I probemos que $f(a) = f(b)$.
Como f es derivable en I, f satisface las condiciones del teorema del valor medio en $[a, b]$. En consecuencia, existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, pero por hipótesis $f'(c) = 0$. Así, $f(a) = f(b)$. ∎

Corolario 6.9.8. *Sean I un intervalo y $f, g : I \to \mathbb{R}$ funciones derivables en I tales que $f'(x) = g'(x) = 0$ para todo $x \in I$. Entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $(f - g)(x) = c$.*

Prueba: Por hipótesis la función $h = f - g : I \to \mathbb{R}$ satisface las condiciones del corolario 6.9.7, entonces h es constante en I. Es decir, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $h(x) = (f - g)(x) = c$ para todo $x \in I$. ∎

Corolario 6.9.9. *Sean I un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$, una función derivable en I.*

1. *Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$, entonces f es creciente en I.*

2. *Si $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$, entonces f es decreciente en I.*

Prueba: Sean $x, y \in I$ arbitrarios con $x < y$, probemos que $f(x) > f(y)$.
Como f es derivable en I, entonces f satisface las condiciones del teorema del valor medio en $[x, y]$. En consecuencia, existe $c \in (x, y)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}. \qquad (30)$$

Ahora, como $f'(c) > 0$, entonces por (30), $f(y) > f(x)$. Por lo tanto, f es creciente en I y así, 1 es cierto.

Para probar 2, considere $-f'$ la cual es positiva y aplique 1. ∎

Corolario 6.9.10. *Sean I un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$, una función derivable en I*

1. *f es no decreciente en I $\Leftrightarrow$ $f' \geq 0$ en I. (Ver Figura 6.2)*

2. *f es no creciente en I $\Leftrightarrow$ $f' \leq 0$ en I. (Ver Figura 6.2)*

Prueba: ($\Rightarrow$) Supongamos que f es no decreciente en I, razonando por reducción al absurdo, supongamos que existe $c \in I$ tal que $f'(c) < 0$. Entonces por el teorema 6.6.1, existe $x > c$ tal que $f(x) < f(c)$ lo que contradice el hecho de que f es no decreciente en I y así, $f' \geq 0$ en I.

($\Leftarrow$) Supongamos que $f' \geq 0$ en I. Sean x e y en I arbitrarios, por el teorema del valor medio existe $z \in I$, z entre x e y tal que, $f'(z)(y-x) = f(y) - f(y)$. Como $f'(z) \geq 0$, entonces si $x < y$ se tiene que $f(x) \leq f(y)$ y así, f es no decreciente en I. De manera similar se puede probar que si $f' > 0$ en I, entonces f es creciente en I.

Para probar 2, considere $-f$ y aplique 1. ∎

6.10. Signo de la Derivada y Extremos

El siguiente corolario nos da una condición suficiente para determinar la continuidad uniforme de una función definida en un intervalo.

Corolario 6.10.1. *Sean I un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$, una función derivable en I. Si existe $M > 0$ tal que $|f'(x)| \leq M$ para todo $x \in I$, entonces f es de Lipschitz. En particular f es UC en I.*

Prueba: Sean $x, y \in I$ $(x < y)$ arbitrarios. Como f es derivable en I, entonces f satisface las condiciones del teorema del valor medio en $[x, y]$. En consecuencia, existe $c \in (x, y)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}. \tag{31}$$

Luego, por (31) y la hipótesis se tiene que

$$|f(y) - f(x)| \leq M|x - y|$$

para todo $x, y \in I$. Así, f es Lipschitz y por nota 5.12.1(4) f es UC en I. ∎

El siguiente teorema nos permite determinar extremos (máximos o mínimos) de una función, este resultado se conoce como,"criterio de la primera derivada para el cálculo de extremos".

Teorema 6.10.2. (Criterio de la primera derivada para extremos) *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función derivable en (a, b), excepto en un punto $c \in (a, b)$.*

1. *Si $f'(x) > 0$ para todo $x < c$ y $f'(x) < 0$ para todo $x > c$, entonces f tiene un máximo local en $x = c$.*
2. *Si $f'(x) > 0$ para todo $x > c$ y $f'(x) < 0$ para todo $x < c$, entonces f tiene un mínimo local en $x = c$.*

Prueba: Como $f'(x) < 0$ para todo $x < c$, entonces por el corolario 6.9.9(1), f es creciente en $[a, c]$ y como $f'(x) > 0$ para todo $x > c$, entonces por el corolario 6.9.9(2), f es decreciente en $[c, b]$. En consecuencia, $f(x) < f(c)$ para todo $x \neq c$ en (a, b) y así, f tiene un máximo local en $x = c$. Por lo tanto, 1 es cierto.

Para probar 2, basta aplicar 1 a $-f'$. ∎

Nota 6.10.3.

Sea f una función derivable, si f' es también derivable, entonces denotamos con $f'' = (f')'$ a la segunda derivada de la función f y se llama **segunda derivada** de f.

El siguiente teorema nos da condiciones suficientes para determinar extremos de una función y se conoce como criterio de la segunda derivada para determinar extremos.

Teorema 6.10.4. (Criterio de la segunda derivada para extremos) *Sea c un punto critico de una función f en un intervalo abierto (a, b). Supongamos que exista f'' en (a, b). Entonces*

1. *Si $f''(c) < 0$ en (a, b), f tiene un máximo local en c.*
2. *Si $f''(c) > 0$ en (a, b), f tiene un mínimo local en c.*

Prueba: Como
$$f''(c) = \lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{x-c}$$
y $f''(c) < 0$, entonces existe un entorno $E(c,\delta)$ tal que
$$\frac{f'(x)}{x-c} < 0,$$
para todo $x \in [E(c,\delta)\backslash\{c\}] \cap (a,b)$. En consecuencia, $f'(x) < 0$ si $x > a$ y $f'(x) > 0$ si $x < a$, y por el teorema 6.10.2 f alcanza un máximo local en c. Así, 1 queda probado.

Para probar 2, basta ver que $f'' > 0$ implica $-f'' < 0$ y se aplica 1. ∎

6.11. Teorema del Valor Medio de Cauchy

El siguiente teorema es una generalización del teorema del valor medio, llamado teorema del valor medio de Cauchy, en honor al Matemático **Augustin-Louis Cauchy**.

Teorema **6.11.1. (Del Valor Medio de Cauchy)(TVMC)**
Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b). Entonces existe $c \in (a,b)$ tal que
$$f'(c)[g(b)-g(a)] = g'(c)[f(b)-f(a)]. \tag{32}$$

Prueba: La idea es definir una función adecuada (ver (32)) a la cual le podamos aplicar el teorema de Rolle.
Sea $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por
$$h(x) = \begin{vmatrix} f(x) & f(a) & f(b) \\ g(x) & g(a) & g(b) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$
Luego, h es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) (¿por qué?). Además, por propiedad de los determinantes es claro que, $h(a) = h(b) = 0$. En consecuencia, por el teorema de Rolle existe $c \in (a,b)$ tal que $h'(c) = 0$, es decir,
$$\begin{vmatrix} f'(c) & f(a) & f(b) \\ g'(c) & g(a) & g(b) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$
y por lo tanto, (32) es cierto. ∎

6.12. Regla de L'Hôpital

Una de las herramientas más populares y aplicadas en el Cálculo es el resultado conocido como regla de L'Hôpital en honor al matemático francés **L'Hôpital Guillaume Francois Antonie (1661-1704)** quien en 1696 escribió el primer libro de Cálculo Diferencial. Esta regla permite atacar indeterminaciones de la forma $\frac{\infty}{\infty}$ y $\frac{0}{0}$.

Corolario 6.12.1. (Regla de L'Hôpital)
Supongamos que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ *y* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. *Si* $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, *entonces* $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Prueba: De la definición de $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ se sigue que

1. Existe $\delta_1 > 0$ tal que f' y g' existen en $(a-\delta_1, a+\delta_1)$, excepto posiblemente en $x = a$.

2. Existe $\delta_2 > 0$ tal que $g'(x) \neq 0$ en $(a-\delta_2, a+\delta_2)$, excepto posiblemente en $x = a$

Si $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, entonces 1 y 2 se satisfacen en el intervalo $I_\delta = (a-\delta, a+\delta)$, excepto posiblemente en $x = a$.
Ahora, definamos las funciones $F, G : I_\delta \to \mathbb{R}$ mediante

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ 0 & \text{si } x = a \end{cases}$$

y

$$G(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \neq a \\ 0 & \text{si } x \neq a \end{cases}$$

Por 1, 2 y las hipótesis se sigue que F y G son continuas y derivables en $I_\delta^+ = (a, a+\delta)$.
Si consideramos la sucesión $(y_n) \subset (a, a+\delta)$ con $(y_n) \to a^+$, entonces por la hipótesis y el teorema 4.11.1

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(y_n)}{g'(y_n)} = L. \tag{33}$$

Así, podemos aplicar el TVMC en cada el intervalo $[a, y_n]$. En consecuencia, existe $x_n \in (a, y_n)$ tal que

$$F'(x_n)[G(y_n) - G(a)] = G'[F(y_n) - F(a)]. \tag{34}$$

Ahora, como $F(a) = G(a)$ y $x_n, y_n \neq a$ para cada $n \in \mathbb{N}$ de (34) se sigue que

$$\frac{f(y_n)}{g(y_n)} = \frac{f'(x_n)}{g'(x_n)}. \tag{35}$$

Por otro lado, como $a < x_n < y_n$ y $(y_n) \to a^+$, entonces $(x_n) \to a^+$. Luego, por (33) y (35) se tiene que

$$\lim_{x\to a} \tfrac{f(y_n)}{g(y_n)} = \lim_{x\to a} \tfrac{f'(x_n)}{g'(x_n)} = L. \tag{36}$$

Por último, el teorema 4.11.1 y (36) nos permiten concluir que

$$\lim_{x\to a^+} \tfrac{f(x)}{g(x)} = L.$$

De manera análoga, se puede probar que $\lim\limits_{x\to a^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ y así, $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$. ■

6.12.2.

Supongamos que, $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ es una función derivable y $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) + f'(x)) = L$. Entonces $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$.

En efecto, escribamos $f(x) = \frac{e^x f(x)}{e^x}$, entonces aplicando la regla de L'Hôpital se sigue que,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \tfrac{e^x f(x) + e^x f'(x)}{e^x} = \lim_{x\to\infty} (f(x) + f'(x)) = L.$$

En consecuencia, $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$.

6.13. Funciones Convexas

Definición **6.13.1.** *Sea I un intervalo en $\mathbb{R}$. Una función $f : I \to \mathbb{R}$ se llama* **convexa** *en I , si para cada par de elementos $x, y \in I$ y para cada par de números reales $\alpha, \beta \in [0, 1]$ con $\alpha + \beta = 1$ se verifica:*

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y).$$

6.13.2.

Sean $f, g : I \to \mathbb{R}$ funciones positivas, no crecientes y convexas en un intervalo I de $\mathbb{R}$. Entonces $\Psi = fg$ es convexa en I.
En efecto, sean $x, y \in I$, $\alpha, \beta \in [0,1]$ tal que $\alpha + \beta = 1$. Podemos asumir que, $x < y$ y por una de las hipótesis se sigue que

$$f(x) \geq f(y) \quad y \quad g(x) \geq g(y).$$

En consecuencia,

$$(f(x) - f(y))(g(y) - g(x)) \leq 0$$

y así,

$$f(x)g(y) + f(y)g(x) \leq f(x)g(x) + f(y)g(y). \tag{37}$$

Luego, por el hecho de que f y g son funciones convexas y (37) se tiene que

$$\begin{aligned}
\Psi(\alpha x + \beta y) &= f(\alpha x + \beta y)g(\alpha x + \beta y) \\
&\leq [\alpha f(x) + \beta f(y)][\alpha g(x) + \beta g(y)] \\
&= \alpha^2 f(x)g(x) + \alpha\beta f(x)g(y) + \alpha\beta f(y)g(x) + \beta^2 f(y)g(y) \\
&= \alpha^2\Psi(x) + \beta^2\Psi(y) + \alpha\beta[f(x)g(y) + f(y)g(x)] \\
&\leq \alpha^2\Psi(x) + \beta^2\Psi(y) + \alpha\beta[f(x)g(x) + f(y)g(y)] \\
&= \alpha\beta\Psi(x) + \alpha\beta\Psi(y) + \alpha^2\Psi(x) + \beta^2\Psi(y) \\
&= \alpha\Psi(x)[\alpha + \beta] + \beta\Psi(y)[\alpha + \beta] \\
&= \alpha\Psi(x) + \beta\Psi(y).
\end{aligned}$$

Teorema 6.13.3. *Sea f una función convexa en un intervalo abierto I de $\mathbb{R}$. Entonces*

1. *f'_+ y f'_- existen para todo $x \in I$ y además, $f'_- \leq f'_+$ en I.*

2. *f'_+ y f'_- son no decrecientes en I.*

Prueba:

1. Sea $x \in I$ tal que $I_\delta = (x-\delta, x+\delta) \subset I$ para algún $\delta > 0$. Consideremos la función $\zeta : \{h \in \mathbb{R} : \; 0 < |h| < \delta\} \to \mathbb{R}$ mediante
$$\zeta(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$
Luego, por el ejercicio 22(a) del capítulo 5, la función ζ es creciente. En consecuencia, por el teorema 4.13.3, existen
$$\lim_{th \to 0^-} \zeta(h) \quad y \quad \lim_{h \to 0^+} \zeta(h).$$
y además, satisfacen que
$$\begin{aligned} f'_-(x) &= \lim_{h \to 0^-} \zeta(h) \\ &= \sup\{\zeta(h) : \; h < 0\} \\ &\leq \inf\{\zeta(t) : h > 0\} \\ &= \lim_{h \to 0^+} \zeta(h) \\ &= f'_+(x). \end{aligned}$$
Así, existen $f'_-(x)$ y $f'_+(x)$ para cada $x \in I$, y además, $f'_- \leq f'_+$ en I.

2. Sean $x, y \in I$ tal que $x < y$, entonces
$$\begin{aligned} f'_+(x) &= \inf\{\zeta(h) : \; h > 0\} \\ &\leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \\ &\leq \lim_{t \to y^+} \tfrac{f(t) - f(y)}{t - y} \\ &= f'_+(y). \end{aligned}$$
Así, $x < y$ implica $f'_+(x) \leq f'_+(y)$ y así, f'_+ es no decreciente en I. De manera similar se prueba que f'_- es no decreciente en I.

∎

Teorema **6.13.4.** *Sea f una función derivable en un intervalo abierto I. Entonces f es convexa si y sólo si f' es no decreciente en I.*

Prueba: ($\Rightarrow$) Supongamos que f es convexa en I. Por el teorema 6.13.3(2), f'_+ es no decreciente en I y como f es derivable en I, se sigue que $f' = f'_+$ y así, f' es no decreciente en I.

($\Leftarrow$) Supongamos que f es no convexa en I. Entonces existen $a, b, x \in I$ con $a < x < b$ tales que

$$f(x) > \frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b).$$

En consecuencia,

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} > \frac{f(b)-f(x)}{b-x}. \tag{38}$$

Ahora, aplicando el TVM a cada intervalo $[a, x]$ y $[x, b]$, existen $c_x \in (a, x)$ y $d_x \in (x, b)$ tales que

$$f'(c_x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad y \quad f'(d_x) = \frac{f(b)-f(x)}{b-x}. \tag{39}$$

Así, por (38) y (39) obtenemos que

$$f'(c_x) > f'(d_x). \tag{40}$$

Como $c_x < d_x$, entonces (40) contradice el hecho de que f' es no decreciente en I. Por lo tanto, f es convexa en I. ∎

Corolario 6.13.5. *Sea f una función derivable en un intervalo abierto I de $\mathbb{R}$. Entonces f es convexa en I si sólo si $f'' \geq 0$ en I.*

Prueba: ($\Rightarrow$) Si f es convexa en I, por el teorema 6.13.4, f' es no decreciente en I y por el corolario 6.9.10, $f'' = (f')' \geq 0$ en I.

($\Leftarrow$) Si $f'' \geq 0$ en I, entonces por el corolario 6.9.10, f' es no decreciente en I y por el teorema 6.13.4, f es convexa en I. ∎

6.14. Ejercicios

1. ¿Si $\mid f \mid$ es derivable , se sigue que f es derivable ?

2. Sea $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, una función tal que $|f|$ es derivable en a. Si f es continua en a, probar que f es derivable en a.

3. Dar un ejemplo de una función f tal que $f'(x_0) = 0$, y sin embargo x_0 no es punto máximo ni mínimo (local).

4. Usar el teorema de la función inversa para deducir las derivadas de las funciones inversas de: $f(x) = \operatorname{sen} x$ $g(x) = \cos x$ y $h(x) = \tan x$.

5. Use el ejemplo 6.35 para probar: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{p(x)}{e^x} = 0$, para todo polinomio p.

6. (a) Probar que si f tiene mínimo local en a entonces $f''(a) \geq 0$.

   (b) Probar que si f tiene máximo local en a entonces $f''(a) \leq 0$.

7. Sea f una función derivable en x. Probar que $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$. Sin embargo la existencia del límite no implica que f sea continua en x.

8. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que $f(s+t) = f(s)f(t)$, para todo $s, t \in \mathbb{R}$. Si f es derivable en $t_0 = 0$. Pruebe que f es derivable en $\mathbb{R}$ y que $f'(t) = f'(0)f(t)$.

9. Pruebe que el polinomio $2x^3 + 3x^2 + 6x + 1$, posee una única raíz real.

10. Sea $f : (0,1) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, una función derivable con derivada creciente. Si $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$. Probar que $g : (0,1) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ es creciente.

11. Sea $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I un intervalo, una función derivable en I. Si f' está acotada. Probar que f satisface la condición de Lipschitz.

12. Sea $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I un intervalo y $a \in I$. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

    a) f es derivable en a con derivada L.

    b) Existe $\eta_f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\eta_f(a) = 0$, η_f continua en a y $f(x) = f(a) + (x-a)(L - \eta_f(x))$, $x \in I$.

c) Para cada sucesión $(x_n) \subset I$ convergente hacia a en I, existe una sucesión (ε_n) convergente hacia 0 tal que

$$f(x_n) = f(a) + (x_n - a)(L - \varepsilon_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

13. (a) Construir una función $f : (0,1) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en $(0,1)$ pero no derivable en $1/2$.

(b) Construir una función $f : (0,1) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en $(0,1)$ pero no derivable en ningún punto del conjunto $\{\frac{1}{n+1}, n \in N\}$.

(c) Construir una función $f : (0,1) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en $(0,1)$ pero no derivable en ningún punto del conjunto $\mathbb{Q} \cap (0,1)$.

(d) Probar que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

es derivable sólo en $x = 0$.

14. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = |x|^3$. Calcular f' y f''. Además probar que $f^{(3)}(0)$ no existe.

15. Pruebe que si f y g son funciones n-veces derivable, entonces se verifica la fórmula de Leibniz:

$$(fg)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(n-i)} g^{(i)}.$$

16. Probar que:

a) $\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}, \quad x > 0.$

b) $\arcsin x < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (0,1).$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} [x^{\frac{x+1}{x}} - (x-1)^{\frac{x}{x-1}}] = 1.$

6.15. Algunas Sugerencias para la solución de los ejercicios

1. El lector puede mostrar un ejemplo para justificar un no.

2. Obsérvese que, $\frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a} \frac{f(x)-f(a)}{|f(x)|-|f(a)|}$ y analice los casos $f(a) = 0$, $f(a) > 0$ y $f(a) < 0$.

3. El ejemplo es el clásico.

4. Aplique el corolario 6.5.2.

5. La ayuda está en el enunciado del problema.

6. (a) Utilice el Método de Reducción al Absurdo.
   (b) Proceda como en (a).

7. Nótese que
$$\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} = \frac{1}{2}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{f(x-h)-f(x)}{-h}\right].$$

8. Demuestre que $f(0) = 1$ y aplique la definición.

9. Use el Método de Reducción al Absurdo y el teorema de Rolle.

10. Defínase $G : [0,1) \to \mathbb{R}$ mediante
$$G(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in (0,1) \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$
luego, aplique el TVM.

11. Esto es una consecuencia inmediata de las definiciones.

12. $(a \Rightarrow b)$ Defínase la función $\eta_f : I \to \mathbb{R}$ mediante
$$\eta_f(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - L & \text{si } x \neq a \\ 0 & \text{si } x = a \end{cases}$$
$(b \Rightarrow c)$ Tómese, $\varepsilon_n = \eta_f(x_n)$ $n \in \mathbb{N}$.

    $(c \Rightarrow a)$ Verifique que, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a} = L$ y use el teorema 4.11.1.

13. Este es un excelente ejercicio para el lector.
14. Recuerde la definición de valor absoluto.
15. Use inducción.
16. Aplique el TVM.

6.16. Ejercicios Varios

1. La **derivada simétrica** de una función f denotada por f^s se define mediante:
$$f^s(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h},$$
siempre que este límite exista.

1.1.- Muestre que $f^s(x)$ puede existir y sin embargo f puede no estar definida en x.

1.2.- Muestre que los siguientes enunciados no siempre son ciertos:
$$\begin{array}{lll} f^s(x) \ \textit{existe} & \Rightarrow & f \ \textit{continua en } x. \\ f^s(x) \ \textit{existe} & \Rightarrow & f'(x) \ \textit{existe.} \end{array}$$

1.2.- Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ viene dada por
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$
demuestre que $f^s(x)$ existe si $x \in \mathbb{Q}$, más $f^s(x)$ no existe si $x \notin \mathbb{Q}$.

2. Explicar porqué no se puede aplicar el TVMC a las funciones $f, g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ dadas por
$$f(x) = x^2 \quad y \quad g(x) = x^3.$$

3. Probar que la única función f que satisface $f'(x) = c$ (c constante), para todo x en su dominio, es la función dada por

$$f(x) = kx + b.$$

4. Supóngase que $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ tiene derivada en cada punto de (a, b) y

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to b^-} f(x).$$

   Probar que existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

5. Probar que la ecuación $e^x = 1 + x$ tiene una y sólo una raíz real.

6. Probar usando el TVM que

   6.1.- $(1 + h)^n > 1 + nh, \quad h > 0, \; n \in \mathbb{N}$. (**Desigualdad de Bernoulli**)
   6.2.- $\sqrt{1+h} < 1 + \frac{h}{2}, \qquad h > 0$.

"Newton y Leibniz, independientemente uno del otro, fueron en gran parte los responsables del desarrollo de las ideas básicas del Cálculo integral hasta llegar a conseguir que problemas, en su tiempo irresolubles, pudieran serlo con los nuevos métodos y de forma casi rutinaria. Su mayor logro fue esencialmente el hecho de poder fundir en uno el Cálculo integral y la segunda rama importante del Cálculo: el Cálculo diferencial". **Tom Apostol**

"Aunque será necesario definirla de forma esencialmente complicada, la integral viene a formalizar un concepto sencillo, intuitivo: el de área. Ahora ya no nos debe causar sorpresa el encontrarnos con que la definición de un concepto intuitivo puede presentar grandes dificultades y ciertamente el de "área" no es ninguna excepción a esto". **Michael Spivak**

OBJETIVOS (Capítulo 7)

- Adquirir, analizar e interpretar el concepto de integral de Riemann.
- Caracterizar las funciones Riemann integrables.
- Asociar los conceptos de integral y derivada.
- Aplicar los teoremas básicos sobre integración en la solución de ejercicios.

Capítulo 7

Integral de Riemann

El origen de la integral se remonta a más de 2000 años, cuando los griegos atacaban los problemas relacionados con el cálculo de áreas a través de un procedimiento que denominaron método de exhaución. Este procedimiento puede resumirse:

Supongamos que deseamos calcular el área de una región, entonces la idea es inscribir en ella una región poligonal cuya área sea de fácil cálculo y que se aproxime al área de la región dada, el siguiente paso es inscribir otra región poligonal que dé una mejor aproximación y así, se continúa el proceso aumentando cada vez el número de lados de la región poligonal de tal manera que se tienda a llenar la región dada.

El máximo representante de los griegos por su aporte al método de exhaución fue **Arquímedes de Siracusa (287-212 A.C.)**, éste estableció fórmulas exactas para calcular el área del círculo y de otras figuras.

Pasaron 18 siglos para que el método de exhaución se desarrollara, esto ocurrió por la ausencia de símbolos y técnicas algebráicas. En el siglo XVI con el desarrollo del Álgebra renació el interés por el método de exhaución y destacaron por sus trabajos los matemáticos: **Cavalieri (1598-1647)**, **Torricelli (1608-1647)**, **Roberval (1602-1675)**, **Fermat (1601-1665)**, **Pascal (1623-1662)** y **Wallis (1616-1703)**. A partir de ese momento el método de exhaución se fue transformado hasta dar origen a la moderna teoría de Integración, cuyo aporte es invalorable en la solución de problemas de la vida real y aplicaciones a otras ciencias. El estímulo mayor al desarrollo del método de exhuación fue dado en el siglo XVII, debido a los trabajos de **Isaac Newton (1642-1727)** y **Gottfried Leibniz (1646-1716)** y su desarrollo prosiguió durante el siglo XIX con **Agustin-Louis Cauchy (1789-1857)** y **Bernhard Riemann (1826-1866)**.

La integral desde el punto de vista geométrico está asociada al estudio del área de figuras planas y desde el punto de vista de las Ciencias Naturales, aparece asociada a los fenómenos físicos, como por ejemplo el concepto de trabajo en la Física.

En este capítulo estudiaremos en detalle la integral de Riemann siguiendo el desarrollo presentado por Michael Spivak en [17]. Dentro de este estudio analizaremos quizás el resultado mas importante del Cálculo conocido como Teorema Fundamental del Cálculo o Regla de Barrow en honor a su descubridor el profesor **Isaac Barrow (1630-1677)**, de quien Joaquín Navarro en [20] escribe:

> "Isaac Barrow (1630-1677) quizá no hubiera pasado a la historia si no fuera por uno de sus alumnos; teólogo insigne, su corta vida fue de lo más movida, incluyendo como episodios, según cuenta la historia, la heroica defensa de un buque contra los piratas y una lucha a brazo partido con un mastín salvaje. Como matemático era brillante, pero no excepcional; en 1669 recibió de uno de sus alumnos, Isaac Newton, un folleto titulado *De Analysi per Aequationes Numero Terminorum Infinitas.* Contenía, nada menos, que el esbozo casi completo del cálculo diferencial e integral. Aquel mismo año, Barrow decidió que su alumno sabía mucho más que él, y que tenía derecho por lo tanto a la cátedra lucasiana de matemáticas con muchos merecimientos que el propio Barrow, su titular. Con una generosidad y un desinterés difícil de igualar, Barrow cedió su cátedra a Newton..."

7.1. Particiones. Sumas Superiores e Inferiores

Definición **7.1.1.** *Una* **partición** P *de un intervalo* $[a,b]$ *es un conjunto finito* $\{t_0, t_1, \ldots, t_n\} \subset [a,b]$ *tal que* $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$. *El conjunto de todas las particiones de* $[a,b]$ *lo denotaremos por* $\mathcal{P}_{[a,b]}$.

7.1.2.

1. Sea $I = [a, b]$, entonces $P = \{a, b\}$ es una partición de $[a, b]$, llamada **partición trivial** de $[a, b]$.

2. Los conjuntos $P_1 = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\}$, $P_2 = \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$ y $P_3 = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$, son particiones de $[0, 1]$.

Definición **7.1.3.** *Consideremos* $f \in B_{[a,b]} = \{f : [a, b] \to \mathbb{R}, \quad f \ acotada\}$. *Sea* $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\} \subset \mathcal{P}_{[a,b]}$ *y sean*

$$m_i = \inf\{f(x) : \ x \in [t_{i-1}, t_i]\} \quad y \quad M_i = \sup\{f(x) : \ x \in [t_{i-1}, t_i]\}.$$

La **suma superior** *para* f *relativa a la partición* P *denotada por* $U(f, P)$ *se define:*

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^{n} \Delta t_i Mi,$$

donde $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}, \quad i = \overline{1, n}$ *y la* **suma inferior** *para* f *relativa a la partición* P *denotada por* $L(f, P)$ *se define:*

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} \Delta t_i mi,$$

donde $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}, \quad i = \overline{1, n}.$

Nota **7.1.4.**

De la definición 7.1.3, se sigue que

$$L(f, P) \leq U(f, P), \tag{1}$$

para toda $P \in \mathcal{P}_{[a,b]}$.

7.1.5.

1. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ la función constante dada por $f(x) = c \ (> 0)$ para todo $x \in [a, b]$. Sea $P = \{t_0 = a, \ldots, t_n = b\} \in \mathcal{P}_{[a,b]}$ arbitraria. Entonces $m_i = M_i = c$ para todo $i = \overline{1, n}$. En consecuencia,

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^{n} c\Delta_i = c(t_n - t_0) = c(b - a) = L(f, P).$$

Es decir, la suma superior $U(f,P) = L(f,P)$ para cualquier partición $P \in \mathcal{P}_{[a,b]}$ y además coinciden con el área del rectángulo de base $b-a$ y altura c.

2. La función $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) \cap [0,1] \\ 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \end{cases}$$

Sea $P = \{t_0 = 0, \ldots, t_n = 1\} \in \mathcal{P}_{[0,1]}$ arbitraria. Entonces $m_i = 0$ y $M_i = 1$ para todo $i \in \overline{1,n}$, pues por un argumento de densidad

$$[t_{i-1}, t_i] \cap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) \cap [0,1] \neq \emptyset \quad y \quad [t_{i-1}, t_i] \cap \mathbb{Q} \cap [0,1] \neq \emptyset.$$

En consecuencia,

$$L(f,P) = 0 \quad y \quad U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} \Delta t_i = t_n - t_0 = 1,$$

para toda $P \in \mathcal{P}_{[0,1]}$.

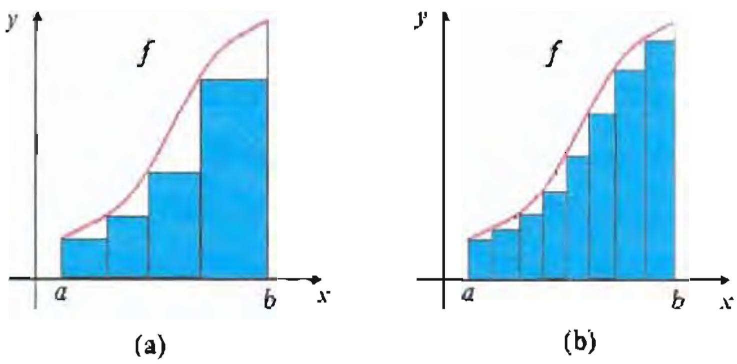

Figura 7.1: Relaciones entre las sumas y las particiones

Nota 7.1.6.

Cuando $P \subset Q$, $P, Q \in \mathcal{P}_{[a,b]}$, entonces diremos que Q es más **fina** que P.

La figura 7.1(a), corresponde a la partición P y la figura 7.1(b) corresponde a la partición Q, el área de los rectángulos correspondientes a la partición Q constituyen una mejor aproximación al "área"bajo la curva definida por el gráfico de f. En el ejemplo 7.1.2(2) P_3 es más fina que P_1. En general vale el siguiente

Lema **7.1.7.** *Sean $P, Q \in \mathcal{P}_{[a,b]}$ tal que $P \subset Q$. Entonces*

1. $L(f,P) \leq L(f,Q)$.
2. $U(f,P) \geq U(f,Q)$.

Prueba: Probemos que $U(f,P) \geq U(f,Q)$.
Primero consideremos el caso en que Q contiene exactamente un punto más que P. Es decir, si $P = \{t_0 = a, \ldots, t_k, t_{k+1}, \ldots, t_n = b\}$, entonces $Q = \{t_0 = a, \ldots, t_k, \alpha, t_{k+1}, \ldots, t_n = b\}$. En consecuencia,

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{k} \Delta t_i M_i + (t_{k+1} - t_k)M + \sum_{i=k+2}^{n} \Delta t_i M_i \quad y \tag{2}$$

$$U(f,Q) = \sum_{i=1}^{k} \Delta t_i M_i + (\alpha - t_k)M^\star + (t_{k+1} - \alpha)M^{\star\star} + \sum_{i=k+2}^{n} \Delta t_i M_i, \tag{3}$$

donde $M = \sup\{f(x) : x \in [t_k, t_{k+1}]\}$, $M^\star = \sup\{f(x) : x \in [t_k, \alpha]\}$ y $M^{\star\star} = \sup\{f(x) : x \in [\alpha, t_{k+1}]\}$ (Ver Figura 7.2). Luego,

$$U(f,P) - U(f,Q) = (t_{k+1} - t_k)M - (\alpha - t_k)M^\star + (t_{k+1} - \alpha)M^{\star\star} \tag{4}$$

Por el otro lado, los conjuntos

$$\begin{aligned} A &= \{f(x) : x \in [t_k, t_{k+1}]\} \\ A^\star &= \{f(x) : x \in [t_k, \alpha]\} \quad \text{y} \\ A^{\star\star} &= \{f(x) : x \in [\alpha, t_{k+1}]\}, \end{aligned}$$

satisfacen que

$$A^\star \subset A \qquad y \qquad A^{\star\star} \subset A. \tag{5}$$

Así, por (5) y el ejercicio 13 del capítulo 2 se sigue que

$$M \geq M^\star \qquad M \geq M^{\star\star}. \tag{6}$$

Por otro lado, como $t_{k+1} - t_k = (t_{k+1} - \alpha) + (\alpha - t_k)$, entonces

$$M(t_{k+1} - t_k) = (t_{k+1} - \alpha)M + (\alpha - t_k)M. \tag{7}$$

Por lo tanto, de (6) y (7), se sigue que

$$M(t_{k+1} - t_k) \geq (t_{k+1} - \alpha)M^{**} + (\alpha - t_k)M^{*}. \tag{8}$$

En consecuencia, por (4) y (8), concluimos que $U(f,P) \geq U(f,Q)$. Por lo cual 2 es cierto, en el caso en que Q contenga exactamente un punto más que P.
Si Q contiene más de un punto con respecto a P, consideremos $P = Q_0 \subset Q_1 \subset \cdots \subset Q_n = Q$, donde Q_i contiene exactamente un punto más que Q_{i-1}, $i = \overline{1,n}$. Entonces por lo probado en la primera parte obtenemos que

$$U(f,P) = U(f,Q_0) \geq U(f,Q_1) \geq \cdots \geq U(f,Q_n) = U(f,Q).$$

Luego 2 es cierto.
Para probar 1 se procede de manera similar a como se probó 2. ∎

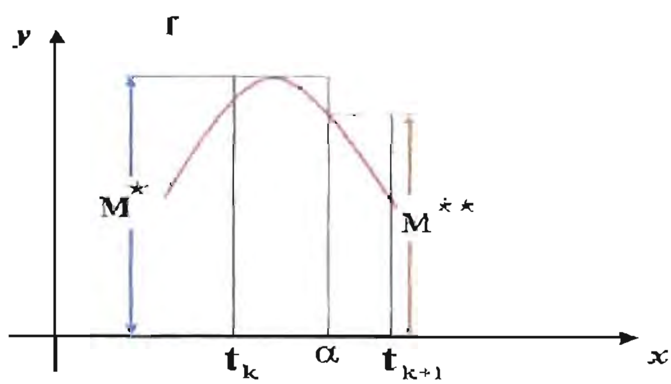

Figura 7.2: Relación entre M^* y M^{**}

Teorema 7.1.8. *Sean $P_1, P_2 \in \mathcal{P}_{[a,b]}$ y $f \in B_{[a,b]}$. Entonces*

$$L(f,P_1) \leq U(f,P_2). \tag{9}$$

Prueba: Sea $Q = P_1 \cup P_2$, entonces $Q \in \mathcal{P}_{[a,b]}$ (probarlo). Así, $Q \supset P_1$ y $Q \supset P_2$. En consecuencia, por el lema 7.7.1 y la nota 7.1.4 tenemos que

$$L(f, P_1) \leq L(f, Q) \leq U(f, Q) \leq U(f, P_2).$$

Así, el teorema es cierto. ∎

Nota 7.1.9.

Del teorema 7.1.8 se sigue que cada suma superior $U(f, P^*)$ es una cota superior para el conjunto

$$\mathcal{L}(f, P) = \{L(f, P) : \ P \in \mathcal{P}_{[a,b]}\}.$$

Luego,

$$\sup_{P \in \mathcal{P}_{[a,b]}} \mathcal{L}(f, P) \leq U(f, P^*), \tag{10}$$

para todo $P^* \in \mathcal{P}_{[a,b]}$. En consecuencia, $\sup\limits_{P \in \mathcal{P}_{[a,b]}} \mathcal{L}(f, P)$ es una cota inferior para el conjunto

$$\mathcal{U}(f, P) = \{U(f, P^*) : \ P^* \in \mathcal{P}_{[a,b]}\}.$$

Así, por (10), obtenemos que:

$$\sup_{P \in \mathcal{P}_{[a,b]}} \mathcal{L}(f, P) \leq \inf_{P \in \mathcal{P}_{[a,b]}} \mathcal{U}(f, P). \tag{11}$$

Además, por la definición de supremo e ínfimo se sigue que

$$L(f, P) \leq \sup_{P \in \mathcal{P}_{[a,b]}} \mathcal{L}(f, P) \leq U(f, P) \quad y$$

$$L(f, P) \leq \inf_{P \in \mathcal{P}_{[a,b]}} \mathcal{U}(f, P) \leq U(f, P).$$

para toda $P \in \mathcal{P}_{[a,b]}$.
Las funciones acotadas que satisfacen la igualdad en (11) se llaman Riemann integrables en $[a, b]$.

7.2. Integral de Riemann

Definición **7.2.1.** *Una función $f \in B_{[a,b]}$, se llama* **Riemann integrable** *en $[a,b]$ si*

$$\sup_{P\in\mathcal{P}_{[a,b]}} \mathcal{L}(f,P) = \inf_{P\in\mathcal{P}_{[a,b]}} \mathcal{U}(f,P). \qquad (12)$$

Nota **7.2.2.**

1. Al valor común dado por (12) se denota por $\int_a^b f$ (o $\int_a^b f(x)dx$) y se llama la **integral** entre a y b de f.

2. Al conjunto de todas las funciones Riemann integrables en $[a,b]$ lo denotaremos por $R_{[a,b]}$.

3. $\int_a^b f$ es el único número real que satisface:

$$L(f,P) \leq \int_a^b f \leq U(f,P), \qquad (13)$$

para todo $P \in \mathcal{P}_{[a,b]}$ (para verificar este hecho, suponga que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ que satisface (13) y use las definiciones de $\sup_{P\in\mathcal{P}_{[a,b]}} \mathcal{L}(f,P)$ e $\inf_{P\in\mathcal{P}_{[a,b]}} \mathcal{U}(f,P)$).

4. Si $f \geq 0$ en $[a,b]$ y $f \in R_{[a,b]}$, entonces $\int_a^b f$ define el área de la región comprendida por la curva $(x, f(x))$, $x = a$, $x = b$ y $y = 0$. (Ver Figura 7.3)

7.2.3.

1. La función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = c$ para todo $x \in [a,b]$ es $R_{[a,b]}$ y $\int_a^b c = c(b-a)$.

En efecto, sea $P \in \mathcal{P}_{[a,b]}$ una partición arbitraria. Entonces, por el ejemplo 7.1.5(1)

$$U(f,P) = L(f,P) = c(b-a)$$

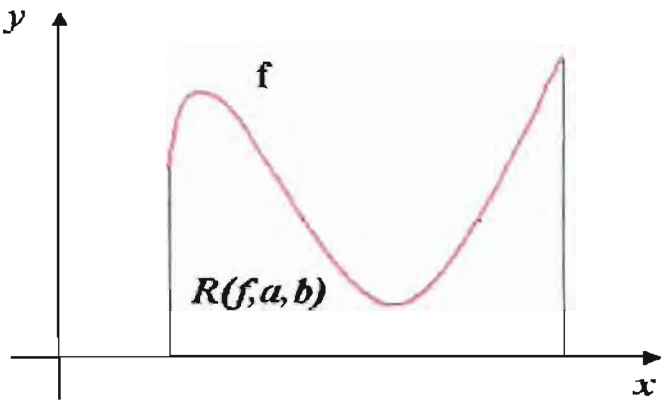

Figura 7.3: Interpretación Geométrica de la Integral

para toda $P \in \mathcal{P}_{[a,b]}$. En consecuencia,

$$\sup_{P \in \mathcal{P}_{[a,b]}} \mathcal{L}(f, P) = \inf_{P \in \mathcal{P}_{[a,b]}} \mathcal{U}(f, P),$$

y por lo tanto $f \in R_{[a,b]}$. Además, $\int_a^b c = c(b-a)$.

2. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) \cap [0,1] \\ 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \end{cases}$$

Entonces, $f \notin R_{[0,1]}$.

En efecto, por el ejemplo 7.1.5(2)

$$L(f, P) = 0 \qquad y \qquad U(f, P) = 1,$$

para todo $P \in \mathcal{P}_{[0,1]}$. En consecuencia,

$$\sup_{P \in \mathcal{P}_{[a,b]}} \mathcal{L}(f, P) = 0 < 1 = \inf_{P \in \mathcal{P}_{[a,b]}} \mathcal{U}(f, P).$$

Así, $f \notin R_{[0,1]}$.

3. La función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x$ es $R_{[0,1]}$ y $\int_0^1 x = \frac{1}{2}$.

En efecto, sea $P = \{t_0 = 0, \dots, t_n = 1\} \in \mathcal{P}_{[0,1]}$ arbitraria, entonces $M_i = t_i$ y $m_i = t_{i-1}$. Luego,

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} t_i \Delta t_i \quad y \quad L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} t_{i-1} \Delta t_i. \tag{14}$$

Por otro lado, como

$$t_i(t_i - t_{i-1}) - \frac{1}{2}(t_i - t_{i-1})^2 = \frac{1}{2}(t_i{}^2 - t_{i-1}^2). \tag{15}$$

Entonces por (14) y (15) obtenemos que

$$U(f,P) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1})^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} t_i{}^2 - t_{i-1}^2.$$

Es decir,

$$U(f,P) - M = \frac{1}{2}(t_n{}^2 - t_0{}^2) = \frac{1}{2}(1-0) = \frac{1}{2},$$

donde $M = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1})^2 \geq 0$. Así,

$$U(f,P) \geq \frac{1}{2}. \tag{16}$$

Procediendo de manera análoga al caso anterior se prueba que

$$L(f,P) \leq \frac{1}{2}. \tag{17}$$

En consecuencia, de (16) y (17) tenemos que

$$L(f,P) \leq \frac{1}{2} \leq U(f,P), \tag{18}$$

para toda partición $P \in \mathcal{P}_{[a,b]}$.

Ahora, consideremos la partición

$$P = \{t_0 = 0, t_1 = \frac{1}{n}, t_2 = \frac{2}{n}, \dots, t_{n-1} = \frac{n-1}{n}, t_n = 1\}.$$

Entonces $M_i = \frac{i}{n}$ y $\Delta t_i = \frac{1}{n}$. Luego,

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n}\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \tag{19}$$

y

$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i-1}{n}\right)\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(i-1) = \frac{(n-1)n}{2n^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}. \tag{20}$$

Por lo tanto, aplicando el teorema 7.8, (18) (19) y (20) se sigue que

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2n} = L(f,P) \leq \frac{1}{2} \leq U(f,P) \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}, \tag{21}$$

y así, $\frac{1}{2} \leq \inf_{P \in \mathcal{P}_{[a,b]}} \mathcal{U}(f,P) = \alpha \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$. Es decir, $0 \leq 2(\alpha - \frac{1}{2}) \leq \frac{1}{n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, y por el ejercicio 22 del capítulo 2,

$$\alpha = \frac{1}{2}. \tag{22}$$

Por otro lado, de (21), $\frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \leq \sup_{P \in \mathcal{P}_{[a,b]}} \mathcal{L}(f,P) = \beta \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$. Es decir, $0 \leq (\beta - \frac{1}{2}) \leq \frac{1}{n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y de nuevo por el ejercicio 22 del capítulo 2 tenemos que

$$\beta = \frac{1}{2}. \tag{23}$$

Por último, aplicando (22) y (23) concluimos que $f \in R_{[0,1]}$ y $\int_0^1 x = \frac{1}{2}$.

7.3. Criterios de Integrabilidad

En esta sección estableceremos algunos criterios de integrabilidad.

Teorema **7.3.1.** *Sea $f \in B_{[a,b]}$. $f \in R_{[a,b]}$ si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe $P_\varepsilon \in \mathcal{P}_{[a,b]}$ tal que*

$$U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon) < \varepsilon. \tag{24}$$

Prueba: ($\Rightarrow$) Supongamos que $f \in R_{[a,b]}$ y sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Probemos que existe una $P_\varepsilon \in \mathcal{P}_{[a,b]}$ que satisface (24).
Sea $\beta = \sup\limits_{P\in\mathcal{P}_{[a,b]}} \mathcal{L}(f,P) = \inf\limits_{P\in\mathcal{P}_{[a,b]}} \mathcal{U}(f,P)$. Luego, por el teorema 2.5.14 y la nota 2.5.15, existen $P_\varepsilon^1, P_\varepsilon^2 \in \mathcal{P}_{[a,b]}$ tales que

$$\beta - \frac{\varepsilon}{2} < L(f, P_\varepsilon^1) \qquad y \qquad \beta + \frac{\varepsilon}{2} > U(f, P_\varepsilon^2). \tag{25}$$

En consecuencia, si $P_\varepsilon = P_\varepsilon^1 \cup P_\varepsilon^2$, entonces por el teorema 7.1.8 y (25) se sigue que

$$\beta - \frac{\varepsilon}{2} < L(f, P_\varepsilon) \qquad y \qquad \beta + \frac{\varepsilon}{2} > U(f, P_\varepsilon).$$

Así, $\quad U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon) < \beta + \frac{\varepsilon}{2} - \beta + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$

($\Leftarrow$) Supongamos que dado $\varepsilon > 0$ existe $P_\varepsilon \in \mathcal{P}_{[a,b]}$ que satisface (24) y probemos que $f \in R_{[a,b]}$.
Razonemos por reducción al absurdo, es decir supongamos que $f \notin R_{[a,b]}$, entonces por (11) de la nota 7.1.9, obtenemos que

$$\alpha = \sup_{P\in\mathcal{P}_{[a,b]}} \mathcal{L}(f,P) \leq \inf_{P\in\mathcal{P}_{[a,b]}} \mathcal{U}(f,P) = \beta.$$

Ahora, si $a < b$, sea $\varepsilon = b - a$, entonces por la hipótesis existe $P_\varepsilon \in \mathcal{P}_{[a,b]}$ tal que

$$U(f, P_{\beta-\alpha}) - L(f, P_{\beta-\alpha}) < \beta - \alpha. \tag{26}$$

Por otro lado,

$$\beta \leq U(f,P) \qquad y \qquad \alpha \geq L(f,P)$$

para toda $P \in \mathcal{P}_{[a,b]}$. En consecuencia,

$$\beta - \alpha \leq U(f,P) - L(f,P), \tag{27}$$

para toda $P \in \mathcal{P}_{[a,b]}$. Como (27) contradice a (26), entonces $\beta = \alpha$ y $f \in R_{[a,b]}$. ∎

7.3.2.

La función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ es Riemann integrable en $[0,1]$.

En efecto, sea $P = \{t_0 = 0, \ldots, t_n = 1\}$ una partición arbitraria de $[0,1]$. Luego, $M_i = t_i^2$ y $m_i = t_{i-1}^2$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} U(f,P) - L(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} {t_i}^2 \Delta t_i - \sum_{i=1}^{n} t_{i-1}^2 \Delta t_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} ({t_i}^2 - t_{i-1}^2)\Delta t_i. \end{aligned} \tag{28}$$

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario, entonces podemos tomar P_ε tal que $\Delta t_i < \varepsilon$. Luego, por (28) se tiene que

$$\begin{aligned} U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon) &< \varepsilon \sum_{i=1}^{n} ({t_i}^2 - t_{i-1}^2)\Delta t_i \\ &= \varepsilon(t_n^2 - t_0^2) \\ &= \varepsilon(1^2 - 0^2) = \varepsilon. \end{aligned}$$

En consecuencia, por el teorema 7.3.1, f es Riemann integrable en $[0,1]$.

Teorema **7.3.3.** *Si f es estrictamente monótona en $[a,b]$, entonces $f \in R_{[a,b]}$.*

Prueba: Supongamos que f es creciente en $[a,b]$.
Si $a < x < b$, entonces $f(a) < f(x) < f(b)$ y así, $f \in B_{[a,b]}$. Sea $P = \{t_0 = a, \ldots, t_n = b\} \in \mathcal{P}_{[a,b]}$ arbitraria. Entonces $M_i = f(t_i)$ y $m_i = f(t_{i-1})$, en consecuencia,

$$\begin{aligned} U(f,P) - L(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta t_i - \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})\Delta t_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} [f(t_i) - f(t_{i-1})]\Delta t_i. \end{aligned} \tag{29}$$

Si consideramos la longitud de cada subintervalo $\Delta t_i < r$, $i = \overline{1,n}$, entonces por (29), se tiene que

$$\begin{aligned} U(f,P) - L(f,P) &< r\sum_{i=1}^{n} [f(t_i) - f(t_{i-1})] \\ &= r[f(t_n) - f(t_0)] \\ &= r[f(b) - f(a)]. \end{aligned} \tag{30}$$

Así, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, sea $P_\varepsilon \in \mathcal{P}_{[a,b]}$ tal que la longitud de cada subintervalo $\Delta t_i = \frac{b-a}{n}$ $i = \overline{1,n}$. Luego, por (30) (tomando $r = \frac{b-a}{n}$) se sigue que

$$U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon) < \frac{b-a}{n}[f(b) - f(a)]. \tag{31}$$

Ahora, para $\frac{\varepsilon}{(b-a)[f(a)-f(b)]} > 0$, por la propiedad arquimediana de $\mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{(b-a)[f(a) - f(b)]}. \tag{32}$$

En consecuencia, por (31) y (32), $U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon) < \varepsilon$ y a la luz del teorema 7.3.1, $f \in \mathbb{R}_{[a,b]}$.
El caso f decreciente, se prueba de manera similar. ∎

7.3.4.

La función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$ es Riemann integrable en $[0,1]$, pues, f es claramente creciente en $[0,1]$.

Teorema **7.3.5.** *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces $f \in R_{[a,b]}$.*

Prueba: Como f es continua en $[a,b]$, entonces por el corolario 5.9.2, $f \in B_{[a,b]}$ y por el corolario 5.15.1, f es UC en $[a,b]$. Luego, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall x, y \in [a,b] \quad y \quad |x - y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}. \tag{33}$$

Sea $P = \{t_0 = a, \ldots, t_n = b\} \in \mathcal{P}_{[a,b]}$ arbitraria. Entonces aplicando la continuidad de f y el corolario 5.9.3 en cada subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$, existen $x_i, y_i \in [t_{i-1}, t_i]$ tales que

$$f(x_i) = M_i \qquad y \qquad f(y_i) = m_i,$$

para cada $i = \overline{1,n}$. En consecuencia,

$$U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon) < \sum_{i=1}^{n} \Delta t_i[f(x_i) - f(y_i)]. \tag{34}$$

Ahora, consideremos que $\Delta t_i < \delta$ (recordemos que δ depende de ε), entonces por (33) se tiene

$$f(x_i) - f(y_i) < \frac{\varepsilon}{b-a}. \tag{35}$$

Así, por (34) y (35), se sigue que

$$U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}\Delta t_i = \frac{\varepsilon}{b-a}(t_n - t_0) = \frac{\varepsilon(b-a)}{b-a} = \varepsilon.$$

Por lo tanto, $f \in R_{[a,b]}$. ∎

7.4. Teoremas sobre Funciones Integrables

Teorema **7.4.1.** *Sea $f \in B_{[a,b]}$. Si para cada $c \in [a,b)$, $g = f_{|[a,c]} \in R_{[a,c]}$, entonces $f \in R_{[a,b]}$.*

Prueba: Como $f \in B_{[a,b]}$, entonces existe $M > 0$ tal que

$$|f(x)| \leq M, \tag{36}$$

para todo $x \in [a,b]$. Ahora, dado $\varepsilon > 0$, consideremos $c \in [a,b)$ tal que

$$(b-c) < \frac{\varepsilon}{4M}. \tag{37}$$

Por otro lado, como $g \in R_{[a,c]}$ por el teorema 7.3.1, existe $P_\varepsilon = \{t_0 = a, \ldots, t_n = c\} \in \mathcal{P}_{[a,c]}$ tal que

$$U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{38}$$

Luego, tomemos $t_{n+1} = b$, entonces $P_\varepsilon^* = P_\varepsilon \cup \{t_{n+1}\} \in \mathcal{P}_{[a,b]}$ y por (38),(36) y (37) se tiene que

$$\begin{aligned}
U(f,P_\varepsilon^*) - L(f,P_\varepsilon^*) &= \sum_{i=1}^{n}\Delta t_i(M_i - m_i) + (t_{n+1} - t_n)(M_{n+1}^* - m_{n+1}^*) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + (b-c)2M \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4M}2M \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

donde $M^*_{n+1} = \sup\{f(x) : x \in [t_n, t_{n+1}]\}$ y $m^*_{n+1} = \inf\{f(x) : x \in [t_n, t_{n+1}]\}$
Así, por el teorema 7.3.1, $f \in R_{[a,b]}$. ∎

Teorema 7.4.2. *Sean $f \in B_{[a,b]}$ y $a < c < b$. $f \in R_{[a,b]}$ si sólo si $f \in R_{[a,c]}$ y $f \in R_{[c,b]}$. Además,*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f. \tag{39}$$

Prueba: $(\Rightarrow)$ Supongamos que $f \in R_{[a,b]}$ y probemos que $f \in R_{[a,c]}$ y $f \in R_{[c,b]}$. Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Entonces, por la hipótesis existe $P_\varepsilon = \{t_0 = a, \ldots, t_n = b\} \in \mathcal{P}_{[a,b]}$ tal que

$$U(f, P_\varepsilon) - L(f, P_\varepsilon) < \varepsilon. \tag{40}$$

Ahora, consideremos (ver Figura 7.4), que existe t_j tal que $t_j = c$

$$P^1_\varepsilon = \{t_= a, \ldots, t_r = c\} \in \mathcal{P}_{[a,c]} \quad y$$

$$P^2_\varepsilon = \{t_r = c, \ldots, t_n = b\} \in \mathcal{P}_{[c,b]}.$$

Claramente, $P_\varepsilon = P^1_\varepsilon \cup P^2_\varepsilon$ y

$$U(f, P^1_\varepsilon) + U(f, P^2_\varepsilon) = U(f, P_\varepsilon) \quad y \quad L(f, P^1_\varepsilon) + L(f, P^2_\varepsilon) = L(f, P_\varepsilon). \tag{41}$$

En consecuencia, por (40) y (41) se sigue que

$$\begin{aligned}[U(f, P^1_\varepsilon) - L(f, P^1_\varepsilon)] + [U(f, P^2_\varepsilon) - L(f, P^2_\varepsilon)] &= U(f, P_\varepsilon) - L(f, P_\varepsilon) \\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

Así, $U(f, P^1_\varepsilon) - L(f, P^1_\varepsilon) < \varepsilon$ y $U(f, P^2_\varepsilon) - L(f, P^2_\varepsilon) < \varepsilon$. Luego, por el teorema 7.3.1, $f \in R_{[a,c]}$ y $f \in R_{[c,b]}$.

$(\Leftarrow)$ Supongamos que $f \in R_{[a,c]}$ y $f \in R_{[c,b]}$ y probemos que $f \in R_{[a,b]}$.
Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Entonces por la hipótesis existen $P^1_\varepsilon \in \mathcal{P}_{[a,c]}$ y $P^2_\varepsilon \in \mathcal{P}_{[c,b]}$ tales que

$$U(f, P^1_\varepsilon) - L(f, P^1_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2} \ y \ U(f, P^2_\varepsilon) - L(f, P^2_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{42}$$

Ahora, consideremos $P_\varepsilon = P^1_\varepsilon \cup P^2_\varepsilon \in \mathcal{P}_{[a,b]}$. En consecuencia, procediendo de manera similar a como se obtuvo (41) y (42), se tiene que

$$U(f, P_\varepsilon) - L(f, P_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Por lo tanto, a la luz del teorema 7.3.1, obtenemos que $f \in R_{[a,b]}$.

Ahora, veamos que $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$. Por la nota 7.2.2(3) se verifica que

$$L(f,P) \leq \int_a^c f \leq U(f,P) \quad y \quad L(f,Q) \leq \int_a^c f \leq U(f,Q). \tag{43}$$

para todas las $P \in \mathcal{P}_{[a,c]}$ y $Q \in \mathcal{P}_{[c,b]}$. Por lo tanto, por (44) tenemos que

$$\begin{aligned} L(f,O) &= L(f,P) + L(f,Q) \\ &\leq \int_a^c f + \int_c^b f \\ &\leq U(f,P) + U(f,Q) = U(f,O). \end{aligned} \tag{44}$$

para toda $P \in \mathcal{P}_{[a,b]}$. De nuevo, por la nota 7.2.2(3) y (45) se tiene que

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

∎

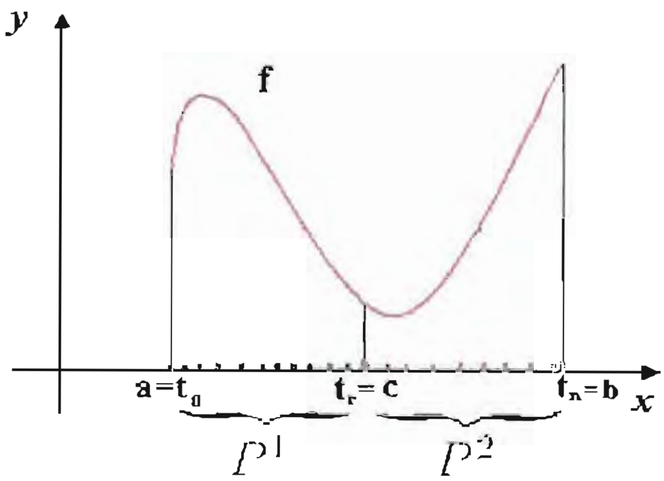

Figura 7.4: $P_\varepsilon = P_\varepsilon^1 \cap P_\varepsilon^2$

Corolario 7.4.3. *Sea $f \in B_{[a,b]}$. Si para cada par $c, d \in \mathbb{R}$ con $a < c < d < b$ y $g = f_{|[c,d]} \in R_{[c,d]}$, entonces $f \in R_{[a,b]}$.*

Prueba: Fijemos $w \in \mathbb{R}$ tal que $a < w < b$. Entonces por el teorema 7.4.1, $g_1 = f_{|[a,w]} \in R_{[a,w]}$ y $g_2 = f_{|[w,b]} \in R_{[w,b]}$. Luego, por el teorema 7.4.2, $f \in R_{[a,b]}$. ∎

Corolario 7.4.4. *Sea $f \in B_{[a,b]}$. Si f tiene un número finito de discontinuidades en $[a,b]$, entonces $f \in R_{[a,b]}$.*

Prueba: Sean $c_1 < c_2 < \ldots < c_n$ los puntos de discontinuidad de f en $[a,b]$. Por el corolario 7 .4.3, para cada $i = \overline{1,n}$, $f_{|[c_i,c_{i-1}]} \in R_{[c_i,c_{i-1}]}$ pues f es continua en cada intervalo $[x,y]$, donde $c_{i-1} < x < y < c_i$. Luego por el teorema 7.4.2, $f \in R_{[a,b]}$. ∎

7.4.5.

Sea $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

Entonces f es discontinua en $x = 1$, pero, por el corolario 7.4.4, $f \in R_{[0,2]}$.

Nota 7.4.6.

Establezcamos algunas convenciones:

1. $\int_a^a f = 0$.
2. $\int_a^b f = -\int_a^b f$ si $a > b$.
3. $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$.

7.5. Extremos de una Función

Definición 7.5.1. *Dada una función acotada $f : A \to \mathbb{R}$, llamaremos*

$$M(f) = \sup(f) = \sup f(A) = \sup\{f(x) : x \in A\} \quad y$$
$$m(f) = \inf(f) = \inf f(A) = \inf\{f(x) : x \in A\}.$$

Lema **7.5.2.** *Sean $f, g : A \to \mathbb{R}$ funciones acotadas y $c \in \mathbb{R}$. Entonces,*

1. $f + g$, cf, $fg : A \to \mathbb{R}$ *son acotadas.*
2. $\sup(f + g) \leq \sup f + \sup g$.
3. $\inf(f + g) \geq \inf f + \inf g$.
4. $\sup(cf) = c \sup(f)$ *si* $c \geq 0$.
5. $\inf(cf) = c \inf(f)$ *si* $c \geq 0$.
6. $\sup(cf) = c \inf(f)$ *si* $c < 0$.
7. $\inf(cf) = c \sup(f)$ *si* $c < 0$.
8. *Si* $w(f) = M(f) - m(f)$, *entonces* $w(f) = \sup\{|f(y) - f(x)| : x, y \in A\}$.
9. *Si* $f \leq g$ *en* $[a, b]$, *entonces* $m(f) \leq m(g)$ *y* $M(f) \leq M(g)$.

Prueba: Para ver 1, consulte el ejercicio 16(a) del capítulo 2.

Ahora consideremos los conjuntos,

$$X = f(A),\ Y = g(A) \ \text{ y } \ Z = (f + g)(A) = \{(f + g)(x) : x \in A\}.$$

Es claro que, $Z \subset X + Y = \{x + y : x \in X y y \in Y\}$. Luego, por el ejercicio 13 del capítulo 2 y el teorema 2.5.16(2) se sigue que

$$\sup(f + g) = \sup Z \leq \sup(X + Y) = \sup X + \sup Y = \sup f + \sup g.$$

Así, 2 es cierto.

Para probar 3 se procede de manera similar al caso anterior.
Si $c \geq 0$, por el ejercicio 15(a) del capítulo 2 se tiene que $\sup(cf) = \sup\{cf(x) : x \in A\} = \sup(cX) = c \sup X = c \sup f$, y así, 4 es cierto.

Para probar 5 proceda de manera similar a la prueba anterior.

Para probar los casos 6 y 7 utilice el ejercicio 14(b) del capítulo 2.

Ahora, sean $x, y \in A$ arbitrarios. Supongamos que $f(y) \geq f(x)$. Luego, $M(f) \geq f(y) \geq f(x) \geq m(f)$ y por lo tanto,

$$|f(y) - f(x)| = f(y) - f(x) \leq M(f) - m(f) = w(f). \tag{45}$$

Por otro lado, por el teorema 2.5.14, dado $\varepsilon > 0$ existen $x, y \in A$ tales que,

$$f(x) < m(f) + \frac{\varepsilon}{2} \text{ y } f(y) > M(f) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

En consecuencia, $f(y) - f(x) > M(f) - m(f) - \varepsilon = w(f) - \varepsilon$.
Así,

$$|f(y) - f(x)| > w(f) - \varepsilon. \tag{46}$$

Luego por (46) y (47) y el teorema 2.5.14 se tiene que,

$$w(f) = \sup\{|f(y) - f(x)| : x, y \in A\}.$$

Procediendo de manera análoga al caso anterior se verifica 8, cuando $f(x) < f(y)$.

Por último, para probar 9 utilice el ejercicio 13 del capítulo 2. ∎

Nota **7.5.3.**

1. A $w(f)$ del lema 7.5.2 se le llama **oscilación** de f en $[a, b]$.

2. Obsérvese que por el lema 7.5.2 y el teorema 7.3.1,

$$f \in R_{[a,b]} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \; P_\varepsilon \in \mathcal{P}_{[a,b]} : \sum_{i=1}^{n} w_i(f) \Delta t_i < \varepsilon,$$

donde $w_i(f)$ es la oscilación de f en cada subintervalo de la partición P_ε.

7.6. Álgebra de Funciones Integrables

Teorema **7.6.1.** *Sean $f, g \in R_{[a,b]}$. Entonces*

1. *$f+g \in R_{[a,b]}$ y $\int_a^b f+g = \int_a^b f + \int_a^b g$.*

2. *$fg \in R_{[a,b]}$. En particular, $cf \in R_{[a,b]}$ para todo $c \in \mathbb{R}$ y $\int_a^b cf = c\int_a^b f$ para todo $c \in \mathbb{R}$.*

3. *Si $0 < M \leq |g(x)|$ para todo $x \in [a,b]$, entonces $\frac{f}{g} \in R_{[a,b]}$.*

4. *Si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$, entonces $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.*

5. *$|f| \in R_{[a,b]}$ y $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$.*

6. *Si $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a,b]$, entonces*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a).$$

En particular, si $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in [a,b]$, entonces $|\int_a^b f| \leq M(b-a)$.

Prueba:

1. Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Como $f, g \in R_{[a,b]}$, entonces existen

$$Q_\varepsilon = \{t_0 = a, \ldots, t_n = b\} \;\; y \;\; O_\varepsilon = \{s_0 = a, \ldots, s_n = b\},$$

particiones de $[a,b]$ tales que

$$U(f,Q_\varepsilon) - L(f,Q_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2} \;\; y \;\; U(g,O_\varepsilon) - L(g,O_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{47}$$

Luego, si $P_\varepsilon = Q_\varepsilon \cup O_\varepsilon \in \mathcal{P}_{[a,b]}$, entonces por (48) se tiene que

$$U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2} \;\; y \;\; U(g,P_\varepsilon) - L(g,P_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{48}$$

Por otro lado, si $[t_{i-1}, t_i]$ $(i = \overline{1,n})$ son los subintervalos de la partición P_ε y $N_i = \sup\{f(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\}$ (respectivamente, $n_i = \inf\{f(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\}$), $H_i = \sup\{g(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\}$ (respectivamente, $h_i = \inf\{g(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\}$) y además $M_i = \sup\{ (f+g)(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\}$ (respectivamente, $m_i =$

$\inf\{(f+g)(x):\ x\in[t_{i-1},t_i]\})$.
Entonces por el lema 7.5.2 partes (2) y (3) se tiene que

$$M_i \leq N_i + H_i \quad y \quad m_i \geq n_i + h_i. \tag{49}$$

Luego, por (49) y (50) se sigue que

$$\begin{aligned} U(f+g,P_\varepsilon) - L(f+g,P_\varepsilon) &\leq U(f,P_\varepsilon) + U(g,P_\varepsilon) \\ &- L(f,P_\varepsilon) - L(g,P_\varepsilon) \\ &= [U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon)] \\ &+ [U(g,P_\varepsilon) - L(g,\varepsilon)] \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned} \tag{50}$$

Así, por el teorema 7.3.1, $f+g\in R[a,b]$.
Ahora,

$$\begin{aligned} \int_a^b f + \int_a^b g &= \sup_{P\in\mathcal{P}_{[a,b]}} L(f,P) + \sup_{Q\in\mathcal{P}_{[a,b]}} L(g,Q) \\ &= \sup_{P,Q\in\mathcal{P}_{[a,b]}} [L(f,P) + L(g,Q)] \\ &\leq \sup_{P\in\mathcal{P}_{[a,b]}} L(f+g,O) = \textstyle\int_a^b f+g, \end{aligned} \tag{51}$$

y

$$\begin{aligned} \int_a^b f + \int_a^b g &= \inf_{P\in\mathcal{P}_{[a,b]}} U(f,P) + \inf_{Q\in\mathcal{P}_{[a,b]}} U(g,Q) \\ &= \inf_{P,Q\in\mathcal{P}_{[a,b]}} [U(f,P) + U(g,Q)] \\ &\geq \inf_{P\in\mathcal{P}_{[a,b]}} U(f+g,O) = \textstyle\int_a^b f+g. \end{aligned} \tag{52}$$

Así, por (52) y (53) tenemos que

$$\int_a^b f+g = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

2. Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Como $f, g \in B_{[a,b]}$, existe $M > 0$ tal que
$$|f(x)| \leq M \quad y \quad |g(x)| \leq M, \tag{53}$$
para todo $x \in [a, b]$.
Por otro lado, como $f, g \in R_{[a,b]}$, entonces existen particiones Q_ε, $O_\varepsilon \in \mathcal{P}_{[a,b]}$ tales que
$$\sum_{i=1}^{n} w_i(f)\Delta t_i(Q_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2M} \;\; y \;\; \sum_{i=1}^{n} w_i(g)\Delta t_i(O_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2M}.$$
Así, para $P_\varepsilon = Q_\varepsilon \cup O_\varepsilon \in \mathcal{P}_{[a,b]}$ se tiene que
$$\sum_{i=1}^{n} w_i(f)\Delta t_i(P_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2M} \;\; y \;\; \sum_{i=1}^{n} w_i(g)\Delta t_i(P_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2M}. \tag{54}$$
Ahora, por (54) y la definición de oscilación se tiene que
$$\begin{aligned} |f(y)g(y) - f(x)g(x)| &= |[f(y) - f(x)]g(y) + f(x)[g(y) - g(x)]| \\ &\leq |f(y) - f(x)||g(y)| + |f(x)||g(y) - g(x)| \\ &\leq M[|f(y) - f(x)| + |g(y) - g(x)|] \\ &\leq M(w_i(f) + w_i(g)), \end{aligned} \tag{55}$$
donde $w_i(f)$ y $w_i(g)$ son las oscilaciones de f y g en cada subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$ de la partición P_ε respectivamente. En consecuencia, por (56) se sigue que
$$w_i(fg) \leq M(w_i(f) + w_i(g)). \tag{56}$$
Por lo tanto, de (55) y (57) obtenemos que
$$\sum_{i=1}^{n} w_i(fg)\Delta t_i \leq M[\sum_{i=1}^{n}(w_i(f) + w_i(g))\Delta t_i] < M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$
Así, a la luz de la nota 7.5.3(2), $fg \in R_{[a,b]}$.

El caso particular es evidente del caso anterior, tomando $g(x) = c$ para todo $x \in [a, b]$. Por otro lado, si $c = 0$, entonces $cf = 0 \in R_{[a,b]}$ y $\int_a^b f = \int_a^b 0 = 0 = 0\int_a^b f$.

Si $c > 0$, entonces por el lema 7.5.2 partes (4) y (5) se sigue que $N_i = cM_i$ y $n_i = cm_i$, donde $N_i = \sup\{cf(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\}$ (respectivamente, $M_i = \sup\{f(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\}$), $n_i = \inf\{cf(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\}$ (respectivamente, $m_i = \inf\{cf(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\}$). En consecuencia,

$$U(cf, P) = cU(f, P) \qquad y \qquad L(cf, P) = cL(f, P), \tag{57}$$

para toda $P \in \mathcal{P}_{[a,b]}$. Ahora, por la nota 7.11(3) y (58) se verifica que

$$cU(f, P) = U(cf, P) \geq \int_a^b cf \geq L(cf, P) = cL(f, P),$$

para toda $P \in \mathcal{P}_{[a,b]}$. Así,

$$L(f, P) \leq \frac{1}{c}\int_a^b cf \leq U(f, P),$$

para toda $P \in \mathcal{P}_{[a,b]}$ y por la nota 7.2.2(3) $\int_a^b f = \frac{1}{c}\int_a^b cf$, es decir, $\int_a^b cf = c\int_a^b f$.

Si $c < 0$, se procede de manera análoga al caso anterior.

3. Como $\frac{f}{g} = f\frac{1}{g}$, entonces por 2, basta probar que $\frac{1}{g} \in R_{[a,b]}$. Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario, por ser $g \in R_{[a,b]}$ existe $P_\varepsilon \in \mathcal{P}_{[a,b]}$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n} w_i(g)\Delta t_i < M^2\varepsilon. \tag{58}$$

Por otro lado, por hipótesis $0 < M \leq |g(x)|$ para todo $x \in [a, b]$. Entonces

$$\frac{1}{\mid g(y)g(x) \mid} \leq \frac{1}{M^2}. \tag{59}$$

Luego, por (60) y la definición de oscilación de g se tiene que

$$\left|\frac{1}{g(y)} - \frac{1}{g(x)}\right| = \frac{|g(y) - g(x)|}{g(y)g(x)} \leq \frac{w_i(g)}{M^2}, \tag{60}$$

donde $w_i(g)$ es la oscilación de g relativa a la partición P_ε. Así, por (59) y (61) se tiene que

$$\sum_{i=1}^{n} w_i\left(\frac{1}{g}\right)\Delta t_i \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{w_i(g)}{M^2}\Delta t_i < \frac{1}{M^2}\sum_{i=1}^{n} w_i(g)\Delta t_i < M^2\frac{\varepsilon}{M^2}.$$

En consecuencia, por la nota 7.5.2(2), concluimos que $\frac{1}{g} \in R_{[a,b]}$.

4. Si $f = 0$ en $[a,b]$, entonces $\int_a^b f = 0$. Probemos que si $g \geq 0$ en $[a,b]$, $\int_a^b g \geq 0$.
   Ahora por la nota 7.2.2(3) se sigue que

   $$L(f,P) \leq \int_a^b g, \tag{61}$$

   para toda $P \in \mathcal{P}_{[a,b]}$.
   Por otro lado, como $m_i = \inf\{g(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\}$, entonces por la hipótesis y el lema 7.5.2(9), $m_i \geq 0$ para cualquier subintervalo de cualquier partición de $[a,b]$.
   En consecuencia, por (62), $\int_a^b g \geq L(f,p) \geq 0$.

   Si $h = g - f$, entonces por 1 y 2, $h \in R_{[a,b]}$. En consecuencia, por la hipótesis $h \geq 0$ en $[a,b]$ y por la primera parte $\int_a^b h \geq 0$, es decir $\int_c^b g \geq \int_a^b f$ y así, 4 queda probado.

5. Utilizando la desigualdad dada por el Teorema 2.3.10(8), tenemos que:

   $$||f(y)| - |f(x)|| \leq |f(y) - f(x)|.$$

   Así, la oscilación de $|f|$ en cualquier conjunto satisface que:

   $$w(|f|) \leq w(f). \tag{62}$$

   Ahora, sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Como $f \in R_{[a,b]}$ existe $P_\varepsilon \in \mathcal{P}_{[a,b]}$ tal que

   $$\sum_{i=1}^{n} w_i(f)\Delta t_i < \varepsilon.$$

En consecuencia, por (63) se sigue que

$$\sum_{i=1}^{n} w_i(|f|)\Delta t_i < \varepsilon,$$

y por la nota 7.5.2(2), $|f| \in R_{[a,b]}$.

Por otro lado, del teorema 2.11(2) se tiene que:

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|,$$

para todo $x \in [a,b]$. En consecuencia, de 4 se verifica que:

$$-\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|,$$

y de nuevo por el teorema 2.3.7(3) concluimos que:

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|.$$

6. Como $f \in R_{[a,b]}$, entonces por la nota 7.2.2(3),

$$L(f,P) \leq \int_a^b \leq U(f,P), \tag{63}$$

para toda $P \in \mathcal{P}_{[a,b]}$. En particular, si $P = \{t_0 = a, t_n = b\} \in \mathcal{P}_{[a,b]}$, entonces por (64) se sigue que

$$m(b-a) \leq L(f,P) \leq \int_a^b f \leq U(f,P) \leq M(b-a),$$

y así, $m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$.

Por último, si $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in [a,b]$, entonces por el teorema 2.3.10(4) se tiene que $-M \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a,b]$. Por lo tanto, aplicado la primera parte obtenemos que $-M(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$ y así, $|\int_a^b f| \leq M(b-a)$.

∎

Nota 7.6.2.

1. Una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ puede satisfacer:

   a) $f \geq 0$ en $[a,b]$ y

   b) $f(x_0) > 0$ para algún $x_0 \in [a,b]$

   pero, $\int_a^b f = 0$.

   En efecto, consideremos la función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

   $$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \neq 1 \\ 1 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$$

   Entonces por el corolario 7.21, $f \in R_{[0,1]}$ y además, es claro que $\int_0^1 f = 0$.

   Sea $f \in R_{[a,b]}$ y $f \geq 0$ en $[a,b]$. Si f es continua en $x_0 \in [a,b]$ y $f(x_0) > 0$, entonces $\int_a^b f > 0$ (ver ejercicio 5 del capítulo 7).

2. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua y $f \geq 0$ en $[a,b]$. Si $\int_a^b f = 0$, entonces $f = 0$ en $[a,b]$.

   En efecto, si existe algún $x_0 \in [a,b]$ tal que $f(x_0) > 0$, entonces por la continuidad de f en x_0 existe $\delta > 0$ tal que $f > 0$ en $(x_0-\delta, x_0+\delta) \cap [a,b]$. Así, podemos tomar $[\alpha,\beta] \subset (x_0-\delta, x_0+\delta) \cap [a,b]$ tal que $f > 0$ en $[\alpha,\beta]$. Luego, como $f \in R_{[a,b]}$ por ser f continua, se sigue que $\int_a^b f \geq \int_\alpha^\beta f > 0$, lo que contradice a la hipótesis y así, el resultado es cierto.

7.7. Continuidad Uniforme e Integrabilidad

Teorema 7.7.1. *Sea $f \in R_{[a,b]}$ y $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por $F(x) = \int_a^x f$. Entonces F es uniformemente continua en $[a,b]$ (y así, continua).*

Prueba: Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Nótese que, por los teoremas 7.4.2 y 7.6.1(5) se tiene que

$$\begin{aligned} |F(x) - F(y)| &= \left| \int_a^x f - \int_a^y f \right| \\ &= \left| \int_y^a f + \int_a^x f \right| \\ &= \left| \int_y^x f \right|. \end{aligned} \tag{64}$$

Ahora como $f \in R_{[a,b]}$, entonces f está acotada en $[a,b]$. Es decir, existe $M > 0$ tal que $|f(t)| \leq M$ para todo $t \in [a,b]$. En consecuencia, por el teorema 7.6.1(6) se verifica que

$$\left| \int_y^x f \right| \leq M(x-y) \leq M|x-y|. \tag{65}$$

Así, por (65) y (66) se tiene que

$$|F(x) - F(y)| \leq M|x-y|, \tag{66}$$

para todo $x, y \in [a,b]$. En consecuencia, tomando $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$, por (68) concluimos que

$$|x-y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |F(x) - F(y)| < \left(\frac{\varepsilon}{M}\right) M = \varepsilon,$$

para todo $x, y \in [a,b]$. Así, f es uniformemente continua en $[a,b]$ y por lo tanto continua. ∎

7.8. Teoremas Fundamentales del Cálculo

A continuación presentamos los resultados más importantes del capítulo, conocidos como primer y segundo Teorema fundamental del Cálculo.

Teorema **7.8.1. (Primer Teorema Fundamental del Cálculo (PTFC))** *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces la función $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ viene dada por*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + F(a), \tag{67}$$

si y sólo si $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a,b]$.

Prueba: ($\Rightarrow$) Sean $x \in [a,b]$ y $\varepsilon > 0$ arbitrarios. Obsérvese que, por los teoremas 7.4.2 y la nota 7.4.6(2) se tiene que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(t)-F(x)}{t-x} - f(x)\right| &= \left|\frac{F(t)-F(x)-(t-x)f(x)}{t-x}\right| \\
&= \frac{1}{|t-x|}\left|\int_a^t f(u)du - \int_a^x f(u)du - \int_x^t f(x)du\right| \\
&= \frac{1}{|t-x|}\left|\int_x^a f(u)du + \int_a^t f(u)du - \int_x^t f(x)du\right| \\
&= \frac{1}{|t-x|}\left|\int_x^t f(u)du - \int_x^t f(x)du\right| \\
&= \frac{1}{|t-x|}\left|\int_x^t [f(u)-f(x)]du\right| \\
&\leq \frac{1}{|t-x|}\int_x^t |f(u)-f(x)|\, du, \qquad (68)
\end{aligned}$$

para todo $t \neq x$.
Por otro lado, como f es continua en x, entonces existe $\delta > 0$ tal que

$$u \in [a,b] \ \ y \ \ |u-x| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(u)-f(x)| < \varepsilon. \qquad (69)$$

Luego, por (69) y (70) existe $\delta > 0$ tal que $t \in [a,b]$ y $|t-x| < \delta$ implica

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(t)-F(x)}{t-x} - f(x)\right| &\leq \frac{\varepsilon}{|t-x|}\int_x^t du \\
&= \frac{\varepsilon}{|t-x|}(t-x) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{|t-x|}|t-x| = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Así, $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a,b]$.

($\Leftarrow$) Supongamos que $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a,b]$. Definamos $\Phi : [a,b] \to \mathbb{R}$, mediante $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$, entonces por lo probado anteriormente $\Phi' = f$ en $[a,b]$ (pues f es continua) . En consecuencia, por la hipótesis $\Phi' = F'$ en $[a,b]$. Luego, por el corolario 6.9.8, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\Phi - F = c$.
Por otro lado, como $\Phi(a) = 0$, entonces $c = F(a)$ y así,

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt.$$

■

Nota 7.8.2.

En la prueba del teorema anterior, el lector debe tener presente que puede suceder $x = a$ o $x = b$, y en estos casos sólo tiene sentido $F'_+(a)$ o $F'_-(b)$ y por lo tanto debe considerar límites laterales en el desarrollo de la prueba.

7.8.3.

1. La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \int_a^{(\int_a^{x^2} \operatorname{sen}^2 t dt)} e^{-t^2} dt,$$

satisface $f'(x) = 2x \operatorname{sen}^2(x^2) e^{-(\int_a^{x^2} \operatorname{sen}^2 t dt)^2}$.

En efecto, como $f = F \circ G \circ H$, donde

$$H(x) = x^2, \quad G(x) = \int_a^x \operatorname{sen}^2 t dt \quad y \quad F(x) = \int_a^x e^{-t^2} dt.$$

Ahora, podemos aplicar el PTFC y obtenemos que

$$G'(x) = \operatorname{sen}^2 x \quad y \quad F'(x) = e^{-x^2}.$$

Por otro lado, aplicando la regla de cadena a f obtenemos que

$$f'(x) = F'[G(H(x))]G'(H(x))H'(x).$$

En consecuencia, $f'(x) = 2x \operatorname{sen}^2(x^2) e^{-(\int_a^{x^2} \operatorname{sen}^2 t dt)^2}$.

2. Usaremos el PTFC y el teorema de Darboux para dar otra prueba del teorema de Bolzano.

   En efecto, supongamos que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua en $[a, b]$ y que $f(a) < 0 < f(b)$. En consecuencia, $f \in R_{[a,b]}$ y por el PTFC la función $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por $F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt$ satisface que

$F'(x) = f(x)$ para todo $x \in (a,b)$.
Por otro lado, por la hipótesis

$$F'(a) = f(a) < 0 < f(b) = F'(b).$$

Así, por el teorema de Darboux existe $c \in (a,b)$ tal que $F'(c) = 0$, es decir, $f(c) = 0$.

Nota **7.8.4.**

1. Del PTFC se sigue que si f es continua en $[a,b]$ y $f = F'$ para alguna función F, entonces $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.

2. Toda función F que satisfaga $F' = f$ en $[a,b]$ se llama una **primitiva** de f en $[a,b]$. Así, por el PTFC toda función continua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ posee una primitiva $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por $F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt$.

3. No toda función integrable es la derivada de alguna función F. Por ejemplo la función $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{si } \ 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

es claramente $f \in R_{[0,2]}$ y tiene una discontinuidad de primera especie en $x = 1$. Luego, por el teorema de Darboux, $f \neq F'$ en $[0,2]$ para cualquier función F en $[0,2]$.

Teorema **7.8.5. (Segundo Teorema Fundamental del Cálculo (STFC))** *Sea $f \in R_{[a,b]}$ y $f = G'$ para alguna función G. Entonces*

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).$$

Prueba: Sea $P = \{t_0 = a, \ldots, t_n = b\} \in \mathcal{P}_{[a,b]}$. Luego, como G es derivable en $[t_{i-1}, t_i]$, $i = \overline{1,n}$, entonces G es continua en (t_{i-1}, t_i) y por el teorema del valor medio existe $c_i \in (t_{i-1}, t_i)$ tal que

$$G'(c_i) = \frac{G(t_i) - G(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}, \tag{70}$$

$i = \overline{1,n}$. Ahora, por la hipótesis y (71) se sigue que

$$G(t_i) - G(t_{i-1}) = \Delta t_i f(c_i), \tag{71}$$

$i = \overline{1,n}$.
Por otro lado, como $m_i \leq f(c_i) \leq M_i$, $i = \overline{1,n}$. Entonces por (72) se tiene que

$$\begin{aligned} m_i\Delta t_i \leq \Delta t_i f(c_i) \leq M_i \Delta t_i \quad &\Rightarrow \quad L(f,P) \leq \sum_{i=1}^{n} \Delta t_i f(c_i) \leq U(f,P) \\ &\Rightarrow \quad L(f,P) \leq \sum_{i=1}^{n} [G(t_i) - G(t_{i-1})] \leq U(f,P) \\ &\Rightarrow \quad L(f,P) \leq G(b) - G(a) \leq U(f,P). \qquad (72) \end{aligned}$$

En consecuencia, por (73) y la nota 7.2.2(3), se verifica que

$$\int_a^b f = G(b) - G(a)$$

∎

7.8.6.

La función $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

es una primitiva de alguna función f discontinua.

En efecto, veamos que F es derivable en $x = 0$. Nótese que, para todo $h \neq 0$ se tiene

$$\frac{F(h) - F(0)}{h} = \frac{F(h)}{h} = \frac{h^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{h})}{h} = h \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right) \to 0,$$

cuando $h \to 0$. Así,

$$F'(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto, basta tomar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = F'(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$. Claramente, f no es continua en $x = 0$ (verificarlo). Además, por el STFC, $\int_0^{\frac{2}{\pi}} f(x)dx = F(\frac{2}{\pi}) - F(0) = \frac{4}{\pi^2}$.

7.9. Integración en Términos Elementales

Teorema **7.9.1.** **(Sustitución de variable)**
Sean $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *continua y* $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ *tal que* $g' \in R_{[c,d]}$. *Si* $g([c,d]) \subset [a,b]$, *entonces*

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx = \int_c^d f[g(x)]g'(x)dx.$$

Prueba: Como f es continua en $[a,b]$, entonces por el PTFC f tiene una primitiva $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ y por el STFC se tiene que

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx = F[g(d)] - F[g(c)]. \tag{73}$$

Ahora, por el PTFC, F es derivable. En consecuencia, por la hipótesis y la regla de la cadena

$$(F \circ g)'(t) = F'[g(t)]g'(t) = f[g(t)]g'(t),$$

para todo $t \in [c,d]$. Así, $F \circ g : [c,d] \to \mathbb{R}$ es una primitiva de la función $(f \circ g)g' : [c,d] \to \mathbb{R}$ y por hipótesis, $(f \circ g)g' \in R_{[c,d]}$. Por lo tanto, aplicando el STFC obtenemos que

$$\begin{aligned} \int_c^d [(f \circ g)g'](t)dt &= (F \circ g)(d) - (F \circ g)(c) \\ &= F[g(d)] - F[g(c)]. \end{aligned} \tag{74}$$

Luego, por (74) y (75) el teorema queda probado. ∎

Teorema **7.9.2.** **(Fórmula de integración por partes)**
Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *funciones con derivadas Riemann integrables en* $[a,b]$. *Entonces*

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(b)g(b) - f(a)g(a)] - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Prueba: Como f y g son funciones derivables en $[a,b]$, entonces $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$. así, fg es una primitiva de la función $f'g + fg'$. Luego, por el STFC se tiene que

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(b)g(b) - f(a)g(a)] - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

∎

Teorema 7.9.3. (De valor medio para integrales)
Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones tales que $g \in R_{[a,b]}$ y no negativa en $[a, b]$, y f continua. Entonces existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx. \tag{75}$$

Prueba: Si $g = 0$ en $[a, b]$, entonces (76) el resultado es evidente.
Supongamos que $f \neq 0$ en $[a, b]$. Como f es continua en $[a, b]$, por el corolario 5.9.3, $m = \inf(f), M = \sup(f) \in f([a, b])$ y $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a, b]$. Ahora, como $g \geq 0$ en $[a, b]$ se sigue que

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x), \tag{76}$$

para todo $x \in [a, b]$. Luego, por el teorema 7.6.1(4) y (77) se verifica que

$$m\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int_a^b g(x)dx. \tag{77}$$

Luego, por ser $g \in R_{[a,b]}$ y no negativa en $[a, b]$ se tiene que $\int_a^b g(x)dx > 0$. En consecuencia, por (78) obtenemos que

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M. \tag{78}$$

Así, por (79) y la continuidad de f en $[a, b]$, existe $c \in [a, b]$ tal que

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}.$$

Es decir, (76) es cierto. ∎

7.10. Ejercicios

1. ¿Qué funciones tienen la propiedad de que toda suma inferior es igual a toda suma superior?

2. Usar la definición de integral para calcular: $\int_0^1 x^2dx$ y $\int_0^1 x^3dx$.

3. Probar que $\int_a^b f(x)dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)dx$, para todo $c \in \mathbb{R}$.

4. Probar que $\int_{ca}^{cb} f(x)dx = c\int_a^b f(cx)dx$, para todo $c \in \mathbb{R}$.

5. (a) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función tal que $f \geq 0$ en $[a,b]$. Pruebe que Si f es continua en $x_0 \in [a,b]$ y $f(x_0) > 0$, entonces $\int_a^b f > 0$.

   (b) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f \geq 0$ en $[a,b]$. Probar que si $\int_a^b f = 0$ entonces $f = 0$ en $[a,b]$.

6. Sea f continua en $[a,b]$ y $\int_a^b fg = 0$ para toda función g continua en $[a,b]$. Probar que $f = 0$ en $[a,b]$.

7. Si f es continua en $[a,b]$, probar que existe $c \in [a,b]$ tal que $\int_a^b f = f(c)(b-a)$.

8. Sean f y g funciones continuas en $[a,b]$ tales que $\int_a^b f = \int_a^b g$. Probar que existe $x \in [a,b]$ tal que $f(x) = g(x)$.

9. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función Riemann integrable en $[a,b]$. Probar que existe $x \in [a,b]$ tal que $\int_a^x f = \int_x^b f$.

10. Sea $f \in B_{[a,b]}$. Si para cualquier $c \in (a,b)$, $f_{|[c,b]}$ es Riemann integrable en $[c,b]$, probar que $f \in R_{[a,b]}$ y que

$$\lim_{c \to a^+} \int_c^b f = \int_a^b f.$$

11. Sea $f \in R_{[a,b]}$ y $c, d \in \mathbb{R}$. Sea $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in (a,b) \\ c & \text{si} \quad x = a \\ d & \text{si} \quad x = b \end{cases}$$

    a) Probar que $g \in R_{[a,b]}$ y $\int_a^b g = \int_a^b f$.

    b) Probar que si $f \in R_{[a,b]}$ y h coincide con f salvo un número finito de puntos, entonces $h \in R_{[a,b]}$ y $\int_a^b h = \int_a^b f$.

12. ¿Es cierto que si $f^2 \in R_{[a,b]}$, entonces $f \in R_{[a,b]}$?

13. *Una función* $s : [a,b] \to \mathbb{R}$ *se llama* **escalonada** *si existe una partición* $P \in \mathcal{P}_{[a,b]}$ *tal que* s *es constante en cada subintervalo de* P.

    a) Probar que si $f \in R_{[a,b]}$, entonces dado $\epsilon > 0$ existen funciones escalonadas s_1 y s_2 tales que
    $$\int_a^b f - \int_a^b s_1 < \epsilon \quad y \quad \int_a^b s_2 - \int_a^b f < \epsilon.$$

    b) Si para cada $\epsilon > 0$ existen funciones escalonadas s_1 y s_2 tales que $s_1 \leq f \leq s_2$ en $[a,b]$ y $\int_a^b s_2 - \int_a^b s_1 < \epsilon$. Probar que, $f \in R_{[a,b]}$.

    c) Sean $f \in R_{[a,b]}$ y $\epsilon > 0$. Probar que existe una función $g \leq f$ continua en $[a,b]$ tal que $\int_a^b f - \int_a^b g < \epsilon$.

14. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ creciente en $[a,b]$.

    a) Si $P = \{t_0, \ldots, t_n\} \in \mathcal{P}_{[a,b]}$, sea $Q = \{f^{-1}(t_0), \ldots, f^{-1}(t_n)\}$. Probar que $L(f^{-1}, P) + U(f, Q) = bf^{-1}(b) - af^{-1}(a)$.

    b) Probar que $\int_a^b f^{-1} = bf^{-1}(b) - af^{-1}(a) - \int_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(b)} f$.

15. Sea $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por
    $$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \\ \frac{1}{n} & \text{si } x = \frac{m}{n}, \ mcd(m,n) = 1 \end{cases}$$
    donde $mcd(m,n)$ es el máximo común divisor entre m y n. Probar

    a) h no es continua en $\mathbb{Q} \cap [0,1]$.

    b) h es continua en $(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \cap [0,1]$.

    c) $L(h,P) = 0$ para toda $P \in \mathcal{P}_{[0,1]}$.

    d) $h \in R_{[0,1]}$.

16. Dar un ejemplo de dos funciones una Riemann integrable y la otra no Riemann integrable tal que la composición sea Riemann integrable.

17. Dar ejemplo de dos funciones Riemann integrables cuya composición no sea Riemann integrable.

18. Sea $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función monótona con derivada Riemann integrable en $[a,b]$. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua en $[a,b]$, probar existe $c \in [a,b]$ tal que

$$\int_a^b fg = g(a)\int_a^c f + g(b)\int_c^b f.$$

19. Hallar las derivadas de las siguientes funciones:

    a) $F(x) = \int_a^{x^3} \operatorname{sen}^3 t dt.$

    b) $F(x) = \int_x^b \frac{1}{1+t^2+\operatorname{sen}^2 t} dt.$

    c) $F(x) = \int_{15}^x (\int_8^y \frac{1}{1+t^2+\operatorname{sen}^2 t} dt).$

    d) $F(x) = \operatorname{sen}(\int_0^x \operatorname{sen}(\int_0^y \operatorname{sen}^3 t dt)).$

20. Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}\int_0^x e^{-t^2} dt.$

7.11. Algunas Sugerencias para la solución de los ejercicios

1. Un ejemplo está dado en la parte inicial del capítulo.

2. Para la función $f(x) = x^2$ considere la partición $P_n = \{t_0, \cdots, t_n\}$ de $[0,1]$ tal que $t_i = \frac{i}{n}, n \in \mathbb{N}$ y recuerde el valor de $\sum_{i=1}^k i^2$. Para la función $f(x) = x^3$ proceda de manera similar al caso anterior.

3. Recuerde que $P = \{t_0, \cdots, t_n\}$ es una partición de $[a, b]$ si sólo si $Q = \{t_0 + c, \cdots, t_n + c\}$ es una partición de $[a + c, b + c]$.

4. Proceda como en el ejercicio 3.

5. (a) Verifique que $L(f, P) > 0$ para toda partición P de $[a, b]$.
   (b) Aplique el método de reducción al absurdo y la parte (a).

6. Elija g de tal forma que pueda aplicar el ejercicio 5(b).

7. Aplique el teorema 7.38 tomando una función g conveniente.

8. Aplique el ejercicio 7 a una función adecuada.

9. Defina una función $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua y aplique el teorema de Darboux.

10. Aplique el corolario 7.20.

11. (a) Aplique la condición de Integrabilidad de tal modo que la partición $P_\epsilon \in \mathcal{P}_{[a,b]}$ satisfaga que

$$\sup\{g(x):\ x \in [a,t_1]\}\Delta t_1 - \inf\{g(x):\ x \in [a,t_1]\}\Delta t_1 < \frac{\epsilon}{4}\ \ y$$

$$\sup\{g(x):\ x \in [a,t_1]\}\Delta t_1 < \frac{\epsilon}{4}.$$

(b) Basta aplicar la parte (a) a cada subintervalo dado por los puntos donde no son iguales f y g.

12. Existe un contraejemplo sencillo.

13. (a) Aplique la condición de integrabilidad y a partir de aquí defina las funciones escalonadas adecuadas.

(b) Dado $\epsilon > 0$ arbitrario existen particiones P_1 y P_2 de $[a,b]$ tales que $\int_a^b s_1 - \int_a^b s_2 < \epsilon$, donde s_1 y s_2 son las funciones escalonadas relativas a las particiones P_1 y P_2 respectivamente. Ahora, considere la partición $P = P_1 \cup P_2 = \{t_0, \ldots, t_n\}$ tal que s_1 y s_2 sean constantes en (t_{i-1}, t_i), $i = \overline{1,n}$ y asuma que $s_1(t_i) = s_2(t_i) = f(t_i)$, $\overline{1,n}$...

(c) Halle primero una función escalonada que satisfaga la propiedad y luego, halle una función continua. Un dibujo será de gran ayuda.

14. Formalice las ayudas que proporcionan los dibujos.

15. Consulte la referencia [17] de la Bibliografía.

16. Una de las funciones que no es Riemann integrable es la función de Dirichlet.

17. La composición de la función del ejercicio 15 junto con una función conveniente debe dar la función de Dirichlet.

18. Considere F una primitiva de f en $[a,b]$ y aplique el teorema 7.35 al producto de F y g' en $[a,b]$.

19. Proceda como en los ejemplos resueltos en el capítulo.

20. Proceda como en 19.

7.12. Ejercicios Varios

1. Defina la función $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por
$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt.$$
El número $\ln(x)$ se llama **logaritmo neperiano** de x.

   1.1.- Demostrar que, $\ln(x) < 0$ si $0 < x < 1$, $\ln(1) = 0$ y $\ln(x) > 0$ si $x > 1$.

   1.2.- Demostrar que, la función $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ es derivable, creciente y existe un único $x \in \mathbb{R}$ tal que $\ln(x) = 1$, tal x se escribe como, $x = e$.

   1.3.- Demostrar que, $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$.

   1.4.- Demostrar que, $\ln(x^r) = r\ln(x)$ $\forall r \in \mathbb{Q}$.

   1.5.- Demostrar que, $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ es sobreyectiva.

   1.6.- Defina la función **exponencial** $exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ como la función inversa de la función $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, así,
$$exp(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad \ln(y) = x.$$
Demostrar que, $exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ es una biyección creciente de clase C^1, y $(\exp)'(x) = exp(x)$, y $\exp(x+y) = exp(x)exp(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Además, $exp(r) = e^r$ para todo $r \in \mathbb{Q}$.

2. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivable, con derivada continua, pruebe el TVM para derivadas utilizando el TVM para integrales.

3. Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas. Probar que,
$$\left[\int_a^b fg\right]^2 \leq \int_a^b f^2 \int_a^b g^2.$$

4. Pruebe que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es integrable en $[a,b]$. Entonces la función $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es de Lipschitz.

5. Defina la función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mediante: $f(x) = 0$ si $x = 0$ y $f(x) = \frac{1}{2^n}$ si $\frac{1}{2^{n+1}} < x \leq \frac{1}{2^n}$, $n \in \mathbb{N} \cap \{0\}$. Probar que f es integrable en $[0,1]$ y hallar la integral.

Bibliografía

[1] **APOSTOL, T**. *Calculus*, Editorial Reverté. Barcelona, 1973.

[2] **APOSTOL, T**. *Análisis Matemático*, segunda edición. Editorial Reverté. Barcelona, 1977.

[3] **AULL, C**. *The First Simmetric Derivate.* American Mathematical Monthly, vol 81 (1974) 349-354.

[4] **BARTLE** and **SHERBERT**. *Introducción al Análisis Matemático de una variable.* Editorial Limusa. Sexta Edición. México , 1992.

[5] **BILER** and **WITKOWSKI**. *Problems in Mathematical Analysis.* Monographs and Textbooks in Pure an Applied Mathematics; 132. Marcel Dekker, Inc. New York, 1990.

[6] **CADENAS, R**. *Tópicos en Análisis Matemático.* Trabajo de Ascenso (para Asociado). Universidad de los Andes, Mérida, 1997.

[7] **CADENAS, R**. *Problemas y Ejercicios de Análisis I.* Universidad de los Andes-Consejo de Publicaciones-Facultad de Humanidades y Educación-CODEPRE, Mérida, 1999.

[8] **DEMIDOVICH, B**. *5000 Problemas de Análisis Matemático.* Segunda Edición. Madrid-España, 1979.

[9] **GUTIERREZ, J Y OTROS**. *Problemas de Análisis Matemático.* Universidad de Valladolid. Secretaria de Publicaciones. Valladolid-España, 1985.

[10] **LEAL** y **TINEO**. *Fundamentos de Álgebra.* Partes I y II. Notas de los profesores Juan Leal y Antonio Tineo.

[11] **LIMA, E**. *Curso de Análise.* Libros Técnicos y Científicos. Brasil,1976.

[12] **LIMA, E**. *Análise Real.* Volumen 1, 2^a ed. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNP_q. Rio de Janeiro, 1993.

[13] **MUNKRES, J**. *Topology a first course* . Prentice-Hall. Englewood Cliff, New Jersey, 1975.

[14] **PÁLES; P**. *Notes on Mean Value Theorems.* Grazer Marh. Ber. ISSN 1016-7692. Bericht. 327 (1996), 17-20.

[15] **RÍBNIKOV, K**. *Historia de las Matemáticas.* Editorial Mir, Moscú, 1991.

[16] **RUDIN, W**. *Principios de Análisis Matemático.* Segunda Edición. Libros Macgraw-Hill de México, 1966.

[17] **SPIVAK, M**. *Cálculo Infinitesimal.* Tomos 1 y 2 .Editorial Reverté. Barcelona, 1980.

[18] **SIGMA**. *El Mundo de las Matemáticas.* Tomo1. Tercera Edición. Ediciones Grijalbo, S.A. Barcelona-España, 1976.

[19] **SNIPES, R**. *Functions that Preserve Cauchy Sequences.* New Archief Voor Wiskunde (3), XXV (1977), 409-422.

[20] **UNIVERSITAS**. *La Matemática.* Tomo 12. Salvat Editores, S.A. Barcelona-Espanã, 1984.

[21] **WHITE; A**. *Introducción al Análisis Real.*. Ediciones de Promoción Cultural. S.A. España, 1973.

ÍNDICE DE SÍMBOLOS

Índice alfabético