

*“¡Como si se pudiera matar el tiempo
sin insultar a la eternidad!”
Henry David Thoreau.*

Capítulo 5

Modelo de mapas acoplados para el colapso de caos estable.

El fenómeno asociado a la existencia de diversas modalidades en el comportamiento colectivo de sistemas de elementos dinámicos acoplados han tenido interpretaciones importantes en el entendimiento de propiedades universales emergentes en el campo de los sistemas complejos. En este aspecto, se focaliza el fenómeno de comportamiento dinámico colectivo no trivial, bajo el cual surgen evoluciones temporales dispares de cantidades macroscópicas y de variables microscópicas en un sistema [7]. Este comportamiento se exhibe en dos modalidades. Por una parte, se ha descubierto la emergencia de orden en la evolución temporal de la dinámica de cantidades macroscópicas de un sistema constituido por elementos caóticos interactuantes (a modo de ilustración, el promedio espacial de los estados de los elementos de un sistema dado puede evolucionar periódicamente en el tiempo, mientras que comportamiento de esos elementos es caótica y desincronizada). El comportamiento colectivo dinámico no trivial ha sido extensamente investigado [52, 53, 54, 55].

En este sentido, la contribución de la presente Tesis Doctoral consiste en considerar la contraparte de este fenómeno que ha sido reportado y que consiste en la persistencia de caos colectivo o desorden temporal a nivel macroscópico en sistemas de elementos acoplados cuya dinámica individual es **periódica**. Este comportamiento no trivial se ha denominado *caos colectivo* [9, 56, 57] y es uno de los fenómenos emergentes menos entendidos en sistemas complejos. Nuestro aporte se dirige a investigar el papel de las conexiones no locales en la emergencia de caos estable mediante el estudio de diversas topologías y para ello se consideran redes globalmente acopladas,

redes regulares con acoplamientos no locales, redes de pequeño mundo y redes aleatorias.

Las redes de pequeño mundo se caracterizan por tener una distancia media entre nodos pequeña y un coeficiente de agrupamiento grande. Para construir estas redes emplearemos el algoritmo de Watts y Strogatz [65] en el cual se parte de una red regular donde cada nodo tiene k vecinos y se recablean las conexiones hacia otros nodos con una probabilidad p . Para $p = 0$, la red es completamente regular, mientras que para $p = 1$, la red es completamente aleatoria. La red de pequeño mundo se forma para valores intermedios de la probabilidad p .

La motivación para investigar caos estable en este tipo de redes proviene de las topologías de conectividad realistas de sistemas biológicos, tecnológicos y sociales, las cuales en general no son completamente regulares ni completamente aleatorias, sino que poseen propiedades de redes de pequeño mundo. Se ha reportado en diversas investigaciones que la topología de la red tiene influencia en las propiedades colectivas de sistemas espacialmente extendidos. Por ejemplo el acoplamiento no local puede incrementar la capacidad de sincronización y afectar la estabilidad de patrones en redes dinámicas, lo cual se atribuye generalmente a la disminución de la longitud característica media en la red.

Estudiaremos diversas cantidades macroscópicas para monitorear la presencia de caos colectivo estable, tales como el campo medio H_t y la desviación estándar media $\langle \sigma \rangle$ en función de los parámetros de la red k y p . Del mismo modo, calcularemos esas cantidades en función del parámetro de acoplamiento ϵ . El colapso de caos estable ocurre en las regiones de parámetros donde el campo medio del sistema tenga el mismo período que el mapa local y $\langle \sigma \rangle = 0$.

5.1. Sistema globalmente acoplado.

Iniciaremos la investigación de las conexiones no locales, considerando el caso extremo en el que todos los elementos de un sistema están a su vez conectados con todos, de tal forma que definimos a un sistema de mapas acoplados globalmente como

$$x_{t+1}^i = (1 - \epsilon)f(x_t^i) + \frac{\epsilon}{N} \sum_{j=1}^N f(x_t^j), \quad (5.1)$$

donde, x_t^i es el estado del i -ésimo mapa descrito por una variable continua para el tiempo discreto t , con $i = 1, 2, \dots, N$; $f(x)$ es una función que describe la dinámica

local y que en nuestro caso corresponde a la ecuación (3.10) que define al mapa PLOK y ϵ es el parámetro de acoplamiento.

Se seleccionan los parámetros locales, a, b y c del mapa (3.10) de forma tal que la dinámica local converja hacia una órbita superestable de período tres; es decir, se escoge en nuestro caso $a = 0,1$, $b = 2,5$ y $c = 0$ [56] (véase la Figura 3.6).

En la Figura 5.1 observamos el comportamiento del sistema globalmente acoplado a través de su campo medio, H_t , en donde observamos que el sistema alcanza colectivamente el atractor periódico estable, y de hecho lo hace en muy pocas iteraciones (del orden de 10^1) a partir del valor de acoplamiento $\epsilon \approx 0,176$ hasta $\epsilon = 1$, traducándose en la emergencia de un comportamiento colectivo periódico sincronizado, lo cual se evidencia en el monitoreo de su desviación estándar promedio $\langle \sigma \rangle$.

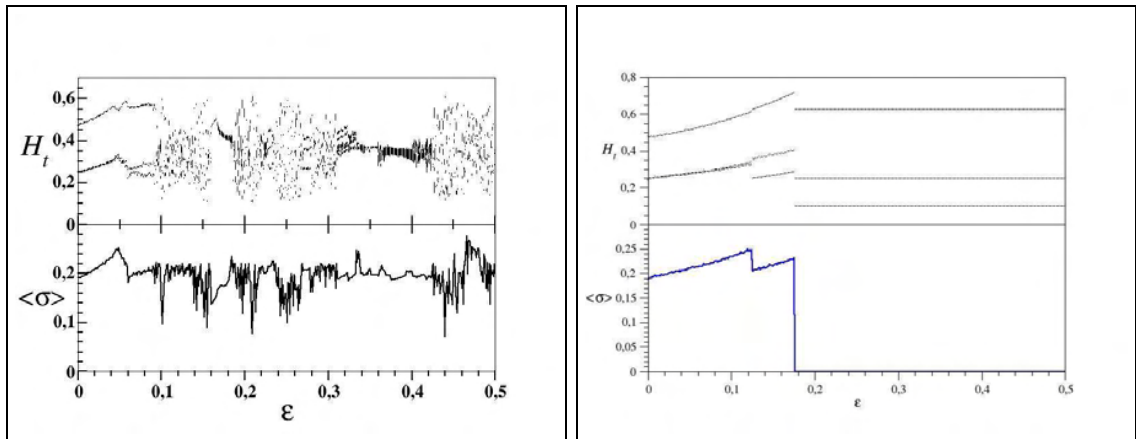


Figura 5.1: *Panel derecho: Diagrama de bifurcación del campo medio H_t (cuadro superior) y la dispersión media $\langle \sigma \rangle$ (cuadro inferior) en función de ϵ , para el sistema (3.15) con $k = 2$ y $p = 0$ (red unidimensional regular), con $N = 10^4$. Panel izquierdo: Diagrama de bifurcación del campo medio H_t (cuadro superior) y la dispersión media $\langle \sigma \rangle$ (cuadro inferior) en función de ϵ , para el sistema (5.1) con $k = N$ y $p = 0$. En ambos casos el tamaño del sistema es $N = 10^4$, y para cada valor de ϵ son graficados 10^3 valores de H_t , después de haber descartado 10^4 transientes. La cantidad $\langle \sigma \rangle$ fue calculada como el promedio de 10^3 valores de σ_t , después de haber descartado 10^4 transientes.*

La Figura 5.1 nos muestra que efectivamente la topología juega un rol en la emergencia de este comportamiento colectivo ordenado, y que contrasta con el trabajo original de Politi y colaboradores [9].

Ahora queda por analizar el comportamiento de la región comprendida entre $\epsilon \in (0, 0,176)$, la cual está asociada al régimen de caos colectivo estable, el cual es efectivamente, un estado supertransitorio; es decir, que el tiempo de convergencia hacia el estado sincronizado de período tres aumenta exponencialmente con el tamaño del sistema. En tal sentido, hemos verificado que, aun para un sistema pequeño de $N = 10$ mapas, se requiere del orden de 10^{10} iteraciones para que el sistema alcance su estado sincronizado de período tres para ciertos valores particulares de $\epsilon \in (0, 0,176)$ y que dependerán obviamente de las condiciones iniciales. Luego, el caos colectivo es el estado efectivamente observable en la práctica en esos rangos de parámetros.

5.2. Colapso de caos estable en redes de pequeño mundo.

Utilizaremos el algoritmo de construcción de redes de pequeño mundo propuesto originalmente por Watts y Strogatz [65]. Comenzamos de un anillo con N nodos, donde cada nodo esta conectado a sus k vecinos más cercanos. Entonces, cada conexión es redirigida al azar con una probabilidad p hacia cualquier otro lugar de la red, evitando las autoconexiones y las conexiones duplicadas. Posteriormente al proceso de recableado o reconexión, el número de elementos conectados a cada nodo (los cuales denominaremos el los vecinos de ese nodo) puede variar, pero el número total de enlaces en la red es constante e igual a $Nk/2$. Se supone que todos los enlaces son bidireccionales. Para $p = 0$, la red es completamente regular, mientras que para $p = 1$, la red resultante es completamente aleatoria. Con este algoritmo, una red de pequeño mundo se forma para valores intermedios de la probabilidad p . La condición

$$\log N \ll k \ll N, \quad (5.2)$$

se emplea en el algoritmo para garantizar que ningún elemento quede aislado luego del proceso de recableado, lo que da lugar a un grafo conexo.

Para encontrar las regiones de comportamientos de tipo pequeño mundo y aleatorio en esta red, se deben calcular dos cantidades: **1.**) el coeficiente de agrupamiento C_i para cada nodo i , el cual está dado por el cociente entre las conexiones existentes E_i entre sus k_i vecinos y el número total de posibles conexiones entre estos, el cual es $k_i(k_i - 1)/2$ [87]. Entonces, el coeficiente de agrupamiento C de la red se define como el promedio de los coeficientes de agrupamiento de todos los nodos,

$$C = \langle C_i \rangle = \left\langle \frac{2E_i}{k_i(k_i - 1)} \right\rangle; \quad (5.3)$$

en otras palabras, el coeficiente de agrupamiento indica la fracción media de los vecinos k_i del nodo i que son vecinos entre sí; **2.**) la longitud característica de la red, la cual se define como el promedio de las distancias más cortas entre todos los pares de nodos de la red. El promedio de estas distancias al nodo i es

$$L(i) = \langle L_{\text{mín}}(i, j) \rangle, \quad (5.4)$$

donde $L_{\text{mín}}(i, j)$ representa la distancia más corta entre el nodo i y el nodo j . Aquí la distancia se define como el número de conexiones entre dos nodos. En consecuencia, la longitud característica de la red es

$$L = \langle L(i) \rangle, \quad (5.5)$$

promediada para todos los nodos i .

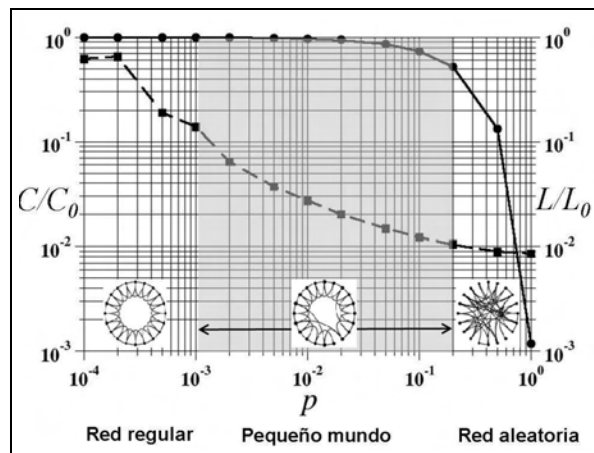


Figura 5.2: Coeficiente de agrupamiento normalizado C/C_0 (línea continua) y longitud característica normalizada L/L_0 (línea segmentada) en función de la probabilidad de reconexión p . Parámetros fijos $k = 5$, $N = 10^4$. La normalización es efectuada con respecto a una red regular ($p = 0$). Las regiones donde emergen una red regular, una red de pequeño mundo (región sombreada) y una red aleatoria se indican. La parte inferior de la figura ilustra esquemáticamente la forma de la red en cada región.

La Figura 5.2 muestra el coeficiente de agrupamiento normalizado y la longitud característica en función de la probabilidad de recableado p para una red construida con el algoritmo descrito anteriormente. La región $p \in (0, 0,001)$ corresponde a una red con comportamiento regular. La red de pequeño mundo surge en el rango

$p \in (0,001, 0,2)$, debido a que el coeficiente de agrupamiento C es alto en comparación con el de una red aleatoria y, adicionalmente, posee una longitud característica L pequeña con respecto a una red regular. Finalmente, una red aleatoria emerge desde $p = 0,2$ hasta $p = 1$.

El estado de cada nodo en la red puede ser descrito por una variable continua, la cual evoluciona de acuerdo a una regla determinista dependiendo de su propio estado y de los estados de sus vecinos en un tiempo dado. Definimos un sistema de mapas acoplados difusivamente sobre una red generada mediante el algoritmo anteriormente expuesto, según la expresión (3.11)

$$x_{t+1}^i = f(x_t^i) + \frac{\epsilon}{k(i)} \sum_{j \in \nu(i)} [f(x_t^j) - f(x_t^i)], \quad (5.6)$$

donde, x_t^i es el estado del i -ésimo mapa para el tiempo discreto t , con $i = 1, 2, \dots, N$; $k(i)$ es el número de elementos conectados al elemento i ; $\nu(i)$ es el conjunto de vecinos de i ; $f(x)$ es una función que describe la dinámica local que corresponde al mapa PLOK y ϵ es el parámetro de acoplamiento.

El sistema (3.11) se puede escribir en forma vectorial como

$$\mathbf{x}_{t+1} = [(1 - \epsilon) \mathbf{I} + \epsilon \mathbf{M}] \mathbf{f}(\mathbf{x}_t), \quad (5.7)$$

donde los vectores N -dimensionales \mathbf{x}_t y $\mathbf{f}(\mathbf{x}_t)$ tienen componentes $[\mathbf{x}_t]_i$ y $[\mathbf{f}(\mathbf{x}_t)]_i = f(x_t^i)$ respectivamente, \mathbf{I} es la matriz identidad $N \times N$, y \mathbf{M} es una matriz simétrica $N \times N$ cuyas componentes son $M_{i,j} = k(i)^{-1}$, si $j \in \nu(i)$ y $M_{i,j} = 0$ en caso contrario.

El análisis de estabilidad lineal del estado completamente sincronizado $f(x_t^i) = f(x_t) = H$ conduce a la condición

$$|[(1 - \epsilon) + \epsilon \mu_k] e^\lambda| < 1, \quad (5.8)$$

donde μ_k ($k = 0, 1, \dots, N - 1$) son el conjunto de autovalores de la matriz \mathbf{M} , y λ es el exponente de Lyapunov del mapa local f . Para los valores escogidos de los parámetros a , b y c en el mapa local, $\lambda \rightarrow -\infty$; y de esta forma la condición de estabilidad es siempre satisfecha. Como una consecuencia, la evolución a largo plazo del sistema acoplado difusivamente está confinada a su atractor periódico. A pesar de esta limitación, se mostrará que pueden ser observados regímenes dinámicos muy diferentes; dependiendo del acoplamiento ϵ y de la conectividad k .

Con el propósito de estudiar la influencia de las conexiones de largo alcance en el

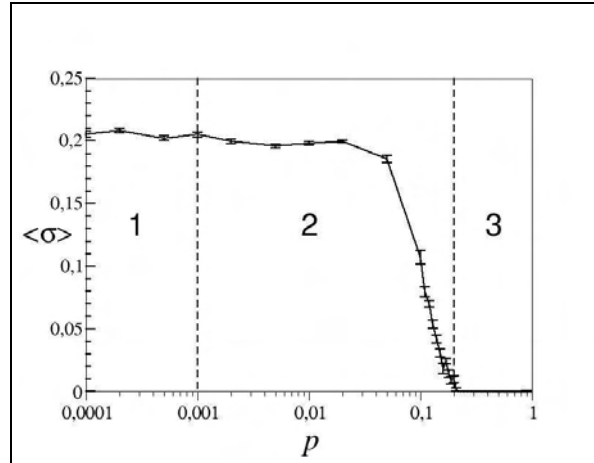


Figura 5.3: $\langle \sigma \rangle$ en función de la probabilidad de reconexión p , $\epsilon = 0,384$, $N = 10^4$ y $k = 10$. La cantidad $\langle \sigma \rangle$ es el promedio de 10^2 valores de σ_t después de haber descartado 3×10^4 transientes. Para cada valor de p fueron hechas 10 realizaciones, mostrándose para cada punto el promedio de las mismas y sus barras de error asociadas. En cada paso de barrido en el parámetro p , se emplean condiciones iniciales aleatorias $x_0^i \in [0, 1]$. Las regiones mostradas corresponden a redes: (1) regulares; (2) pequeño mundo, (3) aleatorias.

colapso del caos estable, calculamos la cantidad $\langle \sigma \rangle$ como función de la probabilidad de recableado p , para diferentes valores de parámetros del sistema (3.11), tal como se muestra en la Figura 5.3. Nótese que existe un valor crítico de la probabilidad p por encima del cual el sistema alcanza un estado sincronizado, para el cual $\langle \sigma \rangle \rightarrow 0$. Este estado sincronizado corresponde a la órbita superestable de período tres del mapa local (3.10) Luego, la presencia de un número suficiente de conexiones de largo alcance, asociadas con un aumento de p en la red, contribuye al colapso del caos colectivo estable en este sistema. Para el caso ilustrado en la Figura 5.3, se encuentra que este valor crítico de probabilidad es $p_c = 0,22$ considerando el tamaño del sistema $N = 10^4$ y de la intensidad de su acoplamiento que en esta situación corresponde a $\epsilon = 0,384$. Tomando como referencia la Figura 5.2 vemos que este valor de $p_c = 0,22$ se asocia a una red de tipo aleatorio.

La Figura 5.4 presenta una visualización de los patrones espaciotemporales en el sistema (3.11) con $k = 10$, correspondientes al estado de caos colectivo estable (panel izquierdo con $p = 0,1$ y $\epsilon = 0,1$) y al estado sincronizado de período tres (panel derecho siendo sus valores de parámetros $p = 0$ y $\epsilon = 0,77$). Son mostradas en cada figura las iteraciones desde el instante inicial $t = 0$ hasta $t = 10000$. Obsérvese en el panel derecho la rápida convergencia del sistema hacia el estado sincronizado periódico.

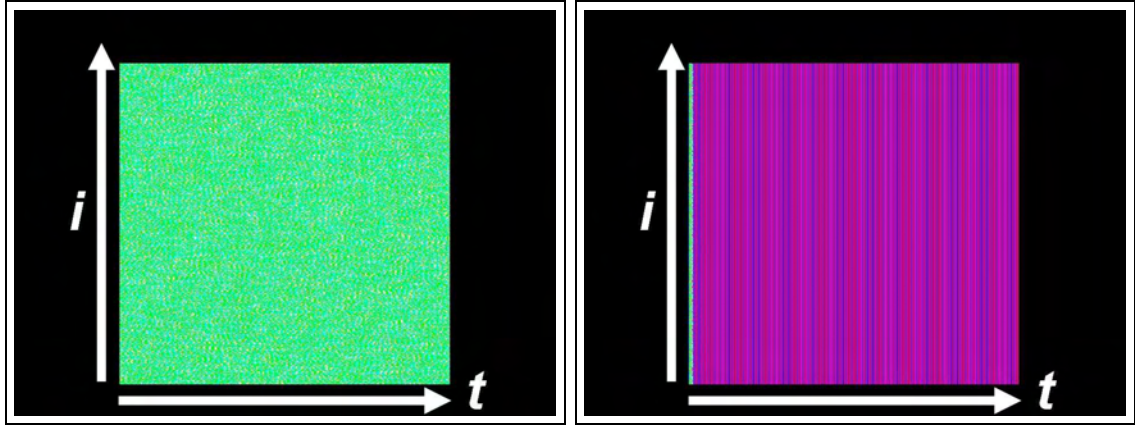


Figura 5.4: Visualización de patrones espaciotemporales asintóticos en el sistema (3.11) con $k = 10$ y $N = 10^4$. El eje vertical representa los estados x_t^i de los mapas (sin orden espacial) y el eje horizontal corresponde al tiempo. El código de colores se ha calibrado con respecto a los valores de la órbita superestable de período tres del mapa (3.10) y se ha utilizado el entorno gráfico PGPLOT. Panel izquierdo: caos estable; $p = 0,1$, $\epsilon = 0,1$. Panel derecho: estado sincronizado de período tres; $p = 0$, $\epsilon = 0,77$.

Los resultados de la exploración del sistema (3.11) para el caso $k = 10$ en el espacio de parámetros (p, ϵ) son mostrados en la Figura 5.5. Han sido seleccionados para construir esta figura 61 valores de acoplamiento $\epsilon \in (0, 1]$ y 101 valores de probabilidad de reconexión $p \in [0, 1]$ y se calculó $\langle \sigma \rangle$ como el promedio de 10^2 valores de σ_t luego de haber descartado 3×10^4 transientes, y fueron llevadas a cabo cien realizaciones con condiciones iniciales diferentes. Se ha calculado también de manera similar los espacios de parámetros (p, ϵ) para valores del número promedio de elementos conectados k a un elemento i del sistema (3.11), siendo estos valores $k = \{12, 14, 16, 18, 20\}$. La forma de las gráficas obtenidas son cualitativamente similares a la Figura 5.5, para cuyos casos fueron empleados 20 valores de acoplamiento $\epsilon \in (0, 1]$ y 101 valores de probabilidad de reconexión $p \in [0, 1]$. Debido al menor coste en tiempo de cómputo invertido, se investigó en mayor detalle el caso $k = 10$, e ilustraremos en la Figura 5.6 en donde se grafica $\langle \sigma \rangle$ como función de la probabilidad de recableado p , que ciertamente ocurren comportamientos similares en otros valores de k . En la Figura 5.6(a) se muestra el caso para $k = 14$ y $\epsilon = 0,40$, en cambio se muestra en la Figura 5.6(b) el comportamiento del sistema para $k = 16$ y $\epsilon = 0,65$. En ambos casos, el tamaño del sistema es $N = 10^4$.

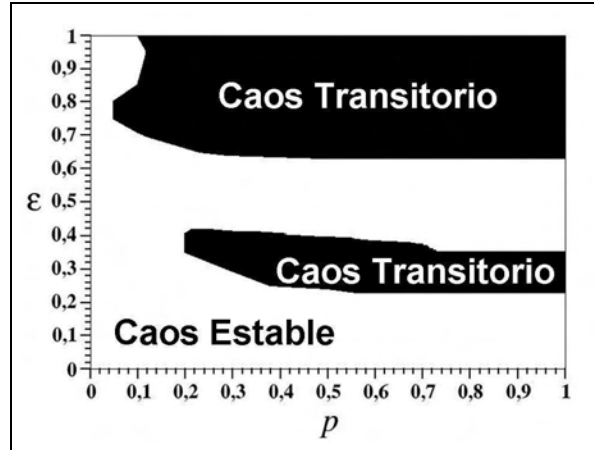


Figura 5.5: Diagrama de fase sobre el plano (p, ϵ) para los estados sincronizados del sistema indicado por la ecuación (3.11) para un valor fijo de $k = 10$. Las regiones sombreadas indican en donde se ha alcanzado el estado sincronizado de período tres (caos transitorio), las regiones en blanco corresponden a comportamientos asociados a caos estable para el valor de tiempo empleado en ésta gráfica.

Ahora tomando en cuenta un valor de probabilidad de reconexión p que este ubicado en una región cuya topología este asociada a una red aleatoria, consideraremos el efecto de aumentar el valor del número promedio de elementos conectados k , el cual es mostrado en la Figura 5.7 en donde se ha calculado $\langle \sigma \rangle$ en función de k para el valor fijo de $p = 0,71$ y $\epsilon = 0,60$. Se puede apreciar que efectivamente al aumentar el número de conexiones no locales, el sistema es conducido desde un régimen de caos estable ($k = 10$) hacia el estado sincronizado ($\langle \sigma \rangle = 0$) de período tres, siendo en este caso el valor crítico de k , $k_c = 20$. En este caso, vemos como la topología juega un rol fundamental, ya que para este caso de red aleatoria se requiere tener un promedio de $k = 20$ elementos conectados por cada elemento i en claro contraste con el caso de una red regular unidimensional en donde se requiere un valor de $k = 298$ elementos conectados en cada elemento i (véase la Figura 5.8).

A la vista de los resultados presentados en este Capítulo, se interpreta que para los valores seleccionados de los parámetros a , b , y c en el mapa local (3.10), y empleando el análisis de estabilidad lineal para obtener la condición de estabilidad en la órbita sincronizada (ver Apéndice A) de período tres en el sistema (3.11) con cualquier valor de k , viene dado por

$$\left| \left(1 - \epsilon + \frac{\epsilon}{N} \mu_j \right) e^\lambda \right| < 1, \quad (5.9)$$

siendo μ_j los autovalores asociados a la matriz de acoplamiento \mathbf{M} del sistema (3.11). Para el caso particular que estamos investigando, una órbita superestable de período

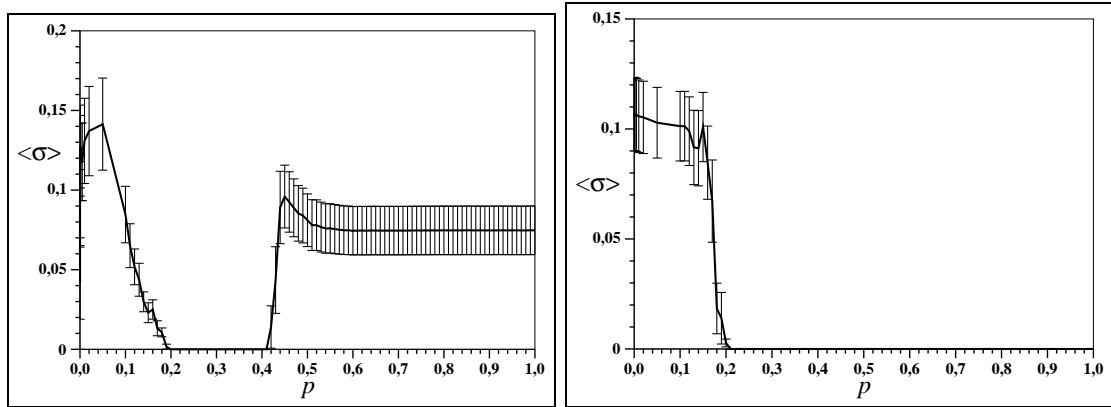


Figura 5.6: $\langle \sigma \rangle$ como función de la probabilidad de recableado p , para diferentes valores de los parámetros del sistema indicado por la ecuación (3.11) con $N = 10^4$. Se ha calculado $\langle \sigma \rangle$ como el promedio de 10^2 valores de σ_t luego de haber descartado 3×10^4 transientes, y han sido llevadas a cabo 100 realizaciones de valores diferentes en las condiciones iniciales para cada valor de p . (a) $k = 14$, $\epsilon = 0,40$; (b) $k = 16$, $\epsilon = 0,65$.

tres, lo cual implica que su exponente de Lyapunov es $\lambda \rightarrow -\infty$, y en consecuencia la ecuación (5.9) es satisfecha siempre, independientemente de la topología empleada, eso sí, bajo la **condición de superestabilidad** de la órbita periódica asociada a la dinámica local. Esto implica que las regiones de caos estable definidas en la Figura 5.5 convergerán hacia el atractor periódico estable de período tres, una vez finalizado su comportamiento supertransitorio. Hemos hecho algunos cálculos al respecto, en donde podemos señalar que para un sistema de 10 elementos, se precisa en promedio del orden de 10^{10} iteraciones. De esta manera, se tiene evidencia del rol crucial de la topología de conectividad de la red sobre el colapso del caos estable en sistemas espaciotemporales. La presencia de interacciones en el sistema tipo red de pequeño mundo o red aleatoria parece ser un factor determinante de este proceso. Estos efectos han sido reportados por González-Estévez y Cosenza [88, 89].

El resultado del régimen supertransitorio es muy interesante, en la medida en que el comportamiento transitorio, que habitualmente es considerado irrelevante, es estadísticamente estacionario. En otras circunstancias, el transitorio es un régimen en el que no observamos estacionariedad de ninguna clase, dado que se supone que el sistema converge hacia el comportamiento realmente estacionario, caracterizado finalmente por un atractor. En este caso, sin embargo, el transitorio es estadísticamente estable y, a menos que dispusiéramos de un conocimiento muy detallado del sistema (como por ejemplo, el espectro completo de exponentes de Lyapunov) no podríamos

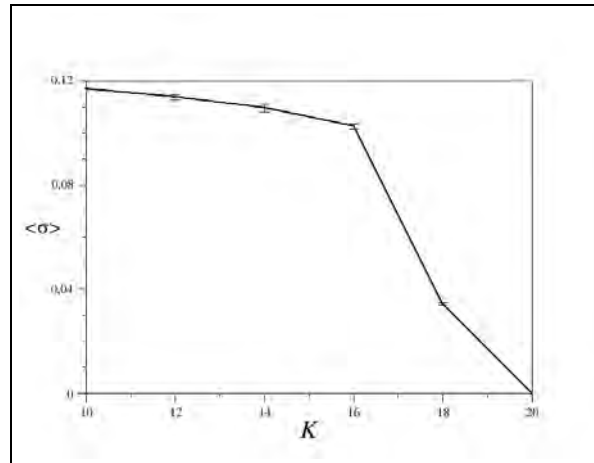


Figura 5.7: $\langle \sigma \rangle$ en función de k para el valor fijo de $p = 0,71$ y $\epsilon = 0,60$ (red aleatoria). La cantidad $\langle \sigma \rangle$ fue calculada sobre el promedio de 10^2 valores de σ_t luego de haber descartado 3×10^4 transientes, y fueron llevadas a cabo 100 realizaciones de condiciones iniciales diferentes para cada valor de k

distinguirlo de un comportamiento caótico típico. Por este motivo, hablamos de supertransitorios, que serán, para un sistema incluso moderadamente pequeño, el único comportamiento realmente observable.

5.3. Influencia del tamaño de la vecindad en el colapso del caos estable.

Tomando como referencia el caso previamente estudiado con acoplamiento global, seguidamente analizaremos el efecto de incrementar el tamaño de la vecindad entorno a un elemento i y para ello se empleará una red regular unidimensional con condiciones de contorno periódicas, en donde cada elemento i estará conectado con un número k de vecinos que será incrementado progresivamente.

En la Figura 5.8 se muestra el resultado del cálculo de $\langle \sigma \rangle$ promediado para cien realizaciones de diferentes condiciones iniciales en función de la interacción entre los elementos acoplados k , en donde hemos explorado valores de $k = 2$ (vecinos más cercanos) hasta $k = 60$, y en donde efectivamente se aprecia el rol que juegan las conexiones no locales.

A continuación se estimará el valor crítico de k , es decir, k_c bajo el cual el sistema colapsa hacia su atractor periódico estable de período tres, empleando para ello los

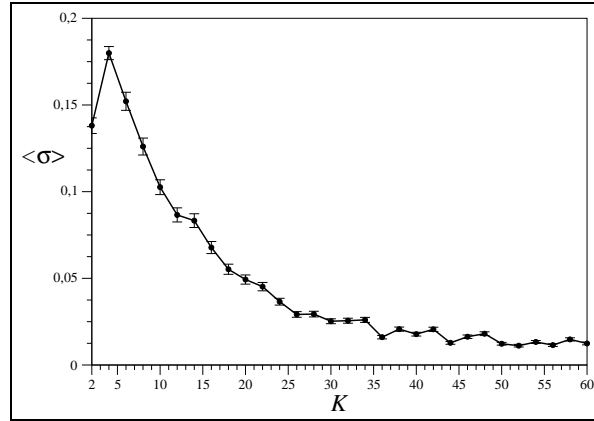


Figura 5.8: Influencia del tamaño de la vecindad para una red regular unidimensional con acoplamiento $\epsilon = 0,20$ y cuyo tamaño es $N = 10^4$.

datos de la Figura 5.8, y efectuando un ajuste del tipo exponencial (ya que es el mejor ajuste que aproxima el comportamiento), obtenemos

$$\langle \sigma(k) \rangle = 0,14357 + \exp \{-0,047732k\}, \quad (5.10)$$

y de esta expresión (5.10) se obtiene que son requeridos $k_c = 298$ elementos acoplados en cada elemento i para lograr la sincronización en esta topología (dentro de la precisión de $\langle \sigma \rangle = 10^{-7}$). Considerando que el tamaño del sistema corresponde a $N = 10^4$ elementos, la fracción mínima correspondiente de elementos para que se de dicha condición en el caso de una red regular unidimensional es $f = k_c/N = 0,0298$ que representa el 2,98 % de los elementos acoplados en el sistema.

Resultados preliminares obtenidos con este modelo muestran que el colapso del caos estable puede ser inducido mediante conexiones no locales. Este resultado sugiere que la persistencia del caos espaciotemporal colectivo puede ser un fenómeno asociado a la geometría del sustrato espacial del sistema y, por lo tanto, podría ser controlado en situaciones prácticas.

*“Creo para comprender,
y comprendo para creer mejor.”
San Agustín.*

Conclusiones

En esta Tesis hemos investigado el surgimiento de comportamientos colectivos estadísticos y dinámicos no triviales en sistemas espaciotemporales mediante modelos de mapas acoplados con ingredientes mínimos. En ambos modelos propuestos, estas propiedades macroscópicas no están presentes en los elementos locales, sino que emergen a partir de las interacciones entre ellos.

Hemos propuesto un modelo determinista, local y homogéneo con acoplamiento no aditivo, conceptualmente simple y con ingredientes mínimos, para explicar distribuciones de probabilidad no Gaussianas que se observan en muchos sistemas fuera de equilibrio. Este modelo consiste en un sistema dinámico espaciotemporal descrito por una red de mapas acoplados en una y dos dimensiones con interacción entre sus vecinos más inmediatos. En particular, el modelo permite capturar la fenomenología básica de interacciones económicas y conduce de un modo natural a las distribuciones de riqueza observadas en sociedades reales.

En contraste con la mayoría de modelos de mapas acoplados generalmente usados, donde el acoplamiento es de tipo difusivo (aditivo), el modelo aquí propuesto posee un acoplamiento no aditivo y exponencial.

Los modelos previos asumen aleatoriedad y heterogeneidad en los agentes económicos para producir distribuciones de probabilidad, ya sea tipo leyes de potencia o distribuciones exponenciales. Para producir una u otra distribución, esos modelos requieren cambios drásticos y estructurales, hasta el punto de convertirse en diferentes modelos para cada tipo de distribución. En cambio, en nuestro modelo las interacciones locales (la “microeconomía”) determinan completamente las características macroscópicas del sistema; es decir, la macroeconomía constituye un comportamiento colectivo emergente. Como consecuencia, fenómenos como la desigualdad en la distribución de riqueza en el sistema surgen como resultado de procesos dinámicos que

tienen lugar a nivel local. Los comportamientos tipo Pareto o Boltzmann-Gibbs en nuestro modelo se obtienen mediante un cambio suave de los parámetros del sistema, sin requerir modificaciones estructurales ni hipótesis adicionales.

Nuestros resultados sugieren que en sistemas de agentes económicos interactivos se pueden conseguir distintas regiones de parámetros en las cuales la distribución de riqueza manifiesta comportamientos tipo exponencial (BG) o leyes de potencia (Pareto), los cuales han sido observados en sistemas económicos reales. Por otro lado, se evidencia el rol que juega la conectividad de cada agente con su entorno en el surgimiento de comportamientos colectivos en el sistema.

Entre las futuras extensiones de este modelo está la posibilidad de modificar la regla de acoplamiento entre los mapas para encontrar los dos tipos de distribución de riqueza coexistiendo para los mismos valores de parámetros, con una distribución exponencial BG para los agentes con ingresos bajos y medios, y una distribución de Pareto para aquellos con ingresos altos, tal como se observa en datos económicos reales [90].

Por otro lado, hemos estudiado un comportamiento colectivo dinámico no trivial de mucha relevancia en sistemas espaciotemporales, como es el caos colectivo estable. Para este fin, hemos empleado un modelo de mapas acoplados donde la dinámica local es individualmente periódica, pero que produce el fenómeno de caos estable debido a las interacciones de los elementos. En particular, hemos investigado la influencia de la topología de conectividad de la red en la persistencia de caos estable.

La naturaleza transiente del caos colectivo observado en el sistema (3.11) implica que eventualmente el comportamiento de caos estable observado para ciertos rangos de parámetros en las figuras anteriores convergerá hacia el atractor periódico estable de período tres del mapa local (3.10). Sin embargo, el régimen de caos colectivo estable es, efectivamente, supertransitorio; es decir, que el tiempo de convergencia hacia el estado sincronizado de período tres aumenta exponencialmente con el tamaño del sistema. En tal sentido, hemos verificado que, aun para un sistema pequeño de $N = 10$ mapas, se requiere del orden de 10^{10} iteraciones para que el sistema alcance a su estado sincronizado de período tres. Luego, el caos colectivo es el estado efectivamente observable en la práctica en esos rangos de parámetros.

El régimen transitorio es estadísticamente estable y no podemos distinguirlo de un comportamiento caótico típico. Por este motivo los estados supertransitorios son, incluso para un sistema moderadamente pequeño, el único comportamiento realmente observable. La existencia de un régimen supertransitorio es interesante en la medida

en que este comportamiento, que habitualmente es considerado irrelevante, es estadísticamente estacionario.

Notablemente, las Figuras 5.3 y 5.4 muestran que el sistema puede alcanzar el estado sincronizado de período tres cuando se cambia la topología de la red. Nuestros resultados evidencian el rol fundamental de la topología de conectividad de la red para el colapso del caos estable en sistemas espaciotemporales. La presencia de interacciones de largo alcance entre los elementos del sistema, inducidas por la probabilidad de recableado p , facilitan la transmisión de información y la posibilidad de sincronización en redes de pequeño mundo y en redes aleatorias.

Hemos encontrado que la persistencia del caos estable en sistemas espaciotemporales depende sustancialmente de propiedades topológicas del sustrato espacial y, por lo tanto, no son propiedades estructuralmente robustas.

Nuestros resultados contribuyen a la sustentación del punto de vista constructivista en el modelado de los sistemas complejos en el sentido que los comportamientos colectivos resultan de la competencia e interacción entre propiedades dinámicas y propiedades topológicas de esos sistemas. Específicamente comportamientos colectivos (tales como sincronización, formación de patrones, procesamiento de información, comportamientos colectivos no triviales, caos estable) observados genéricamente en muchos sistemas complejos pueden ser modulados o controlados mediante cambios en sus propiedades geométricas.

“Uno no es lo que es por lo que escribe,
sino por lo que ha leído.”
Jorge Luis Borges

Referencias

- [1] K. Kaneko and I. Tsuda. Complex systems: Chaos and beyond. *Springer*, 2000.
- [2] N. Boccarda. Modeling complex systems. *Cambridge University Press*, 2004.
- [3] H. Schuster. Complex adaptive systems. *Scator-Verlag*, 2002.
- [4] R. Solé y S. Manrubia. Orden y caos en sistemas complejos. *Edicions de la Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, España*, 2001.
- [5] M. Newman, A. Barabási, and D. J. Watts. The structure and dynamics of networks. *Princeton University Press*, 2006.
- [6] A. Barabasi. Linked: The new science of networks. *Perseus Publishing Co.*, 2002.
- [7] S. Manrubia, A. Mikhailov, and D. Zanette. Emergence of dynamical order. *World Scientific, Singapore*, 2004.
- [8] K. Kaneko. Supertransients, spatiotemporal intermittency, and stability of fully developed spatiotemporal chaos. *Phys. Lett. A*, **149**:105–112, 1990.
- [9] A. Politi, R. Livi, G.-L. Oppo, and R. Kapral. Unpredictable behavior in stable systems. *Europhys. Lett.*, **22**:571–576, 1993.
- [10] K. Kaneko. Coupled map lattices, focus issue of. *Chaos (K. Kaneko, Ed.)*, **2**:279–407, 1992.
- [11] M. E. J. Newman. Power laws, Pareto distributions and Zipf’s law. *Contemporary Physics*, 46(5):323–351, 2005.
- [12] B. Gutenberg and R. F. Richter. Frequency of earthquakes in california. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **34**:185–188, 1944.

- [13] G. Neukum and B. A. Ivanov. Crater size distributions and impact probabilities on earth from lunar, terrestrial planet and asteroid cratering data. *In T. Gehrels (ed.), Hazards Due to Comets and Asteroids. University of Arizona Press, Tucson, AZ*, page 359416, 1994.
- [14] E. T. Lu and R. J. Hamilton. Avalanches of the distribution of solar flares. *Ap. J.*, **380**:8992, 1991.
- [15] M. E. Crovella and A. Bestavros. Self-similarity in world wide web traffic: Evidence and possible causes. *En B. E. Gaither y D. A. Reed (Eds.), Proceedings of the 1996 ACM SIGMETRICS Conference on Measurement and Modeling of Computer Systems, Association of Computing Machinery, New York*, page 148159, 1996.
- [16] D. C. Roberts and D. L. Turcotte. Fractality and self-organized criticality of wars. *Fractals*, **6**:351–357, 1998.
- [17] G. K. Zipf. Human behaviour and the principle of least effort. *Addison-Wesley, Reading, MA*, 1949.
- [18] J. B. Estoup. Gammes stenographiques. *Institut Stenographique de France, Paris*, 1916.
- [19] D. H. Zanette and S. C. Manrubia. Vertical transmission of culture and the distribution of family names. *Physica A*, **295**:1–8, 2001.
- [20] A. J. Lotka. The frequency distribution of scientific production. *J. Wash. Acad. Sci.*, **16**:317–323, 1926.
- [21] D. J. de S. Price. Networks of scientific papers. *Science*, **149**:510515, 1965.
- [22] L. A. Adamic and B. A. Huberman. The nature of markets in the world wide web. *Quarterly Journal of Electronic Commerce*, **1**:512, 2000.
- [23] R. A. K. Cox, J. M. Felton, and K. C. Chung. The concentration of commercial success in popular music: an analysis of the distribution of gold records. *Journal of Cultural Economics*, **19**:333–340, 1995.
- [24] R. Kohli and R. Sah. Market shares: Some power law results and observations. *Working Paper Series: 04.01, The Harris School of Public Policy, University of Chicago*, January 2004.
- [25] J. C. Willis and G. U. Yule. Some statistics of evolution and geographical distribution in plants and animals, and their significance. *Nature*, **109**:177–179, 1922.

- [26] V. Pareto. Cours d'économie politique. *F. Pichou, Lausanne*, **2**, 1897.
- [27] M. Levy and S. Solomon. New evidence for the power-law distribution of wealth. *Physica A*, **242**:90–94, 1997.
- [28] Y. Fujiwara, W. Souma, H. Aoyama, T. Kaizoji, and M. Aoki. Growth and fluctuations of personal income. *Physica A*, **321**:598–604, 2003.
- [29] C. Castaldi and M. Milakovic. Turnover activity in wealth portfolios. *Journal of Economic Behavior and Organization*, **63**(3):537–552, 2007.
- [30] V. Yakovenko and C. Silva. Two-class structure of income distribution in the U.S.A.: Exponential bulk and power-law tail. *Econophysics of Wealth Distribution, Springer: Berlin (Chatterjee, A., S. Yarlagadda, and B. Chakraborti, Editors)*, 2005.
- [31] D. G. Champernowne. A model of income distribution. *The Economic Journal*, **63**:318–351, 1953.
- [32] P. Whittle and H. O. A. Wold. A model explaining the Pareto distribution of wealth. *Econometrica*, **25**:591–595, 1957.
- [33] B. Mandelbrot. Stable Paretian random functions and the multiplicative variation of income. *Econometrica*, **29**(4):517–543, 1961.
- [34] J. Steindl. Random processes and the growth of firms: A study of the Pareto law. *Griffin: London.*, 1965.
- [35] J.-P. Bouchaud and M. Mézard. Wealth condensation in a simple model of economy. *Physica A*, **282**:536–545, 2000.
- [36] A. A. Dragulescu and V. M. Yakovenko. Statistical mechanics of money. *Eur. Phys. J. B*, **17**:723–729, 2000.
- [37] A. Chakraborti and B. K. Chakraborti. Statistical mechanics of money: How saving propensity affects its distribution. *Eur. Phys. J. B*, **17**:167–170, 2000.
- [38] M. Buchanan. Wealth happens. *Harvard Business Review*, pages 49–54, April 2002.
- [39] B. Hayes. Follow the money. *American Scientist*, **90**:400–405, 2002.
- [40] J. Angle. The surplus theory of social stratification and the size distribution of personal wealth. *Social Forces*, **65**(2):293–326, 1986.

- [41] J. Angle. Deviring the size distribution of personal wealth from 'The rich get richer, the poor get poorer'. *Journal of Mathematical Sociology*, **18**:27–46, 1993.
- [42] J. Angle. How the gamma law of income distribution appears invariant under aggregation. *Journal of Mathematical Sociology*, **31**:325–358, 1996.
- [43] J. Angle. The inequality process as a wealth maximizing process. *Physica A*, **367**:388–414, 2006.
- [44] A. Chatterjee, B. Chakrabarti, and S. S. Manna. Money in gas-like markets: Gibbs and Pareto laws. *Physica Scripta*, **106**:36–38, 2003.
- [45] S. Sinha. The rich are different!: Pareto law from asymmetric interactions in asset exchange models. *Econophysics of Wealth Distribution: Econophys-Kolkata, Springer: Milan (A. Chatterjee et al. Editors)*, pages 177–183, 2005.
- [46] T. Lux and S. Schornstein. Genetic algorithms as an explanation of stylized facts of foreign exchange markets. *Journal of Mathematical Economics*, **41**:169–196, 2005.
- [47] P. M. Anglin. Econophysics of wealth distribution: a comment. *Econophysics of Wealth Distribution: Econophys-Kolkata, Springer: Milan (A. Chatterjee et al. Editors)*, pages 229–238, 2005.
- [48] J. Silver, E. Slud, and K. Takamoto. Statistical equilibrium wealth distributions in an exchange economy with stochastic preferences. *Journal of Economic Theory*, **106**(2):417–435, 2002.
- [49] P. Krusell and A. Smith Jr. Income and wealth heterogeneity in the macroeconomy. *Journal of Political Economy*, **106**:867–896, 1998.
- [50] M. Huggett. Wealth distribution in life-cycle economies. *Journal of Monetary Economics*, **38**(3):469–494, 1996.
- [51] A. Castañeda, J. Díaz-Giménez, and J.-V. Ríos-Rull. Accounting for the US earnings and wealth inequality. *The Journal of Political Economy*, **111**(4):818–857, 2003.
- [52] K. Kaneko. Globally coupled chaos violates law of large numbers. *Phys. Rev. Lett.*, **65**:1391–1394, 1990.
- [53] K. Kaneko. Relevance of clustering to biological networks. *Physica D*, **75**:55–73, 1994.

- [54] H. Chaté and P. Manneville. Emergence of effective low-dimensional dynamics in the macroscopic behaviour of coupled map lattices. *Europhys. Lett.*, **17**:291–296, 1992.
- [55] M. G. Cosenza and J. González. Synchronization and collective behavior in globally coupled logarithmic maps. *Prog. Theor. Phys.*, **100**:21–38, 1998.
- [56] R. Kapral, R. Livi, G.-L. Oppo, and A. Politi. Dynamics of complex interfaces. *Phys. Rev. E*, **49**:2009–2022, 1994.
- [57] R. Kapral, R. Livi, G.-L. Oppo, and A. Politi. Critical behavior of complex interfaces. *Phys. Rev. Lett.*, **79**:2277–2280, 1997.
- [58] R. Wackerbauer and K. Showalter. Collapse of spatiotemporal chaos. *Phys. Rev. Lett.*, **91**:174103, 2003.
- [59] J. P. Crutchfield and K. Kaneko. Are attractors relevant to turbulence? *Phys. Rev. Lett.*, **60**:2715–2718, 1988.
- [60] F. Cecconi, R. Livi, and A. Politi. Fuzzy transition region in a one-dimensional coupled-stable-map lattice. *Phys. Rev. E*, **57**:2703–2712, 1998.
- [61] F. Bagnoli and F. Cecconi. Synchronization of non-chaotic dynamical systems. *Phys. Lett A*, **282**:9–17, 2001.
- [62] R. Wackerbauer and S. Kobayashi. Noise can delay and advance the collapse of spatiotemporal chaos. *Phys. Rev. E*, **75**:066209, 2007.
- [63] R. Wackerbauer. Master stability analysis in transient spatiotemporal chaos. *Phys. Rev. E*, **76**:056207, 2007.
- [64] S. Yonker and R. Wackerbauer. Nonlocal coupling can prevent the collapse of spatiotemporal chaos. *Phys. Rev. E*, **73**:026218, 2006.
- [65] D. J. Watts and S. H. Strogatz. Collective dynamics of “small-world” networks. *Nature*, **393**:440–442, 1998.
- [66] C. Grebogi, E. Ott, and J. A. Yorke. Crises, sudden changes in chaotic attractors, and transient chaos. *Physica D*, **7**:181–200, 1983.
- [67] T. Tel. Transient chaos. In: *H. Bai-Lin, H. (Ed.) Directions in Chaos III*, pages 149–211, 1990.
- [68] WMAP. Mission results. <http://map.gsfc.nasa.gov/news/index.html>, 2008.

- [69] R. Bonaccini and A. Politi. Chaotic-like behaviour in chains of stable nonlinear oscillators. *Physica D*, **103**:362–368, 1997.
- [70] R. N. Mantegna and H. E. Stanley. An introduction to econophysics. *Cambridge Univ. Press*, 2000.
- [71] A. A. Dragulescu and V. M. Yakovenko. Exponential and power-law probability distributions of wealth and income in the United Kingdom and the United States. *Physica A*, **299**:213–221, 2001.
- [72] A. A. Dragulescu and V. M. Yakovenko. Evidence for the exponential distribution of income in the USA. *Eur. Phys. J. B*, **20**:585–589, 2001.
- [73] B. K. Chakrabarti, A. Chakraborti, and A. Chatterjee. Econophysics and Sociophysics. *Wiley-VCH, Berlín*, 2006.
- [74] J.-P. Bouchaud and M. Potters. Theory of financial risk. *Cambridge Univ. Press*, 2000.
- [75] R. López-Ruiz, J. Sañudo, and X. Calbet. Geometrical derivation of the Boltzmann factor. *Am. J. Phys.*, **76**:780–781, 2008.
- [76] A. Chatterjee, B. Chakrabarti, and S. S. Manna. Pareto law in a kinetic model of market with random saving propensity. *Physica A*, **335**:155–163, 2004.
- [77] J. R. Sánchez, J. González-Estévez, R. López-Ruiz, and M. G. Cosenza. A model of coupled maps for economic dynamics. *Eur. Phys. J. Special Topics*, **143**:241–243, 2007.
- [78] J. González-Estévez, M. G. Cosenza, R. López-Ruiz, and J. R. Sánchez. Pareto and Boltzmann-Gibbs behaviors in a deterministic multi-agent system. *Physica A*, **387**:4637–4642, 2008.
- [79] R. López-Ruiz, J. González-Estévez, M. G. Cosenza, and J. R. Sánchez. An economic model of coupled exponential maps. *Proceedings of the NOMA'07 Conference*, pages 54–56, 2007.
- [80] W. J. Reed. The Pareto, Zipf and other power laws. *Econ. Lett.*, **74**:15–19, 2001.
- [81] W. Souma. Universal structure of the personal income distribution. *Fractals*, **9**:463–470, 2001.
- [82] M. Rodríguez-Achach and R. Huerta-Quintanilla. The distribution of wealth in the presence of altruism in simple economic models. *Physica A*, **361**:309–318, 2006.

- [83] J. González-Estévez, M. G. Cosenza, R. López-Ruiz y O. Alvarez Llamaza. Influencia de la topología en la distribución de riqueza en un modelo determinista de intercambio económico. *Revista Científica de la UNET*, (Enviado), 2008.
- [84] O. S. Klass, O. Biham, M. Levy, O. Malcai, and S. Solomon. The Forbes 400 and the Pareto wealth distribution. *Econ. Lett.*, **90**:290–295, 2006.
- [85] O. S. Klass, O. Biham, M. Levy, O. Malcai, and S. Solomon. The Forbes 400, the Pareto power-law and efficient markets. *Eur. Phys. J. B*, **55**:143–147, 2007.
- [86] W. Souma. Physics of personal income. In: *Takayasu, H. (Ed.) Empirical Science of Financial Fluctuations: The Advent of Econophysics. Springer-Verlag, Tokyo*, pages 343–352, 2002.
- [87] J. Davidsen, H. Ebel, and S. Bornholdt. Emergence of a small world from local interactions: modeling acquaintance networks. *Phys. Rev. Lett.*, **88**:128701, 2002.
- [88] J. González-Estévez y M. G. Cosenza. Caos colectivo en redes de pequeño mundo. *Revista Científica de la UNET*, (Enviado), 2008.
- [89] J. González-Estévez and M. G. Cosenza. Network topology an collapse of stable chaos. *Preprint*, 2008.
- [90] V. M. Yakovenko. Econophysics, statistical mechanics approach to. *arXiv: 0709.3662v4*, 2008.

*“Para ver claro,
basta con cambiar la dirección de la mirada.”
Antoine de Saint-Exupery.*

Apéndice A

Publicaciones relacionadas con esta Tesis.

A model of coupled maps for economic dynamics

J.R. Sánchez¹, J. González-Estévez^{2,4}, R. López-Ruiz³, and M.G. Cosenza⁴

¹ Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Mar del Plata, Av. J.B. Justo 4302,
7600 Mar del Plata, Argentina

² Laboratorio de Física Aplicada y Computacional, Universidad Nacional Experimental del Táchira,
San Cristóbal, Venezuela
e-mail: jgonzale@unet.edu.ve

³ Facultad de Ciencias, DIIS and BIFI, Universidad de Zaragoza, 50009 Zaragoza, Spain

⁴ Centro de Física Fundamental, Universidad de Los Andes,
Mérida, Apartado Postal 26, Mérida 5251, Venezuela

Abstract. A deterministic system of coupled maps is proposed as a model for economic activity among interacting agents. The values of the maps represent the wealth of the agents. The dynamics of the system is controlled by two parameters. One parameter expresses the growth capacity of the agents and the other describes the local environmental pressure. For some values of the parameters, the system exhibits nontrivial collective behavior, characterized by macroscopic periodic oscillations of the average wealth of the system, emerging out of local chaos. The probability distribution of wealth in the asymptotic regime shows a power law behavior for some ranges of parameters.

The study of wealth distribution in western societies has been a focus of much attention in the emerging area of research of Econophysics. A power law behavior is found in many economic activities, for instance, in income distributions. Typically, high income earners, amounting to a few percent of the population, are distributed following a Pareto-like distribution. [1–5]. Hence, inequality in the wealth distribution is a fact in most economic activities. The origin of such behavior seems to be caused by the interaction of the macro with the microeconomy. Here we propose a simple deterministic spatiotemporal model for economic dynamics where inequality emerges as a result of the dynamical processes taking place only at the microscopic scale. That is, the microeconomy fully determines the macroeconomic characteristics of the system.

The model [6] consists of N interacting agents representing companies, countries or other economic entities, placed as nodes on a network. For simplicity, we shall assume that the agents are distributed on a one-dimensional lattice with periodic boundary conditions. The state of an agent i , $i = 1 \dots N$, is characterized by a real variable $x_t(i) \in [0, \infty]$ denoting its wealth or richness at the discrete time t . The system evolves in time synchronously. Each agent updates its state $x_t(i)$ according to its present state and the states of its nearest neighbors. Thus, in a first approach, we propose that the value of $x_{t+1}(i)$ is given by the product of two terms; the *natural growth* of agent i given by $r(i)x_t(i)$ with positive local ratio $r(i)$, and a *control term* that limits this growth with respect to the local field

$$\Psi_t(i) = \frac{1}{2} [x_t(i-1) + x_t(i+1)], \quad (0.1)$$

through a negative exponential with parameter $a(i)$,

$$x_{t+1}(i) = r(i) x_t(i) \exp(- |x_t(i) - a(i)\Psi_t(i)|). \quad (0.2)$$

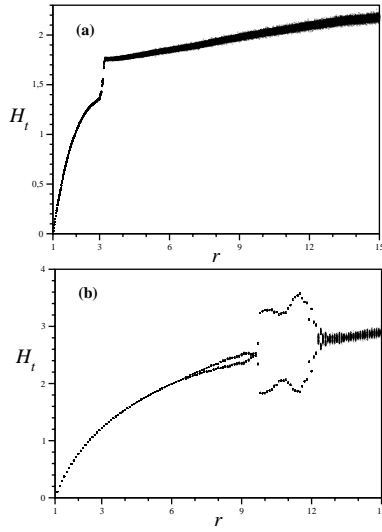


Fig. 1. H_t as a function of r , for two values of a . For each value of r , H_t is plotted for 100 iterations, after discarding 9900 transients. System size $N = 10^4$. (a) $a = 0.67$. (b) $a = 0.1$.

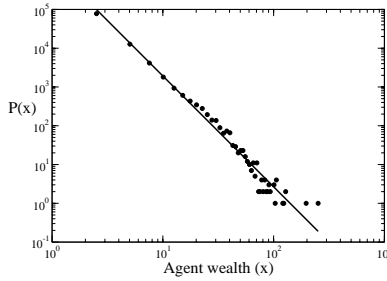


Fig. 2. Log-log plot of the asymptotic probability distribution of wealth $P(x)$ vs. agent wealth x . The distribution $P(x)$ is calculated averaging the outcomes at $t = 10^4$ of 100 realizations of random initial conditions. Parameter values are $r = 12$, $a = 0.67$, $N = 10^4$. The slope obtained is $\alpha = -2.86$ with a correlation coefficient $\beta = 0.98$.

The parameter $r(i)$ represents the *capacity* of agent i to get richer and the parameter $a(i)$ describes the local *selection pressure* [7]. This means that the largest rate of growth for agent i is obtained when $x(i) \simeq a(i)\Psi_t(i)$, i.e., when the agent has reached some kind of adaptation to the local environment. In this paper we consider a homogeneous system with a uniform capacity r and a fixed selection pressure a for all the agents.

The simplest collective behavior of the one-dimensional coupled map system described by Eqs. (0.1) and (0.2) corresponds to the synchronized or spatially uniform state. This state satisfies $x_t(i) = x_t$ and $\Psi_t(i) = x_t$, $\forall i$, and its evolution is determined by the single map

$$x_{t+1} = rx_t \exp(-|(1-a)x_t|). \quad (0.3)$$

For $r < 1$ the synchronized dynamics Eq. (0.3) relaxes to the stable fixed point $x = 0$, while for $r > 1$ the synchronized system displays a sequence of bifurcations through different periodic and chaotic attractors, except for the singular case $a = 1$. For $r > 1$ the stable fixed point is $x = \log r / |1 - a|$. This point becomes unstable by a flip bifurcation at $r = e^2$. For increasing r , the entire period-doubling cascade characteristic of unimodal maps and other complex dynamical behaviors are generated by Eq. (0.3). However, it can be shown that such synchronized states are unstable. When a perturbation is introduced in the initial uniform state, the asymptotic dynamical state of the system is found to be more complex.

In general, the collective behavior of the system can be characterized through the instantaneous mean field of the network, defined as

$$H_t = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_t(j). \quad (0.4)$$

Figures 1(a) and 1(b) show a bifurcation diagram of H_t as a function of the parameter r , for two different values of the selection pressure a . In Fig. 1(a) it can be seen that H_t reaches stationary values with some intrinsic fluctuations due to the local chaotic dynamics. However, for some parameter values, nontrivial collective behavior [9] can arise in this system as shown in Fig. 1(b). In this case, a macroscopic variable such as the mean field or average wealth in the system follows a periodic behavior coexisting with chaos at the microscopic level.

The statistical properties of the system can be expressed in terms of the probability distribution of wealth among the agents. For some values of the parameters r and a , the distribution of wealth displays a power law behavior, as shown in Fig. 2. For the values of parameters chosen, the probability distribution scales as $P(x) \sim s^{-\alpha}$, with $\alpha = -2.86$, similarly to scaling behaviors of Pareto type directly obtained from actual economy data [8].

In summary, we have shown that a power law behavior in the probability distribution of wealth can arise for some values of parameters in a deterministic system of interacting economic agents, such as in the coupled map model considered here. In addition, nontrivial collective behavior, where macroscopic order coexists with local disorder, can emerge in this system.

This work was supported in part by Decanato de Investigación of Universidad Nacional Experimental del Táchira (UNET) and by FONACIT, Venezuela, under grants 04-001-2006 and F-2002000426, respectively. J.G.-E. thanks Decanato de Investigación and Vicerrectorado Académico of UNET for travel support to the Universidad de Zaragoza, Spain. R. L.-R. acknowledges some financial support from the spanish research project FIS2004-05073-C04-01.

References

1. V. Pareto, *Le Cours d'Économie Politique* (MacMillan, London, 1897)
2. M.O. Lorenz, *Pub. Amer. Stat. Assoc.* **9**, 209 (1905)
3. P.K. Rawlings, D. Reguera, H. Reiss, *Physica A* **343**, 643 (2004)
4. O.S. Klass, O. Biham, M. Levy, O. Malcai, S. Solomon, *Econ. Lett.* **90**, 290 (2006)
5. W.J. Reed, *arXiv:cond-mat/0412004 v3* (2006)
6. J.R. Sánchez, R. López-Ruiz, *arXiv:nlin.AO/0507054* (2005)
7. M. Ausloos, P. Clippe, A. Pekalski, *Physica A* **324**, 330 (2003)
8. L.A. Nunes-Amaral, S.V. Buldyrev, S. Havlin, H. Leschorn, P. Maass, M.A. Salinger, H.E. Stanley, M.H.R. Stanley, *J. Phys. I (France)* **7**, 621 (1997)
9. H. Chaté, P. Manneville, *Prog. Theor. Phys.* **87**, 1 (1992)