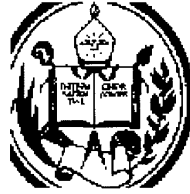


QB853.5
R4

DONACION



UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
Facultad de Ciencias. Postgrado en Física Fundamental
Mérida, Venezuela

ESTIMACIÓN DE LA EDAD DE CÚMULOS GLOBULARES A PARTIR DE DIAGRAMAS COLOR-MAGNITUD

SERBIULA
Tulio Febres Cordero

Tesis de Maestría presentada ante la ilustre Universidad de Los Andes por

Miriam Elina Rengel Lamus

como requisito parcial para optar al título de

Magister Scientiarum en Astronomía y Astrofísica

Realizado con la asesoría de

Dr. Gustavo Bruzual A.

Julio 2000

*Esta mañana, antes del alba, subí a una colina
para mirar el cielo poblado, y le dije a mi alma:
“cuando abarquemos esos mundos, y el conocimiento y
el goce que encierran, ¿estaremos al fin hartos y satisfechos?”
Y mi alma dijo: “No, una vez alcanzados esos mundos,
proseguiremos el camino”.*

Walt Whitman

*A mis padres,
siempre en lo alto de la torre.*

*A Dieter, quien camina por aquí,
intensamente.*

Agradecimientos

Expreso mi agradecimiento a todas aquellas personas que han contribuido académicamente al desarrollo de este trabajo, en especial:

a Gustavo Bruzual, por sugerirme el tema de esta Tesis. Su estímulo, dirección y sabios consejos contribuyeron a hacer de un proyecto esta realidad. A Gladis Magris, por sus útiles discusiones. A Juan Mateu, por su ayuda en los cálculos y por su interacción con mi trabajo. A Angel Bongiovanni, por su cuidadosa lectura de algunas secciones del manuscrito. A Carlos Abad, demás investigadores, estudiantes, personal técnico y administrativo del CIDA, por su ayuda en muchas ocasiones. A Xavier Hernandez, por sus oportunos comentarios e interés mostrado en la investigación. A Alfred Rosenberg, Francesca D'Antona e Ivan King, por proporcionarme los datos fotométricos de los Cúmulos Globulares observados. A Scilla Degl'Innocenti, por facilitarme la lectura de los archivos de las isocronas de Pisa .

Expreso mi agradecimiento a las siguientes instituciones:

Al Centro de Investigaciones de Astronomía (CIDA), lugar donde fue desarrollada esta tesis, por las facilidades computacionales y bibliográficas a las que tuve acceso. Al Postgrado en Física Fundamental de la Universidad de Los Andes, por su constante apoyo a lo largo de mis estudios de post-grado. Al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Tecnológicas (CONICIT), por su apoyo económico durante gran parte de mis estudios. A la Asociación Civil Crédito Educativo A.C., (EDUCREDITO), por su aporte financiero durante la primera etapa de mis estudios aquí.

También deseo expresar mi gratitud a aquellas personas que me han alentado y brindado su apoyo personal durante la realización de este proyecto y durante mi estadía en la ciudad de Mérida. Menciono especialmente a mis padres, diariamente recibí sus bendiciones. A Dieter Breitschwerdt, su continuo apoyo y aliento fueron invaluableles. A mi familia, en mención especial a mis Tías Aída Lamus y Carmen Elena Lamus de Guillén. El legado de esta fue mucho más que haberme brindado cobijo en el seno de su hogar, durante gran parte de la realización de este proyecto. A José Eleazar y a Klaus Engelhard, por los favores recibidos. A Ingrid Inciarte, demás compañeros de Post-grado y a todas aquellas personas que hicieron agradable mi estadía en Mérida. A los buenos amigos localizados en Caracas, Alemania y otros lugares de nuestro inmenso hogar, sus palmadas cruzaron fronteras.

Reconocimiento y gratitud a todas aquellas personas que de una u otra forma han colaborado directa o indirectamente en la ilustración y realización de esta tesis.

Resumen

La estimación de la edad de los Cúmulos Globulares está sujeta a un gran número de incertidumbres. Este trabajo engloba nuestra contribución a los esfuerzos en el desarrollo de técnicas más precisas al problema de la estimación de la edad de estos viejos sistemas estelares. Proponemos un método para estimar la edad de Cúmulos Globulares mediante la implementación de un novedoso estimador denominado W , introducido por Saha 1998, en relación con el problema del ajuste de isocronas. Presentamos los resultados obtenidos de la aplicación de tal método en la estimación de la edad de los Cúmulos Globulares NGC 6397, M92 y M3, y determinamos cuál isocrona, entre diferentes isocronas originadas a partir de diferentes modelos de evolución estelar, proporciona el mejor ajuste al Diagrama Color-Magnitud del Cúmulo Globular en cuestión.

Particularmente, implementamos el método mencionado a dos poblaciones estelares de diferente número de estrellas, por Cúmulo Globular, y consideramos tres diferentes modelos de evolución estelar de distintos contenidos metálicos. Por medio de W medimos el grado de verosimilitud entre una población y un modelo de evolución. Cuantificamos cuál de los modelos describe mejor las observaciones, tanto por medio de W como por la prueba χ^2 , y determinamos el intervalo de confianza en el que el mejor valor estimado de la edad tiene oportunidad de pertenecer, a un específico coeficiente de confianza.

Los resultados obtenidos en la presente investigación están resumidos en la tabla 3.1. Nuestro análisis estadístico arrojó que la distribución de la población de 373 estrellas de NGC 6397 se apegó mejor a la isocrona de Yale de 14.00 Gaños, comparada con la mejor estimación de la edad considerando las isocronas

de Padua y de Pisa, al igual que la población de 1187 estrellas, cuya población se apegó mejor a la isocrona de Yale de 14.00 Gaños, comparada con las isocronas de Padua . Por otro lado, para las 1482 estrellas que constituyen la población estelar de M92, tal distribución se apegó mejor a la isocrona de Padua de 15.00 Gaños, comparada con las isocronas de Yale y de Pisa, mientras que la muestra de 4846 estrellas se apegó mejor a la isocrona de Padua de 14.75 Gaños, comparada con las isocronas de Yale. Las muestras de M3, con 4929 y 10333 estrellas, se apegaron mejor a la isocrona de Yale de 16.00 Gaños, que a las isocronas de Padua y de Pisa.

Concluimos que, combinando tanto la estadística de Saha como la prueba χ^2 , se logra obtener un método objetivo para estimar la edad de una población estelar simple, y cuantificar cuál modelo, entre varios, describe mejor las observaciones.

Finalmente, con los resultados obtenidos abrimos camino para futuros estudios en el problema de la estimación de la edad de Cúmulos Globulares. Sugerimos posibles aplicaciones del método presentado.

Índice General

1	Introducción	1
2	Metodología e ingredientes básicos	11
2.1	Metodología	11
2.2	Ingredientes fundamentales	14
2.2.1	Las isocronas	14
2.2.2	Conjunto de observaciones	16
3	Estimación de la edad de CG	23
3.1	El estimador W	24
3.2	Aplicación de la estadística W al caso de la EECG	26
3.2.1	La edad de NGC 6397	26
3.2.2	La edad de M92	43

3.2.3	La edad de M3	57
4	Discusión y perspectivas	77
4.1	Comparación de los resultados con otros trabajos	79
4.2	Importancia del trabajo realizado	81
4.3	Perspectivas	81
5	Conclusiones	85
A	La dispersión $\sigma(M_v)$	93

Capítulo 1

Introducción

Los Cúmulos Globulares (CG, en lo sucesivo) son grupos de 10^5 - 10^6 estrellas en un arreglo esferoidal, localizados predominantemente a altas latitudes galácticas; a bajas latitudes, están escondidos debido a la absorción interestelar. La estimación de la edad de los Cúmulos Globulares (EECG, en lo sucesivo) es un problema de gran interés en la Astrofísica, y constituye aún hoy en día un campo muy activo de investigación. Los resultados cubren un intervalo entre 11 y 21 Gaños¹ (Chaboyer 1995), y están sujetos a diversas incertidumbres. Numerosas estimaciones de la edad más probable de los CG se han propuesto: Lejeune 1997 cita que la edad de los CG generalmente aceptada es de 15 Gaños, Jimenez 1997 estima una edad de 14 Gaños y D'Antona 1999 apunta a que los recientes resultados parecen sugerir una edad comprendida entre 10 y 12 Gaños. Pero, ¿por qué es tan importante estimar la edad de CG y qué importancia tienen estos viejos sistemas estelares?

¹1 Giga año = 1×10^9 años

Existe un buen número de razones para estudiar y comprender los CG, entre las cuales se hallan las de naturaleza cosmológica, para estudiar la formación de la Vía Láctea y para probar modelos de evolución estelar, entre otras. Una de las preguntas más importantes en Cosmología es la edad del Universo, y por ser los CG probablemente los objetos más viejos del Universo, la edad estimada de ellos proporciona un límite inferior de la edad del Universo, t_0 . Por otro lado, la edad estimada de los CG hasta los momentos, presenta un aparente conflicto con la edad derivada de algunos modelos cosmológicos. Por ejemplo, de acuerdo con el modelo de Einstein-De Sitter ($\Omega_M=1$, $\Omega_\Lambda=0$, $t_0=2/3H_0^{-1}$), $t_0=9.3$ Gaños (con $H_0=70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$) y 8.2 Gaños (con $H_0=60 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$), edades inferiores que incluso las estimadas a los CG más jóvenes. Así mismo, de acuerdo con el modelo de la expansión acelerada (Riess *et al.* 1998), (con $\Omega_M=0.3$ y $\Omega_\Lambda=0.7$), $t_0=(14.2 \pm 1.7)$ Gaños (con $H_0=65 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$), edad que puede coincidir con la estimada a los CG. La importancia de los CG en el estudio de la formación de la Vía Láctea y otras galaxias reside en que los CG proporcionan un registro de las condiciones reinantes durante la formación y la evolución temprana de la Galaxia, ya que los CG se formaron, probablemente, cuando la Galaxia se formó. De allí, los CG constituyen valiosas pruebas de los diferentes mecanismos de formación y/o evolución de la Galaxia. Los CG también juegan un rol central en la definición de las diferencias entre poblaciones estelares y en las implicaciones resultantes respecto a la estructura y evolución galáctica. Los CG constituyen un laboratorio ideal para probar la Teoría de Evolución Estelar, puesto que, se supone que las estrellas miembros del CG se formaron del mismo material, al mismo tiempo y en el mismo lugar (población estelar simple).

Nuestro conocimiento de los aspectos fundamentales, concerniente a los CG ha tenido un enorme avance en años recientes gracias al creciente número de ob-

servaciones y al refinamiento de los modelos teóricos de evolución estelar. Sin embargo, es de resaltar que Tayler 1986, Sandage 1993 y Bolte *et al.* 1995 citan que la edad t_0 , derivada de estimaciones para CG, comparada con las edades del Universo, se encuentra, dependiendo del modelo, en aparente conflicto o en concordancia. Si las estimaciones de t_0 están en conflicto, entonces, debemos prepararnos para a) o adoptar modelos cosmológicos más aceptables, b) o reconsiderar las estimaciones de la edad absoluta de los CG (y dirigir la atención a la EECG con menores incertidumbres, con las herramientas de las que disponemos hasta los momentos), c) o ambas. Según la visión tradicional, el punto álgido en el conflicto cosmológico se encuentra en las mediciones de los parámetros cosmológicos, tales como en H_0 , Ω_M y Ω_Λ (ya que hay inconsistencias externas en sus determinaciones). Hendry 1997 reporta discrepancias hasta de un factor de dos en las estimaciones de H_0 y Ruiz-Lapuente 1997 cita que las barras de error de los valores de Ω_M y de Ω_Λ son aún muy grandes, producto de las presentes limitaciones observacionales y teóricas. La estimación promedio de la edad de los CG realizada por diversos grupos, presenta una menor dispersión que aquella estimación promedio determinada cosmológicamente por las diversas teorías en boga, por lo que las estimaciones de la edad de CG parecen proporcionar menores inconsistencias internas (a pesar de las incertidumbres en el conocimiento de la estructura estelar, por ejemplo).

Antes de introducir algunos de los métodos desarrollados para estimar la edad de CG, definiremos, mediante un Diagrama Color-Magnitud (DCM, en lo sucesivo) esquemático de un CG (ver figura 1.1), la notación a seguir en lo sucesivo para denotar las ramas, secuencias y sub-secuencias generalmente reconocidas en el DCM de un CG, además de ilustrar la morfología del diagrama. La figura sólo intenta ser esquemática, la posición exacta de las ramas, secuencias y sub-

secuencias del DCM difieren de cúmulo a cúmulo, así como del sistema fotométrico utilizado, y algunas ramas puede que estén parcial o totalmente ausentes.

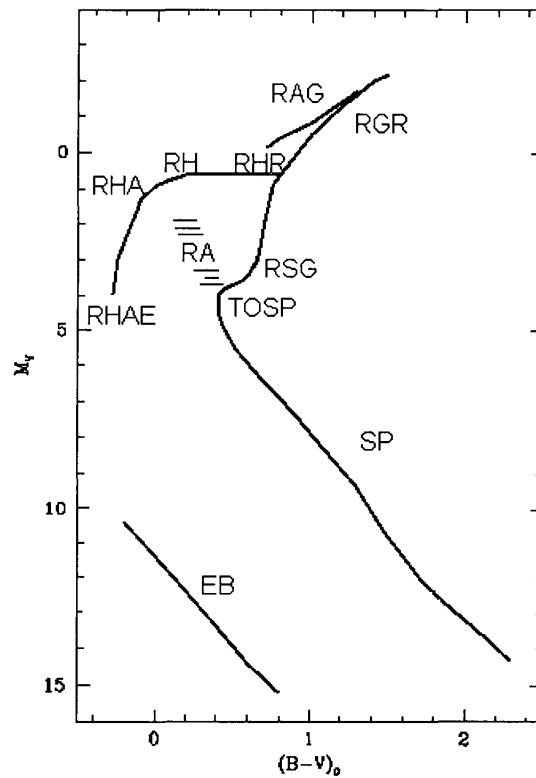


Figura 1.1: DCM esquemático de un CG. Muestra las ramas, secuencias y partes de secuencias que se reconocen generalmente. SP= Secuencia Principal, TOSP= "turn-off" de la Secuencia Principal, RA= Rezagadas azules, RSG= Rama de las sub-gigantes, RGR= Rama de las Gigantes rojas, RH= Rama Horizontal, RHR= Rama Horizontal roja, RHA= Rama Horizontal azul, RHAE= Rama Horizontal azul extrema, RAG= Rama Asintótica de las Gigantes, EB= Enanas blancas.

Diversos métodos para estimar la edad absoluta y relativas de CG han sido desarrollados y usados ampliamente (ver Chaboyer *et al.* 1997 y Sarajedini *et al.* 1997 para una revisión). Sin embargo, tales métodos presentan algunas desventajas y algunos de ellos proporcionan incertidumbres observacionales y teóricas en la determinación de la edad, hasta de un orden de 4 Gaños (Castellani 1998). Entre algunas de las técnicas desarrolladas tenemos la llamada **Mediciones directas o ajuste de la Secuencia Principal** (Chaboyer *et al.* 1997, Gratton *et al.* 1997 y Reid 1997), la cual se basa en la magnitud visual del TOSP como medida directa de la edad del cúmulo ($M_v(TO)$). Algunas ecuaciones se han desarrollado que relacionan la $M_v(TO)$ con la edad y la metalicidad del cúmulo (Bergbusch 1997). Lamentablemente, este método se aplica a cúmulos con enrojecimientos y distancias bien determinadas y se requiere una buena fotometría para la SP y el TOSP. Otra de las formas para estimar la edad de los CG es mediante el **método del ajuste de isocronas**². La isocrona que minimiza las discrepancias entre sus ramas y las ramas del CG observado en el DCM, proporciona la edad del CG (Stetson *et al.* 1996, Vandenberg 1983). Aunque este método se ha empleado exitosamente, las comparaciones directas entre el CG y la isocrona introducen un cierto grado de subjetividad en la elección de la isocrona apropiada. Por otra parte, las estrellas enanas blancas son de potencial importancia para estimar la edad del CG, ya que son estrellas que están en la fase final de evolución y la luminosidad de las más débiles en los CG puede usarse para estimar la edad de CG. **El método de la secuencia de enfriamiento de las enanas blancas** (Richer *et al.* 1995, Renzini *et al.* 1996) está basado en el ajuste de la curva teórica de enfriamiento (la cual relaciona la edad con la luminosidad) de la enana blanca (Wood 1995 y Hansen 1998) con las observaciones en el DCM. La desventaja de

²isocrona, del griego *isochrone*: “misma edad”, curva que representa la posición en el DCM o el Diagrama Hertzsprung-Russell ocupada por las estrellas de la misma edad.

este método reside en las pocas observaciones a magnitudes tan débiles para las enanas blancas, y las incertidumbres en el cálculo de las opacidades involucradas en las curvas de enfriamiento. Jimenez y colaboradores 1996 han explotado **la Función de Luminosidad estelar** (FL, en lo sucesivo) para estimar la edad de CG. Este método se basa en el número de estrellas en diferentes regiones del DCM. Consideran que las estrellas de la SP contenidas en una región de luminosidad constante decrece con el tiempo, a medida que la población estelar envejece (dado que las estrellas más masivas evolucionan más rápidamente que la menos masivas). Aunque esta técnica presenta la ventaja de que no es necesario conocer la distancia ni el enrojecimiento, se requiere de una buena fotometría y de una muestra de estrellas hasta magnitudes débiles.

Las diferencias de edad entre los CG de la Galaxia son de considerable interés, por lo cual se ha desarrollado una variedad de técnicas para medir diferencias relativas de la edad: el método $\Delta(V)$ es una técnica basada en la medición de la diferencia en magnitud entre el TOSP y la RH en el DCM (Iben *et al.* 1968, Sandage 1982, Buonanno *et al.* 1989, Chaboyer *et al.* 1996); y el método $\Delta(B-V)$, la diferencia entre el color en el punto donde la RSG empieza, y el color del TOSP (Sarajedini *et al.* 1990, Stetson *et al.* 1989, Bolte *et al.* 1989, Green *et al.* 1990). Un resumen de algunos resultados de la EECG obtenidos por diversos métodos mencionados es presentado en la tabla 1.1. Por ejemplo, la edad de M5 estimada por el método del TOSP obtenida por Chaboyer *et al.* 1996 concuerda, dentro del margen de error, con la edad estimada por medio del ajuste directo (Cassisi *et al.* 1999). En cambio, la edad estimada para M68 considerando el ajuste directo (Cassisi *et al.* 1999) no concuerda con el resultado obtenido por Jimenez *et al.* 1996 por medio de la FL, a pesar de tener este último resultado una incertidumbre baja. Frecuentemente nos topamos con diversas estimaciones

de la edad, obtenidas por diferentes métodos, las cuales no concuerdan entre sí. Esto sugiere la recomendación de una revisión sustantiva de la metodología empleada por los diferentes autores así como de un esfuerzo en el desarrollo de nuevos métodos.

MÉTODO	MUESTRA	EDAD (GAÑOS)	REFERENCIA
TOSP	9 cúmulos	13.2 ± 2.9	Carreta <i>et al.</i> (99)
	NGC 6752	11.2 ± 1.3	Chaboyer <i>et al.</i> (96)
	M5	8.9 ± 1.1	
	M13	10.1 ± 1.4	
	17 cúmulos	11.5 ± 1.3	Chaboyer <i>et al.</i> (96)
Ajuste directo	NGC 6553	12 ± 2	Bruzual <i>et al.</i> (97)
	NGC 6528	12 ± 2	
	47 Tuc	14 ± 2	
	M68	11 ± 1	Cassisi <i>et al.</i> (99)
	M5	10 ± 1	
ΔV	43 cúmulos	15 ± 1	Chaboyer <i>et al.</i> (96)
$\Delta(B-V)$	NGC 362/288	3 ± 1	Sarajedini <i>et al.</i> (96)
EB	M4	$\simeq 9$	Richer <i>et al.</i> (97)
FL	8 cúmulos	13.5 ± 2	Jimenez <i>et al.</i> (98)
	M68	16.4 ± 0.2	Jimenez <i>et al.</i> (96)

Tabla 1.1: Estimación de la edad de algunos CG. Algunas estimaciones de la edad de CG obtenidos de los métodos citados. Obsérvese el margen de error para cada una de las estimaciones.

Como vimos brevemente en los párrafos anteriores, uno de los campos más

activos dentro de los estudios de GC en este momento es la EECG, favorecido por la adquisición de nuevos datos fotométricos (muestras uniformes más grandes y datos tomados desde el espacio), por desarrollos en la teoría de evolución estelar y/o por los avances de las técnicas de estimación de la edad.

El método del ajuste de las isocronas en el DCM es el método que ha servido de base y motivación a este trabajo. Además, los resultados obtenidos en la presente investigación dependen de los detalles morfológicos de las isocronas seleccionadas, razones que dan lugar a un sitio en este Capítulo para resaltar algunas características, propiedades y marcadas diferencias de las isocronas obtenidas por los modelos de evolución estelar, en general. Algunos de los datos de entrada en el cálculo de isocronas son las tasas de reacciones nucleares, opacidades y tasas de mezclado de los elementos químicos en el interior estelar. Frecuentemente, los autores de modelos de evolución consideran datos de entrada y algoritmos numéricos diferentes, elementos que producen diferentes modelos de evolución, y por lo tanto, conjuntos de isocronas que difieren entre sí. Esto trae como consecuencia inmediata, aparte de incertidumbres en la edad, diferentes predicciones de la edad según el modelo considerado (Vandenberg *al.* 1990). Los diferentes conjuntos de modelos de evolución estelar se han clasificado en dos grandes categorías basadas en el esquema de mezclado convectivo³ considerado: en modelos clásicos o canónicos y en los no canónicos. La primera categoría adopta esquemas de mezclado, en la región convectiva, siguiendo el criterio local de estabilidad de Schwarzschild. Los cálculos de los modelos canónicos, sobre un amplio intervalo de masas estelares y fases han sido desarrollados por Castellani *et al.* 1990,1992,

³la convección estelar es un proceso importante de transporte de energía y masa, el cual produce mezcla de los elementos químicos en el interior estelar. Como es un proceso de transferencia de calor, la energía es transportada de una región a otra por el flujo de la materia caliente, a regiones más frías.

Vandenberg 1985, Green *et al.* 1987, Sweigart *et al.* 1990, Iben 1962, entre otros. La segunda categoría incluye como esquemas de mezcla de elementos químicos al “overshooting”, a la semi-convección y a la difusión (ver Kippenhahn 1990 para mayores detalles). Entre los conjuntos de modelos desarrollados que incluyen estos mecanismos, tenemos los desarrollados por Alongi *et al.* 1991, Bressan *et al.* 1981, Bertelli *et al.* 1985,1986a,1986b,1992, Bressan *et al.* 1986, Doom 1982,1985, Chin y Stothers 1991, Stothers 1985, Stothers y Chin 1990, Matranka *et al.* 1982, Maeder y Meinet 1987,1988,1989,1990,1991, entre muchos otros. Ahora bien, ¿cómo influyen estos diferentes esquemas en la EECG? Por ejemplo, las consecuencias de considerar, en los modelos no canónicos, regiones cada vez más grandes en donde ocurre “overshooting” en el núcleo estelar, son una luminosidad del TOSP cada vez más grande y una vida de las estrellas que pueblan la SP más larga. Al comparar las isocronas basadas en modelos no canónicos y un DCM observacional particular y aquellas basados en modelos canónicos, se han determinado edades más viejas (con el TOSP) considerando esquemas de mezclado no canónicos que esquemas canónicos (Chiosi *et al.* 1988,1989). Contrario a lo anterior, la inclusión de la difusión en los modelos estelares, trae como consecuencia una menor luminosidad del TOSP al comparar tales isocronas y un DCM específico en modelos no canónicos y aquellos basados en modelos canónicos, proporcionando una edad más joven. Nada podemos decir sobre los efectos de la convección y de la difusión en la EECG, a menos que estimaciones independientes de la edad sean disponibles. Sin embargo, Alongi *et al.* 1991 apuntan que los modelos clásicos fallan al explicar los datos observacionales, y que por otro lado, los modelos no canónicos presentan sus limitaciones. Castellani 1998 argumenta que los principales mecanismos que afectan la determinación de la edad son la convección y la difusión, y que la inclusión o no de la difusión en el cálculo de las isocronas puede llegar a introducir diferencias de hasta 0.4 mag. en M_v entre

unas y otras, y un error de hasta 4 Gaños en la estimación de la edad.

Esta tesis engloba nuestra contribución a los esfuerzos en el desarrollo de mejores técnicas al problema de la EECG. Nuestro trabajo se ha concentrado en el desarrollo e implementación de técnicas estadísticas al problema de la EECG, con los siguientes objetivos:

- Estimar la edad absoluta de tres CG: NGC 6397, M92 y M3, de manera objetiva e implementando modernas herramientas estadísticas.
- Encontrar la isocrona, dentro de un conjunto de isocronas originadas a partir de diferentes modelos de evolución estelar, que proporcione el mejor ajuste⁴ a un DCM de un CG.

La Tesis está organizada de la siguiente manera: en el Capítulo II introducimos, tanto el conjunto de modelos de evolución estelar e isocronas considerados en esta investigación, como el conjunto de datos observacionales de los CG NGC 6397, M92 y M3, cuyos datos fotométricos fueron suministrados por distintos autores. En el Capítulo 3 introducimos, desarrollamos e implementamos la estadística de Saha 1998 al problema de la EECG. Presentamos resultados obtenidos de los CG considerados aplicando dicha técnica y el mejor estimado de la edad junto con su intervalo de confianza a un nivel de confianza del 99% por medio de la prueba χ^2 . En el Capítulo 4 discutimos los resultados obtenidos, presentamos una comparación de los resultados obtenidos con algunos trabajos previos, sugerimos caminos para continuar con el desarrollo de la investigación y futuras aplicaciones. En el Capítulo 5 finalizamos con las conclusiones.

⁴como mejor ajuste entiéndase aquel ajuste que minimice las discrepancias entre las secuencias observadas del CG y la isocrona de edad t_i , cuando ambas son representadas en el DCM.

Capítulo 2

Metodología e ingredientes básicos

En este Capítulo describimos, en forma general, cómo alcanzamos los objetivos de la presente investigación. También introducimos los dos ingredientes fundamentales involucrados en la aplicación de las técnicas estadísticas: el conjunto de modelos de evolución estelar e isocronas seleccionadas en este trabajo y el conjunto de datos observados de los CG a los cuales se estimó la edad.

2.1 Metodología

El primer objetivo de esta Tesis es estimar la edad absoluta de tres CG de la Galaxia. Inicialmente, seleccionamos como método base para la EECG al ajuste de isocronas. Este consiste en comparar los datos del CG en cuestión en el DCM con un grupo de isocronas de diferentes edades y provenientes de diferentes

modelos de evolución.

La edad del CG viene dada por la edad t_i de la isocrona que mejor ajusta al CG. Dado que las comparaciones directas entre el CG y la isocrona introducen un cierto grado de subjetividad en la elección de la isocrona apropiada, requerimos la implementación de técnicas estadísticas para medir, objetivamente, la verosimilitud o grado de similitud entre la isocrona y el CG. La estadística particular que mide este grado de similitud se llama estimador, y el método objetivo consiste en seleccionar la isocrona que maximice tal estimador. Sin embargo, cuantificar cuan cercana es la isocrona teórica al CG, algunas veces no es una labor sencilla: se requiere además de los datos, de los errores asociados y de un modelo en particular, de una adecuada selección de la estadística y de la apropiada construcción de la función de similitud.

Un procedimiento comúnmente usado para comparar un modelo teórico particular y una muestra de datos observacionales o experimentales es determinando el grado de similitud entre las observaciones y una muestra sintética generada partir de un modelo específico (también llamado predicción) (Chiosi *et al.* 1989, Aparicio *et al.* 1990 y Mould *et al.* 1997). Diversas construcciones de la estadística que mide tal grado de verosimilitud se han llevado a cabo, tales como las desarrolladas por Tolstoy 1995, Mould *et al.* 1997, Dolphin 1997, Ng 1998, Aparicio *et al.* 1997 y Hurley-Keller *et al.* 1998. Por ejemplo, Aparicio *et al.* 1997 recuperaron, simultáneamente, la distancia, la historia de enriquecimiento químico y la historia de la tasa de formación estelar (TFE(t), en lo sucesivo) de LGS 3, construyendo DCM sintéticos para una TFE(t). Esta fue tomada paramétricamente como una serie de brotes continuos y encontraron la amplitud de cada brote a partir de la estadística de máxima verosimilitud de TFE(t) con los datos (en términos de las cuentas de estrellas por celda). El DCM que obtu-

vieron es una suma lineal de cada DCM parcial producido al considerar una sola configuración de la TFE(t) para cada brote.

Motivados por las preguntas usuales que surgen al comparar modelos con datos (si los datos pudiesen ser consistentes o no con una distribución particular del modelo teórico, o si hay varios modelos disponibles, a cuál de ellos los datos ajustan más), y siguiendo el procedimiento citado en el párrafo anterior, seleccionamos la técnica de verosimilitud apegados a la estadística de Saha 1998. Detalles de esta estadística se verán en el Capítulo 3. Para alcanzar el objetivo 2 de este trabajo, requerimos una estadística que también mide la bondad del ajuste de la estimación de la edad. Para determinar el intervalo de confianza en torno al mejor estimado de la edad aplicamos la estadística χ^2 .

Como veremos en el Capítulo 3, la edad t_i del CG se estima seleccionando la isocrona de edad t_i que proporciona el máximo grado de verosimilitud entre comparaciones CG observado-CG sintéticos (éstos originados a partir de una isocrona de edad t_i). El grado de verosimilitud lo caracterizamos en función de la distancia entre las medias de gaussianas ajustadas a las distribuciones de frecuencia de $\log W$, cuya frecuencia se obtiene de n cálculos de $\log W$ entre dos muestras (bien sea dos GC sintéticos o el GC observado y un CG sintético). Confrontamos, para cada CG, a las isocronas de cada modelo que mejor ajustan al CG para encontrar cual de ellas es la “mejor”. Hernandez *et al.* 1998 utilizan diversas TFE(t) para generar DCM sintéticos, los cuales comparan utilizando la estadística de Saha con las observaciones de las galaxias Carina, Osa Menor, Leo I, Leo II y Draco, y Hernandez *et al.* 2000 comparan muestras sintéticas a partir de TFE(t) de la vecindad solar con las observaciones de la vecindad solar tomada del catálogo Hipparcos.

2.2 Ingredientes fundamentales

2.2.1 Las isocronas

Seleccionamos tres conjuntos de modelos evolutivos tal y como son publicados en el plano teórico (es decir, en el DHR), los cuales pertenecen a la categoría de los modelos no canónicos según la clasificación citada por Alongi 1993 (los cuales consideran esquemas no clásicos de mezcla de los elementos químicos, como la semiconvección y el “overshooting”). Ellos son:

- B_1 : El conjunto de isocronas desarrollado por Bertelli *et al.* 1994 y Girardi *et al.* 1996. A este conjunto se denominó Isocronas de Padua.
- B_2 : El conjunto de isocronas desarrollado por Demarque *et al.* 1996. A este conjunto se denominó Isocronas de Yale.
- B_3 : El conjunto de isocronas desarrollado por Cassisi *et al.* 1998,1999. A este conjunto se denominó Isocronas de Pisa.

En la tabla 2.1 se muestra un cuadro con algunos parámetros utilizados en el cálculo y algunas propiedades y características de cada conjunto de isocronas. Como vemos en la tabla 2.1, cada modelo evolutivo considera datos de entrada para originar las isocronas, distintos, lo que origina las marcadas diferencias entre las isocronas. La metalicidad, la eficiencia del mezclado por convección α y las opacidades figuran entre los datos de entrada más determinantes de las diferencias entre las isocronas. A pesar de que estos y otros datos de entrada introducen incertidumbres en los modelos, no insistimos en los puntos álgidos de los modelos de evolución estelar, sino que los tomamos tal cual son publicados en el plano

teórico y hacemos énfasis en los métodos estadísticos que se presentan en esta Tesis.

Cada modelo B_i emplea diferentes formas de conversión del plano teórico (DHR) al plano observacional (DCM). Es de hacer notar que tal transformación no fue hecha de manera uniforme debido a las diferentes transformaciones fotométricas y a los colores empleados por cada autor.

Se ha encontrado incluso, que las mencionadas transformaciones difieren entre una fuente y otra en 0.05-0.1 mag. (Weiss 1999). Por lo tanto, esta falta de uniformidad puede influir en la EECG (Castellani 1998).

Para eliminar la incertidumbre debida a las diferentes formas de conversión del plano teórico al plano observacional, Weiss *et al.* 1999 seleccionan una combinación de transformaciones publicadas. Preferimos emplear una misma transformación a los conjuntos de isocronas seleccionadas: tabulaciones de correcciones bolométricas y colores obtenidos a partir de las distribuciones espectrales de energía (DEE, en lo sucesivo) extraídas de la biblioteca de espectros estelares de Kurucz 1992 (Bruzual y Charlot 2000, BC2000, en lo sucesivo). En la figura 2.1 se muestra un ejemplo del resultado de aplicar la única transformación mencionada al caso de las isocronas de Padua, Yale y Pisa para semejantes abundancias y edades. Para compararlas, se han representado gráficamente los resultados de la transformación empleada por los autores de cada conjunto de isocronas. Una consecuencia directa de utilizar esta transformación única es que se obtienen, en general, isocronas más azules que las publicadas por los autores.

CARACTERÍSTICA	PADUA	YALE	PISA
Metalicidad	$0.0001 \leq Z \leq 0.05$	$0.0002 \leq Z \leq 0.1$	$0.0006 \leq Z \leq 0.001$
Edad	1-20 [Gaños]	1-25 [Gaños]	8-18 [Gaños]
Opacidades	LAOL Huebner (1977) OPAL (1992)	OPAL (1992)	OPAL (1997) Alexander y Ferguson (1994)
α	1.56, 1.63 [H_p]	1.7 [H_p]	1.3-2.0 [H_p]
Y	0.23, 0.24, 0.25	0.23, 0.27	0.21, 0.25
"overshooting"	si	si	si
Rango de masas	0.6-120 M_\odot	0.3-2.2 M_\odot	0.6-1 M_\odot
Atmósferas estelares	Kurucz (1992)	Kurucz (1992)	Castelli et al. (1997)
Calibración color	UBV: Buser y Kurucz (1978) R, I_c : Bessel (1990)	tabla semiempírica de Green	Castelli, Gratton y Kurucz (1997)
Sist. fotométrico	I_c	Johnson	UBV Johnson RI Cousins JHK Glass

Tabla 2.1: Algunos parámetros utilizados en el cálculo y algunas propiedades y características de cada conjunto de isocronas seleccionadas.

2.2.2 Conjunto de observaciones

En esta sección se presenta el conjunto A conformado por tres CG de la Galaxia, de diferentes metalicidades y características: NGC 6397, NGC 6341

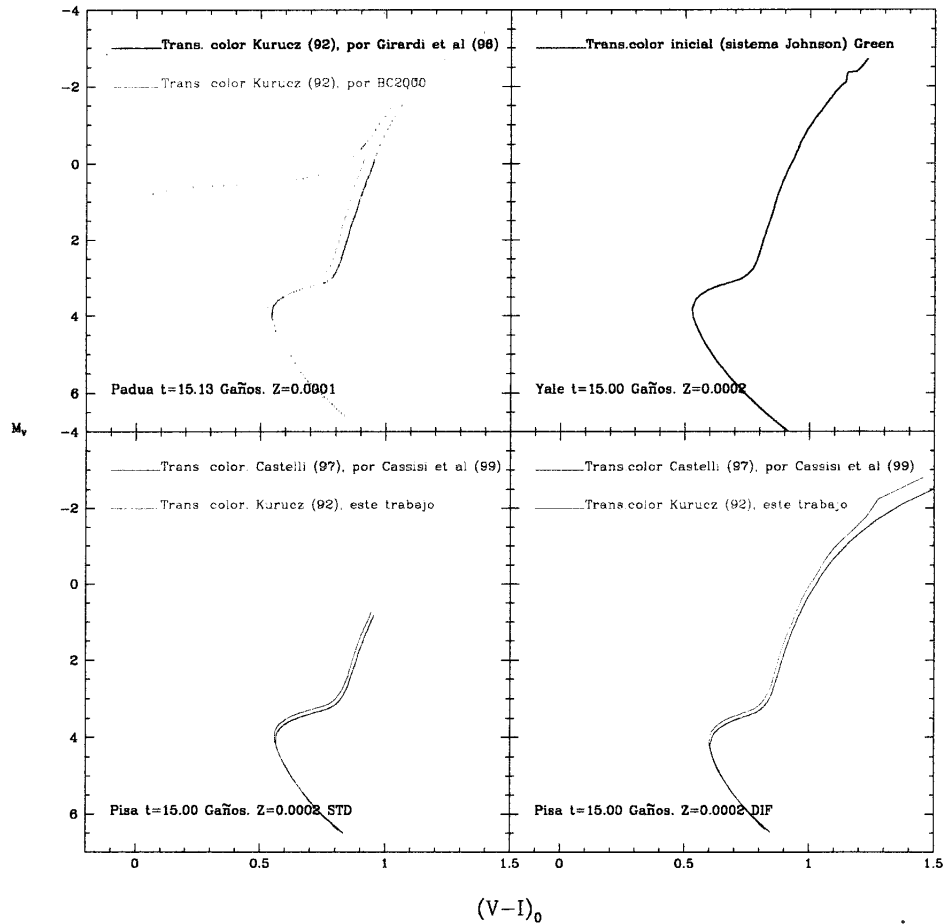


Figura 2.1: Ejemplo de las transformaciones del plano teórico al plano observacional, realizadas según la versión original junto con las consideradas en este trabajo. Comparando las versiones originales de las isocronas y las obtenidas por la transformación de BC2000, se encuentran algunas diferencias como isocronas más azules. STD = estándar, DIF = difusión.

(M92) y NGC 5272 (M3), a los cuales se les desea estimar la edad:

- A_1 : NGC 6397, CG, que, junto con NGC 6121, es uno de los cúmulos más cercanos (ver tabla 2.2). Los datos fotométricos (brillo y color) de 1596 estrellas, fueron suministrados por D'Antona 1999, quien compiló tres grupos de datos: la parte superior de la RGR adaptada y conformada por 108 estrellas tomadas por Kaluzny 1997¹, las gigantes y las estrellas que conforman el TOSP (125 estrellas) por Cool 1997, y la SP, conformada por 1363 estrellas, por King *et al.* 1988 obtenidos con el HST. También estos últimos datos han sido suministrados independientemente por King, y es de comentar que se consideraron en este trabajo sólo aquellas estrellas miembros del cúmulo y que tales observaciones representan los objetos más débiles en la SP tomadas de un CG.
- A_2 y A_3 : M92 y M3, dos CG cercanos (ver tabla 2.2), cuya medición fotométrica en V e I e información de la posición (x,y) de cada estrella respecto al centro (0,0) del campo fueron realizadas por Rosenberg *et al.* (2000, 1999a,b,c), desde el "Isaac Newton Group/Jacobus Kapteyn Telescope" de 1 m. en La Palma, España. Cerca del TOSP, presentan una incertidumbre $\sigma \leq 0.01$ mag. en el color.

Para los CG M92 y M3, realizamos una selección de aquellas estrellas fuera de un radio $r \geq 140$ min. de arco para M92 y de 170 min. de arco para M3,

¹originalmente tomados en B y V, y D'Antona transformó a V e I considerando la transformación de color de Castelli *et al.* 1997. Estas observaciones fueron hechas desde el telescopio CTIO 0.9 mm. en Junio/Julio 1995.

para así evitar aquellas estrellas cerca del centro del CG. La superficie angular de los cúmulos M92 y M3 en las que yacen las estrellas tomadas en consideración, representan el 98.9% y el 99.4% del área angular total estimada para M92 y M3. Tales porcentajes los obtuvimos mediante la realización de una cuidadosa inspección visual de las reproducciones fotográficas de las placas correspondientes del POSS (Palomar Observatory Sky Survey 1950). Posterior a la selección de estrellas, se procedió a la construcción del DCM M_v vs. $(V - I)_0$ acorde con las ecuaciones

$$(V - I)_0 = (V - I) - E_{V-I} \quad (2.1)$$

$$M_V = V - A_V - (m_0 - M) \quad (2.2)$$

donde A_V es la extinción, $(m_0 - M) = 5 \cdot \log(r) - 5$ el módulo de distancia y E_{V-I} es el exceso de color o enrojecimiento.

Los valores adoptados de E_{V-I} y (m-M) y las fuentes bibliográficas de tales valores están dados en la tabla 2.2. Procedimos a realizar la eliminación de estrellas con errores fotométricos grandes (los colores fuera de 3σ) mediante el procedimiento descrito en el apéndice A.

En la figura 2.2, se presentan los DCM finales, luego de aplicar el proceso de la eliminación de estrellas de los cúmulos en cuestión. En la tabla 2.2 se muestran algunos de los parámetros y características de los cúmulos, junto con los parámetros y características adoptadas en esta investigación (en negritas). Finalmente, luego de aplicar los procesos de eliminación de estrellas mencionados, la muestra utilizada del CG M92 quedó conformada por 4848 estrellas y la de M3 por 10.333 estrellas.

Table 2.2.— Parámetros adoptados (en negritas) y no adoptados, y algunas características de cada uno de los CG considerados en este trabajo.

	[Fe/H]	Z	E(B-V)	E(V-I)	(m-M)	t [Gaños]
NGC6397	-1.95 ^a	.	0.18^a	0.24^b	11.71 ^c	12.00 ^b
	-1.56^b	0.0006	.	12.05^b	.	
	.	.	.	12.31 ^a		
M92	-2.29 ^a	.	0.02^a	0.03^d	14.59^a	15.80 ^e
	-2.35^h	0.0001	.	.	14.67±0.08 ^f	14.00 ^f
	-2.14- .-2.25 ^g	
M3	-1.56ⁱ	0.0003	0.01^a	0.013^d	15.04^a	14.-15 ⁱ
	-1.57 ^a	.	.	15.05 ^j	.	
	-1.47±0.01 ^k	

^aHarris (1997)

^bD'Antona (1999)

^cDjorgovsky *et al.* (1993)

^dE(V-I)=1.3 E(B-V) (probado de los modelos de atmósfera estelar de Allard *et al.* (1997) y Hauschild *et al.* (1999))

^eBolte *et al.* (1995)

^hAbundancia metálica adoptada Z=0.0001 Vandenberg (1983). La conversión de Z a [Fe/H] fue tomada de la ecuación 11 de Bertelli *et al.* (1994).

^fPont *et al.* (1998)

^gZinn *et al.* (1984)

ⁱAbundancia metálica adoptada Z=0.0003 Vandenberg (1983). La conversión de Z a [Fe/H] fue tomada de la ecuación 11 de Bertelli *et al.* (1994).

^jJohnson *et al.* (1998)

^kPeterson *et al.* (1993)

^kKraft *et al.* (1992)

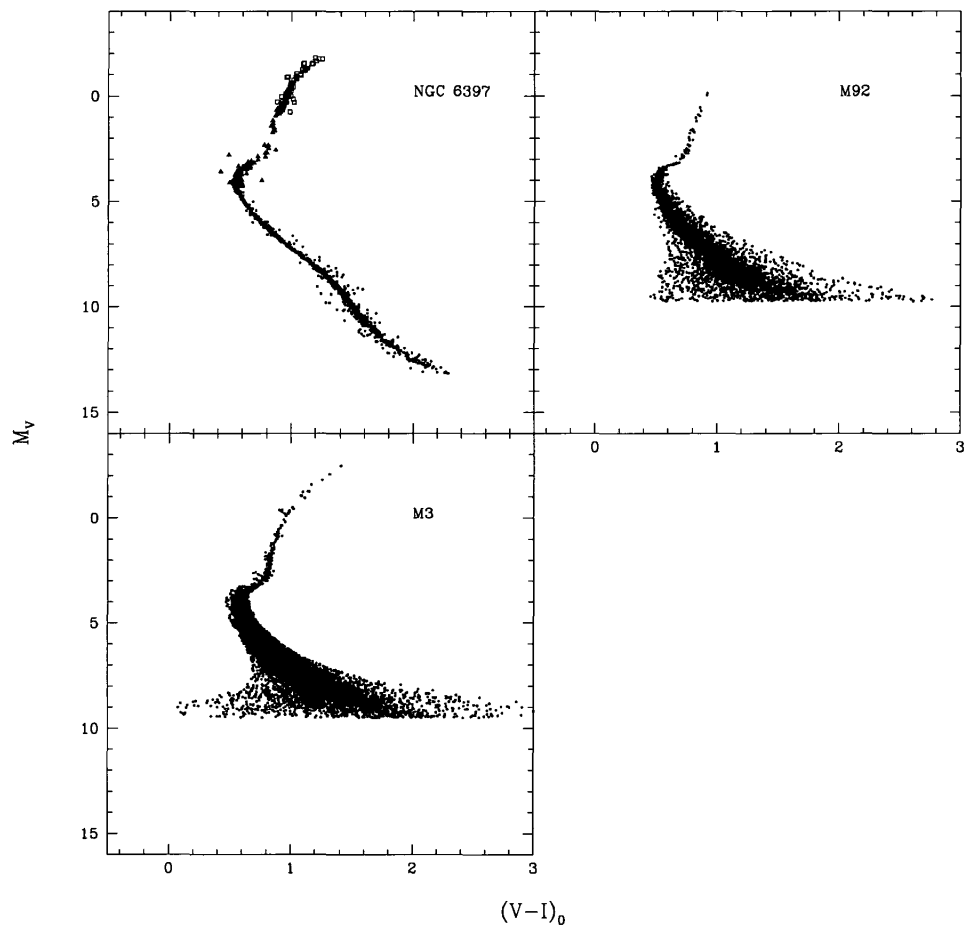


Figura 2.2: DCM de tres CG. DCM de los tres CG NGC 6397, M92 y M3, a los cuales se les estimó la edad.

Capítulo 3

Estimación de la edad de CG

En este Capítulo introducimos el método estadístico desarrollado por Saha 1998, el cual, por medio de la estadística W , estima el grado de verosimilitud entre una muestra de datos sintética generada a partir de una isocrona en particular y una muestra de datos observada de un CG. Implementamos la estadística de Saha al problema de la EECG y presentamos los resultados de la estimación de la edad de los CG NGC 6397, M92 y M3, y encontramos la isocrona, dentro de un conjunto de isocronas provenientes de diferentes modelos de evolución estelar, que proporciona el “mejor ajuste” al DCM del CG observado en cuestión. Determinamos el intervalo de confianza en torno al mejor estimado de la edad, a un específico coeficiente de confianza.

3.1 El estimador W

Sea S el número de estrellas en un DCM de un CG, y sea M el número de estrellas de una muestra sintética (generada a partir de un modelo de evolución en particular, a una edad t_i) en un DCM. Si dividimos ambos DCM (el observado y el sintético) en una rejilla con un número B de pequeños cuadros o celdas igualmente espaciadas, la probabilidad de que los datos se apeguen al modelo, se puede expresar por medio de la ecuación 3.1. m_i es el número de puntos o estrellas sintéticas localizadas en la celda i , y s_i , el número de estrellas observadas dentro de la celda i , con lo que $M = \sum_{i=1}^B m_i$ y $S = \sum_{i=1}^B s_i$.

$$\text{prob}(\text{datos} \mid \text{modelo}) = \frac{S!(M + B - 1)!}{(M + S + B - 1)!} \cdot W \quad (3.1)$$

donde W viene dado por la expresión

$$W = \prod_{i=1}^B \frac{(m_i + s_i)!}{m_i! s_i!} = \prod_{i=1}^B \binom{m_i + s_i}{s_i} \quad (3.2)$$

Saha 1998 derivó la expresión 3.1 por medio de la teoría de probabilidades. Es importante hacer notar que, aunque en la expresión 3.2, m_i y s_i lucen simétricos en forma, operacionalmente estos dos conjuntos de números juegan diferentes papeles. Los valores de los s_i se derivan de los datos obtenidos a partir de la observación, y si estos datos se separan en celdas en el DCM, los valores de s_i están fijos en relación con las celdillas. En cambio, si dividimos los datos sintéticos de un CG en celdas, los m_i dependerán de la posición de los puntos o estrellas generadas sintéticamente, y variará si la distribución de datos es producida aleatoriamente.

La estadística W es capaz de estimar el grado de verosimilitud entre una muestra de datos observados y una muestra de datos derivados de un modelo de

la siguiente manera: mientras más grande sea la semejanza entre los datos del CG sintético y los datos del CG observado, más grande será W . Por lo tanto, el grado de verosimilitud es máximo entre una muestra de datos (bien sean derivados a partir de la observación o sintéticamente) y la misma muestra de datos, caso en el cual W es máximo. Otra propiedad interesante en el cálculo de W , es lo robusto que resulta este estimador en relación con las celdas vacías. Por ejemplo, si hay estrellas observadas situadas en celdas que están más allá de celdas que contienen puntos o estrellas del DCM sintético, alguna observación u observaciones caerán en una o varias celdas con un número cero de estrellas en el DCM sintético ($m_i=0$ y $s_i=1$, por ejemplo). Esta celda vacía contribuye como uno al producto de la ecuación 3.1, y por lo tanto, afortunadamente, no afecta al cálculo de W .

Para DCM compuestos de una población densa de estrellas en algunas regiones, sugerimos el uso de la aproximación de Stirling para el cálculo de valores grandes de los números enteros factoriales de la ecuación 3.1 (ver ecuación 3.3). Usualmente es preferible hacer uso, también, del logaritmo de la función de verosimilitud en vez de la función misma, y así evitar problemas en los cálculos. La aproximación de Stirling viene dada por la expresión

$$\log n! \approx \left(n + \frac{1}{2}\right) \log n - n \log e + \log \sqrt{2\pi} \quad (3.3)$$

Haciendo uso de la aproximación 3.3 y calculando el $\log W$, la expresión 3.2 toma la forma 3.4.

$$\begin{aligned} \log W &= \sum_{i=1}^B \log (m_i + s_i)! - \sum_{j=1}^B \log m_j! - \sum_{k=1}^B \log s_k! = \sum_{i=1}^{M+S} \log i - \sum_{j=1}^M \log j - \sum_{k=1}^S \log k \\ &\approx \sum_{i=1}^B \left[\left(m_i + s_i + \frac{1}{2}\right) \log (m_i + s_i) - \left(m_i + \frac{1}{2}\right) \log m_i - \left(s_i + \frac{1}{2}\right) \log s_i - \log \sqrt{2\pi} \right] \end{aligned} \quad (3.4)$$

3.2 Aplicación de la estadística W al caso de la EECG

Hemos desarrollado un procedimiento para EECG suponiendo que la distribución de estrellas en color a una magnitud dada se puede aproximar por una distribución gaussiana; así mismo, hemos supuesto que las estrellas seleccionadas que conforman el CG son estrellas propias del cúmulo (desconocemos si hay o no contaminación de estrellas de campo) y que las estrellas del cúmulo tienen abundancias químicas uniformes. También hemos supuesto que los DCM de los CG contruídos sintéticamente son una representación precisa de la realidad.

Para estimar la edad de un CG y determinar cual isocrona, dentro de un conjunto de diferentes modelos de evolución estelar, es la que mejor ajusta, hemos desarrollado el procedimiento descrito a continuación. Para explicar los detalles del método desarrollado probablemente sea mejor trabajar a través de un ejemplo, el caso de la estimación de la edad de NGC 6397.

3.2.1 La edad de NGC 6397

Muestra de 373 estrellas

Seleccionamos el conjunto de isocronas originadas a partir de los tres diferentes modelos de evolución: las isocronas de Padua (con $Z=0.0004$ y edades con un paso de 0.25 Gaños), las isocronas de Yale (con $Z=0.0004$ y edades con un paso de 1 Gaño) y Pisa ($Z=0.0002$ y edades con un paso de 1 Gaño). En aquellos casos en que las metalicidades disponibles de las isocronas no coinciden exactamente

con la metalicidad adoptada del CG, consideramos aquella metalicidad que fuese la más semejante a la adoptada según la tabla 2.2. En el caso de las isocronas de Pisa, se consideraron abundancias metálicas Z de 0.0002 (y no otras posibles disponibles como 0.0004 o 0.0006), dado que las isocronas, a esta metalicidad, lucían con un mejor ajuste al CG que con las isocronas de 0.0004 o 0.0006.

Al considerar todo el conjunto de isocronas y al ajustar este a la muestra de datos de NGC 6397, algunas estrellas están asociadas con fases evolutivas no incluídas en las isocronas, hecho asociado a que el intervalo en magnitud visual de las isocronas de Pisa es el más estrecho de los tres. Eliminamos tales estrellas con el siguiente criterio: eliminamos las estrellas más brillantes a partir del extremo de la isocrona más débil (de entre todos los extremos más brillantes de cada una de las isocronas), y removimos las estrellas más débiles a partir del extremo de la isocrona más brillante (de entre todos los extremos más débiles de cada una de las isocronas), con lo que se eliminaron las estrellas fuera del intervalo $0.94 < M_v < 6.44$. Luego de aplicar este proceso de remoción de estrellas, el número de estrellas considerados fue de 373. La figura 3.1 ilustra la población de 373 estrellas de NGC 6397 confrontada con las isocronas pertenecientes a los tres modelos de evolución estelar considerados.

Dado que no hay una única configuración del DCM sintético del CG (más bien infinitas configuraciones posibles de conjuntos de datos hipotéticos del DCM del CG), debemos generar un número considerable de configuraciones diferentes del DCM sintético. Hernandez *et al.* 1999 sugieren la aplicación de éste último paso si tenemos un número considerable de estrellas ubicadas en diversas regiones del DCM. Apegados a esta sugerencia, generamos 1000 configuraciones diferentes de DCM sintéticos originados a partir de cada isocrona considerada de edad t_i . Puesto que dividimos tanto el DCM de NGC 6397 como los DCM de los CG

T.F.C.

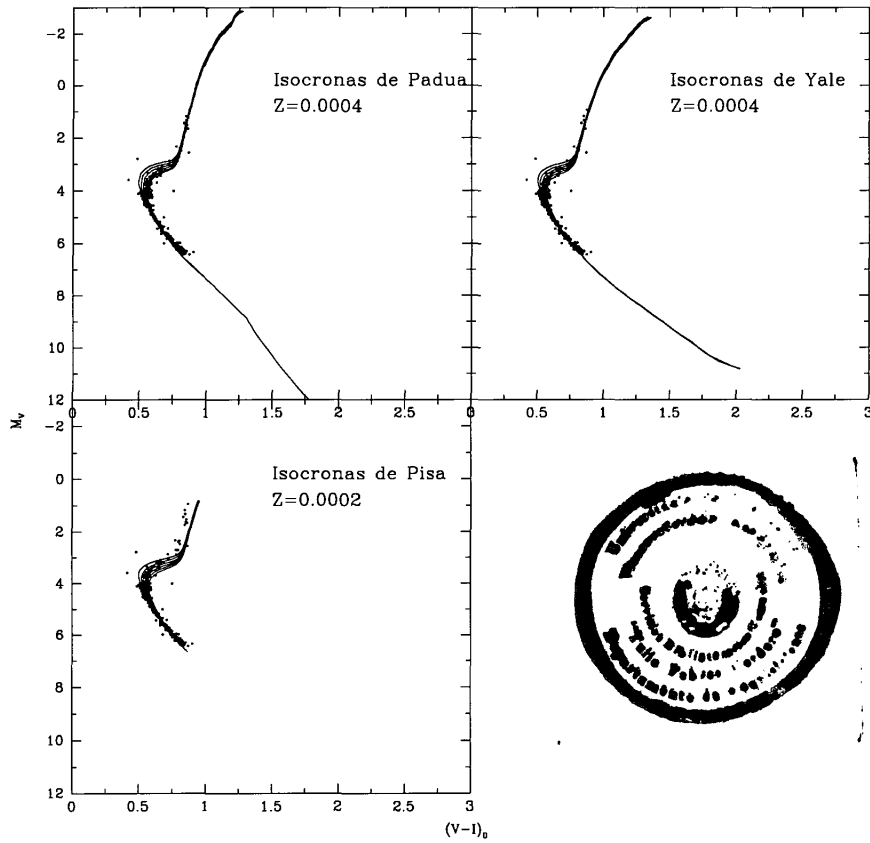


Figura 3.1: Muestra de 373 estrellas del CG NGC 6397 confrontada con tres diferentes grupos de isocronas. Se confronta la muestra de 373 estrellas de NGC 6397 con tres grupos de isocronas de diferentes modelos de evolución estelar: Padua, Yale y Pisa. Las isocronas mostradas representan edades desde 11.00 Gaños (primera a la izquierda) hasta 16.00 Gaños (última a la derecha).

sintéticos en una rejilla de $B=8400$ celdas, y dado que, deseamos determinar la verosimilitud entre pares de muestras (entre una configuración particular y otra diferente) con la misma densidad de estrellas, construimos los DCM sintéticos con la misma cantidad M de puntos que S estrellas contenidas en el DCM observado.

El procedimiento realizado para la construcción de un DCM sintético es el siguiente: dividimos el DCM del CG observado en K franjas espaciadas en 0.1 mag. en el eje M_v y contamos el número de estrellas n_k por franja, de tal forma de que $M=\sum_{k=1}^K n_k$. Por otra parte, consideramos la isocrona de edad t_i con la cual se desea comparar los datos en el plano observacional y dividimos el DCM teórico en el mismo número K de franjas que el DCM observado. Para distribuir los n_k puntos en cada franja K , estos se dispersaron en color alrededor de la media de la isocrona siguiendo una función de distribución acumulativa de la función de probabilidad normal estandarizada (el valor de esta función evaluada para intervalos en el color, multiplicada por n_k , proporciona el número de puntos para ser dispersados por intervalo), y en el eje M_v , una distribución de la posición de puntos generados aleatoriamente dentro de la franja K . Los extremos en color de la dispersión de los puntos viene dada por tres veces la desviación estándar del color en el CG observado para cada M_v , $3\sigma(M_v)$, la cual es calculada para cada cúmulo (ver apéndice A para el caso de NGC 6397). Si cambiamos las semillas o la base generatriz de los números aleatorios que representan las posiciones de los puntos o estrellas sintéticas, generamos otros DCM sintéticos. El procedimiento descrito es equivalente a distribuir n_k estrellas aleatoriamente por franja K , siguiendo una distribución gaussiana con varianza igual a la desviación estándar del color en el CG observado, y con media igual al color medio en la franja K .

Tal como se comentó, dividimos los DCM sintéticos generados en el paso anterior, en 8400 celdas, y contamos el número de estrellas m_i por celda, para

cada DCM. Calculamos el estimador $\log W$ según la expresión dada en la ec. 3.4, primero, para dos DCM sintéticos (generados a partir de una misma isocrona de edad t_i). Luego, calculamos $\log W$ para un nuevo par de diferentes muestras sintéticas y así sucesivamente hasta completar 500 pares. A este tipo de comparaciones entre un CG sintético y otro CG sintético diferente les llamamos comparaciones modelo-modelo. Estas comparaciones de pares de muestras con datos hipotéticos se hacen para luego confrontar la distribución de frecuencias de $\log W$ resultante con la distribución de los datos-modelo, lo cual como veremos, indica el grado de verosimilitud entre el modelo y los datos. Representamos gráficamente la distribución de frecuencias de $\log W$ y le ajustamos una curva gaussiana al histograma de frecuencias obtenido. En la figura 3.2 se ilustra la distribución de frecuencias de $\log W$ para diversas edades de las isocronas de Padua (histogramas no sombreados). En la representación gráfica 3.2, la distribución de frecuencias modelo-modelo es trasladada al origen y la distancia de este a la distribución de frecuencia datos-modelo es caracterizada en función del σ de la distribución modelo-modelo.

Posteriormente, calculamos el estimador $\log W$ comparando la muestra de datos observada y una muestra de datos generada sintéticamente; luego, para un nuevo par conformado de la muestra observada y una muestra sintética diferente de la anterior, y así sucesivamente hasta completar 500 pares de comparaciones entre los 1000 DCM sintéticos construídos y el DCM observado. A esta clase de comparaciones, entre la muestra de datos observada y muestras de datos sintéticas las denominamos comparaciones datos-modelo. Los cálculos de $\log W$ en este paso proporcionan una nueva distribución de W , la cual representamos gráficamente, y ajustamos una curva gaussiana. En la figura 3.2 se ilustran la distribución de frecuencias de $\log W$ obtenidas a partir de las comparaciones datos-modelo

(histogramas sombreados).

La media de la curva gaussiana de la distribución datos-modelo está desplazada una distancia d de la media de la gaussiana de la distribución modelo-modelo. Como criterio de medición del grado de verosimilitud entre ambas distribuciones, seleccionamos tal distancia d entre las medias de las curvas gaussianas ajustadas, ya que este criterio luce práctico y obvio. Otro criterio alternativo podría ser el área común o solapada entre las gaussianas, pero perderíamos información importante de la verosimilitud en aquellos casos que no se presente solapamiento de las gaussianas modelo-modelo y datos-modelo, además que se requeriría de la normalización de las gaussianas modelo-modelo y datos-modelo dado que presentan diferentes amplitudes. Para uniformar las unidades de la ordenada ($\log W$) en todos los casos tratados, la distancia entre las medias mencionadas la caracterizamos en términos de la desviación estándar de la curva gaussiana de la distribución modelo-modelo. Si el modelo describe a las observaciones, la distancia entre las gaussianas es aproximadamente cero, y a medida que la verosimilitud va disminuyendo, la distancia se va tornando más grande. En la figura 3.2, el recuadro de 14.25 Gaños presenta la menor distancia entre las gaussianas comparada con la distancia entre las gaussianas del resto de los recuadros, lo que indica que la verosimilitud entre la isocrona de 14.25 Gaños y el DCM del CG en cuestión es máxima cuando la distancia entre las gaussianas es mínima. En un entorno de la mejor edad estimada, la distancia se incrementa y la verosimilitud disminuye.

Igualmente, aplicamos todos los pasos anteriores considerando los conjuntos de isocronas de Yale y de Pisa, con edades incluidas en un intervalo alrededor de las posibles edades razonables del cúmulo (ver figuras 3.3 y 3.4). La EECG viene dada por la edad t_i de la isocrona que corresponde a la menor distancia obtenida entre las medias de las gaussianas ajustadas a la distribución modelo-modelo y

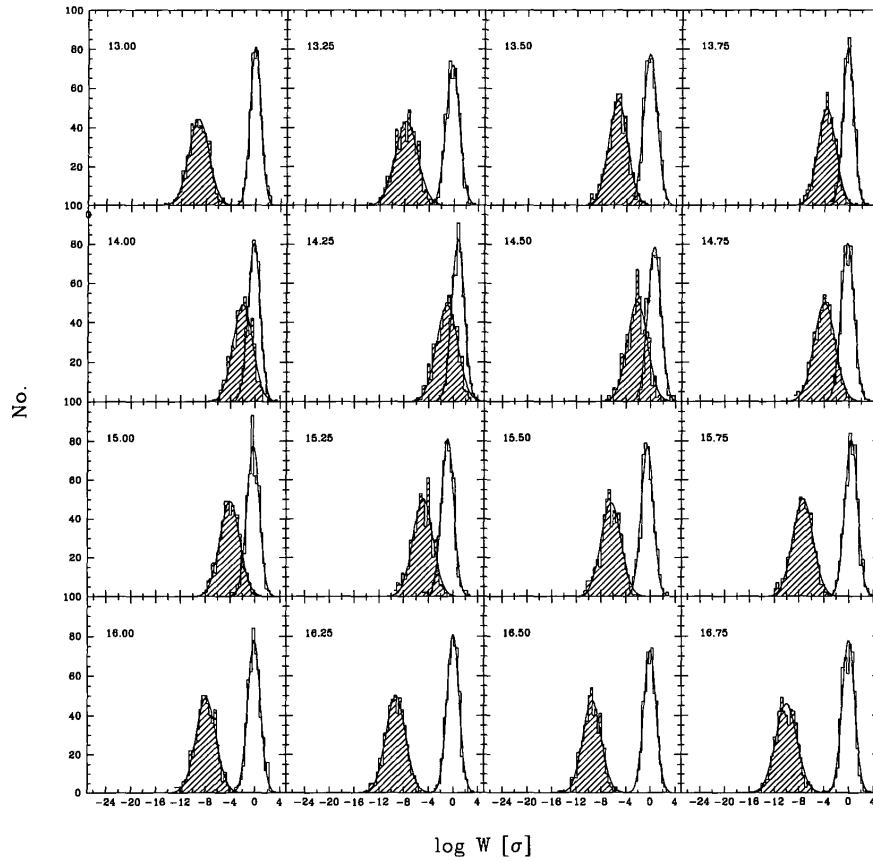


Figura 3.2: Distribución de valores de $\log W$ para diversas edades de las isocronas de Padua de NGC 6397 (muestra de 373 estrellas). Los histogramas no sombreados representan la distribución de frecuencias de $\log W$ obtenida de 500 comparaciones modelo-modelo (provenientes de las isocronas de edad indicada en la esquina superior de cada recuadro), y los histogramas sombreados, la que surge de 500 comparaciones datos-modelo. La mínima distancia entre las medias de las curvas gaussianas ajustadas nos permite establecer la edad óptima la que el modelo describe mejor a los datos (14.25 Gaños). La edad indicada en cada recuadro viene dada en Gaños.

datos-modelo generadas a partir de los modelos de evolución considerados en este trabajo.

Luego de realizar el procedimiento descrito, representamos gráficamente el valor absoluto de la distancia (en unidades del sigma de la distribución modelo-modelo correspondiente) en función de la edad para los conjuntos de isocronas en consideración (figura 3.5).

Un análisis cuantitativo es necesario para concluir satisfactoriamente sobre el intervalo de confianza o la bondad del ajuste del método. Aplicamos una prueba estadística adicional que permite determinar el intervalo de confianza, además de también ofrecer información sobre cual de las isocronas, entre todos los modelos de evolución considerados, es la que mejor ajusta al CG. La prueba estadística que usamos fue la prueba χ^2 . Una descripción de la metodología empleada para determinar el intervalo de confianza es dada en la sub-sección siguiente.

Los resultados obtenidos según el método mencionado que proporciona las isocronas que mejor ajustan a la muestra de 373 datos de NGC 6397 son representados en el DCM de la figura 3.6.

Intervalo de confianza y bondad del ajuste

Tal y como vimos en la sub-sección anterior, al representar gráficamente las distancias entre las medias de las gaussianas de las distribuciones modelo-modelo y datos-modelo en función de la edad, se obtiene una curva con un mínimo en algún valor de t (el mínimo indica cuando la verosimilitud entre el modelo y los

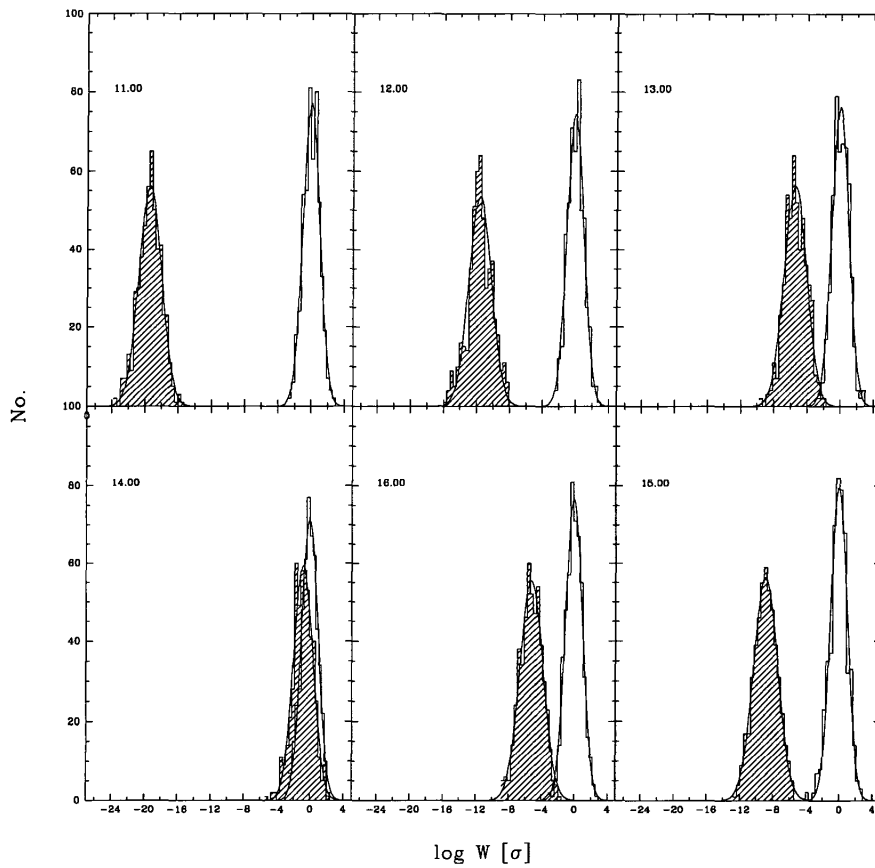


Figura 3.3: Distribución de valores de $\log W$ para diversas edades de las isocronas de Yale de NGC 6397 (muestra de 373 estrellas). Los histogramas no sombreados representan la distribución de frecuencias de $\log W$ obtenida de 500 comparaciones modelo-modelo (provenientes de las isocronas de edad indicada en la esquina superior de cada recuadro), y los histogramas sombreados, la que surge de 500 comparaciones datos-modelo. La mínima distancia entre las medias de las curvas gaussianas ajustadas nos permite establecer la edad óptima a la que el modelo describe mejor a los datos = 14 Gaños.

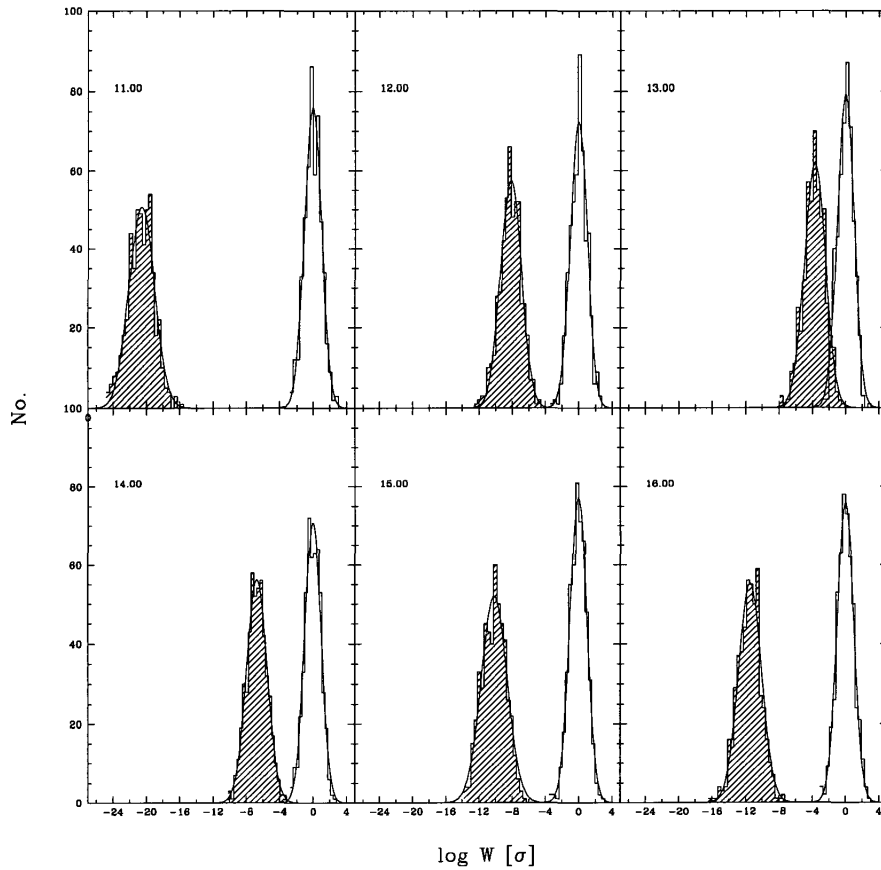


Figura 3.4: Distribución de valores de $\log W$ para diversas edades de las isocronas de Pisa de NGC 6397 (muestra de 373 estrellas). Los histogramas no sombreados representan la distribución de frecuencias de $\log W$ obtenida de 500 comparaciones modelo-modelo (provenientes de las isocronas de edad indicada en la esquina superior de cada recuadro), y los histogramas sombreados, la que surge de 500 comparaciones datos-modelo. La mínima distancia entre las medias de las curvas gaussianas ajustadas nos permite establecer la edad óptima a la que el modelo describe mejor a los datos = 13.00 años.

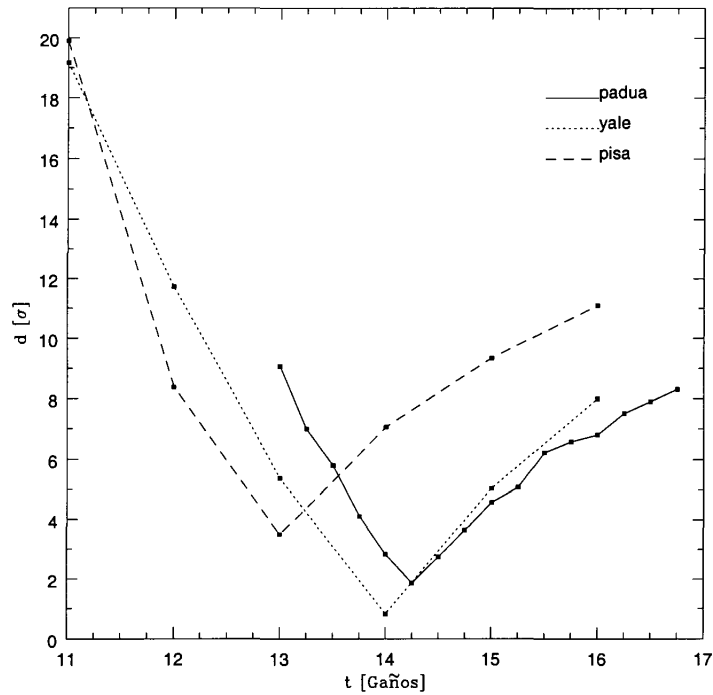


Figura 3.5: Representación gráfica del valor absoluto de la distancia d entre la media de las curvas gaussianas que ajustan a los histogramas datos-modelo y modelo-modelo obtenida para NGC 6397 (muestra de 373 estrellas) y para las isocronas de Padua, Yale y Pisa. La edad estimada de NGC 6397 viene dada por la mínima distancia d dentro de un mismo modelo estelar. La isocrona que mejor ajusta viene dada por el mínimo global entre los tres mínimos estimados (14.25 Gaños para Padua, 14.00 Gaños para Yale y 13.00 Gaños para Pisa).

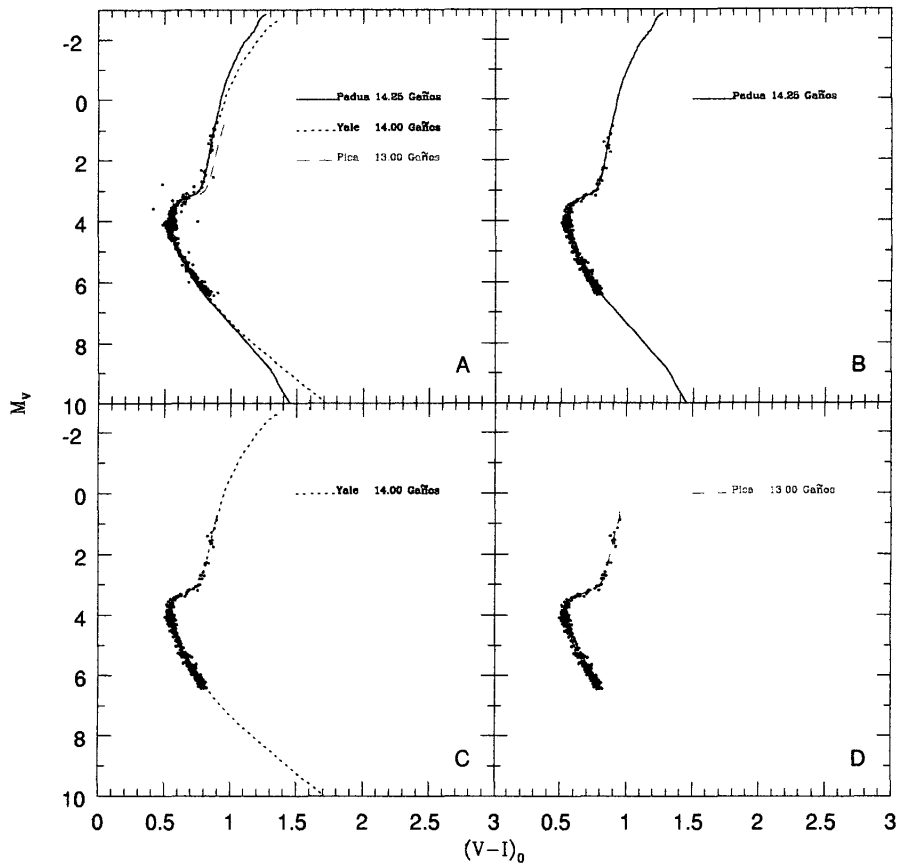


Figura 3.6: DCM de la muestra de 373 estrellas de NGC 6397. A: DCM de la muestra de 373 estrellas observada, mostrando las isocronas de Padua, Yale y Pisa que mejor ajustan a la muestra. B, C y D: DCM de las muestras sintéticas generadas a partir del modelo de Padua, Yale y Pisa que mejor ajustan a la muestra observada, según resultados de la prueba χ^2 (ver tabla 3.1).

datos es máxima). Intuitivamente, la tasa con que se alejan entre sí las medias de las gaussianas del valor más próximo entre las medias en función de la edad, variará dependiendo del modelo de evolución, interpretándose tal tasa o velocidad como la derivada de la curva. El error de la estimación puede interpretarse como el inverso de la derivada de la curva. Tal y como veremos a continuación, una manera objetiva y universalmente conocida de cuantificar el intervalo de confianza (región en la que el mejor estimado del parámetro tiene oportunidad de caer con una específica probabilidad) es mediante el uso de χ^2 .

El análisis que se siguió en este caso, se hizo partiendo de la siguiente hipótesis física, llamada hipótesis nula:

La distribución de la muestra de datos originada a partir de la isocrona de edad t_i representa la distribución de la muestra de datos del CG.

χ^2 cuantifica la concordancia entre las dos muestras (sintética y observada): a menor valor de χ^2 , mejor ajuste entre las muestras. También ofrece información en cuanto al rechazo o no de la hipótesis nula a un coeficiente de confianza. El intervalo de confianza es el intervalo en el cual el menor valor de χ^2 , o mejor estimado, tiene oportunidad de pertenecer, a un específico coeficiente de confianza.

Si calculamos χ^2 entre la muestra de datos observada y sintética provenientes de edades del CG razonables, el valor de χ^2 es mínimo a una específica edad (llamemos al mínimo χ^2 , χ^2_{min}). Si definimos $\Delta\chi^2 = \chi^2 - \chi^2_{min}$, $\Delta\chi^2$ aumentará a medida que nos alejamos del mejor estimado. Si esta medida excede de algún límite fijo o coeficiente de confianza, rechazamos la hipótesis nula (Bevington *et al.* 1992 y Press *et al.* 1986).

Veamos la ecuación (3.4),

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^B \frac{(s_i - E_i)^2}{E_i} \quad (3.4)$$

donde s_i es el número de estrellas observadas en la celda i y E_i el valor esperado de las m estrellas por celda i (calculado como el promedio de m_i por celda i para 500 realizaciones diferentes obtenidas a partir de una isocrona en particular, por ejemplo). Tal ecuación no nos sería de utilidad en nuestro caso dado que descartaríamos información en aquellas celdas donde $s_i \neq 0$ y conjuntamente donde hayan celdas vacías ($E_i=0$) en las 500 realizaciones. Esto da un χ^2 infinito, y en este caso los s_i no pueden ser obtenidos de los E_i . Una apropiada estadística en nuestro caso es la sugerida por Press *et al.* 1986, empleado en la comparación de dos conjuntos de datos: la muestra de datos observada (con s_i estrellas dentro de la celda i), y una muestra de datos sintética originada a partir de una isocrona particular (con m_i puntos o estrellas dentro de la celda i), con la forma:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^B \frac{(s_i - m_i)^2}{s_i + m_i} \quad (3.5)$$

Al comparar las ecuaciones 3.4 y 3.5, notamos que el denominador de la ec. 3.5 no es simplemente el promedio de s_i y m_i (quienes serían un estimador de E_i en la ec. 3.4). Más bien, es dos veces el promedio, es decir, la suma. La razón de esto es que cada término en una suma de χ^2 se asume que aproxima la raíz de una cantidad distribuida normalmente, con la varianza igual a uno. La varianza de la diferencia de dos cantidades normales es la suma de sus varianzas individuales, y no el promedio (Press *et al.* 1986).

Luego de estimar χ^2 entre la muestra de datos observada y diferentes muestras sintéticas generadas a partir de diferentes modelos evolutivos y para todas

aquellas edades del CG razonables, finalmente calculamos $\Delta\chi^2$ para cada uno de los modelos evolutivos considerados. Dado que estamos interesados en el intervalo de confianza de cada parámetro tomado separadamente, el número de grados de libertad para estimar el intervalo es igual a uno (Press *et al.* 1986). Los valores de los niveles de confianza para un parámetro y sus equivalentes porcentajes de probabilidad de unos datos distribuidos normalmente fueron tomados de tablas estadísticas (Press *et al.* 1986). Escogimos como coeficiente de confianza 0.99 para todos nuestros resultados, lo que indica que hay un 99% de oportunidad de que la mejor estimación de la edad caiga dentro de intervalo de confianza determinado.

Los resultados obtenidos de $\Delta\chi^2$ para la muestra de 373 estrellas de NGC 6397 y para los tres modelos de evolución estelar a edades razonables, son representados en la figura 3.7. Algunos valores de los niveles de confianza son representados también. La hipótesis nula es rechazada para aquellas edades que se encuentran por fuera del nivel de confianza 0.99.

Formalmente, los resultados obtenidos por este método implican que la distribución de las muestra de 373 estrellas originada a partir del modelo de Yale de evolución estelar describe mejor la muestra de 373 estrellas de NGC 6397 que la muestra de 373 estrellas generada a partir del modelo de Padua, y que la muestra generada a partir del modelo de Pisa, a la edad mejor estimada (ver tabla 3.1).

Muestra de 1187 estrellas

Nos valimos de que los valores de las magnitudes visuales de la muestra de las 1187 estrellas estaban contenidas dentro del intervalo en M_v de las fases

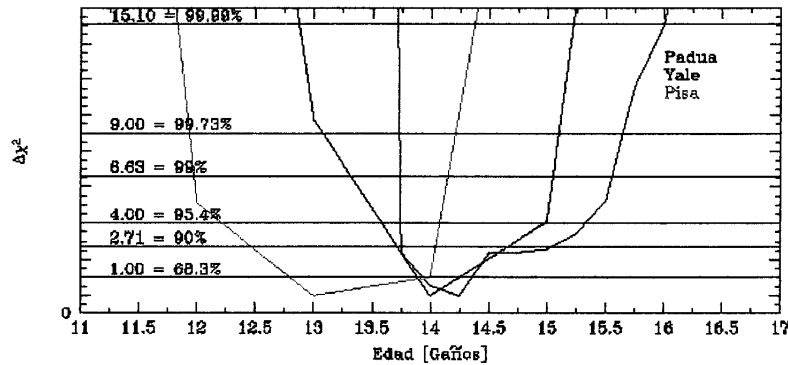


Figura 3.7: $\Delta\chi^2$ en función de la edad para la muestra de 373 estrellas de NGC 6397 y para los conjuntos de isocronas de Padua, Yale y Pisa Rechazamos las edades que caen por fuera del nivel de confianza de 0.99.

evolutivas consideradas de las isocronas del grupo de Padua y Yale (ver subsección anterior), para reproducir resultados con tal muestra conteniendo estrellas en la SP y en la RSG y RGR. Los resultados obtenidos aplicando el método anterior están resumidos en la tabla 3.1. En la figura 3.8 ilustramos la muestra de datos conformada por 1187 estrellas observadas en el DCM junto con el conjunto de isocronas del grupo de Padua y de Yale.

Los resultados obtenidos para la confrontación de la distribución datos-modelo y modelo-modelo, para las isocronas del modelo evolutivo de Padua, y para edades entre 13.00 Gaños y 16.75 Gaños (en pasos de 0.25 Gaños) están representados en la figura 3.10. Igualmente, las comparaciones entre la distribución datos-modelo y modelo-modelo para las isocronas del modelo evolutivo de Yale, (y para edades entre 11.00 y 16.00 Gaños) se ilustran en la figura 3.11.

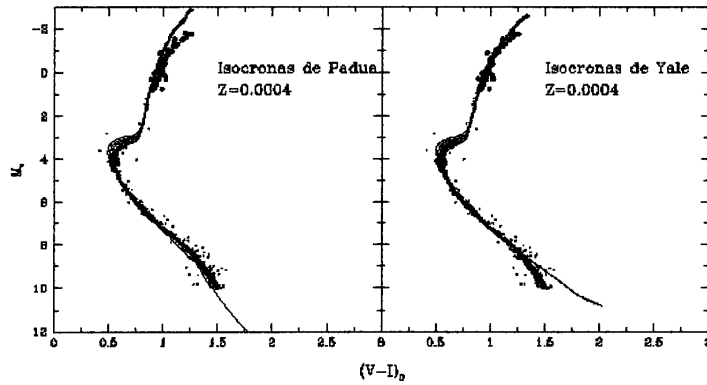


Figura 3.8: Muestra de 1187 estrellas del CG NGC 6397 confrontada con dos grupos de isocronas. Se confronta una muestra de datos de NGC 6397 con dos grupos de isocronas de diferentes modelos de evolución estelar: Padua y Yale, con las isocronas desde 11.00 Gaños (primera a la izquierda) hasta 16.00 Gaños (última a la derecha).

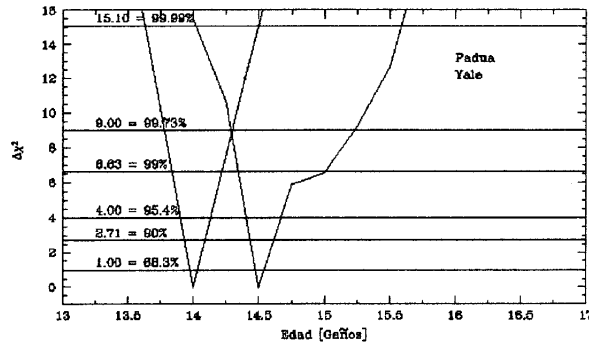


Figura 3.9: $\Delta\chi^2$ en función de la edad para la muestra de 1187 estrellas de NGC 6397. Rechazamos aquellas edades que caen por fuera de un nivel de confianza de 0.99.

La representación gráfica del valor absoluto de la distancia d en función de t se ilustra en la figura 3.12.

Los resultados de la prueba χ^2 para esta muestra de estrellas y para los conjuntos de isocronas de Padua y Yale, están representados en la figura 3.9.

Los resultados obtenidos por este método implican que la distribución de las muestras de 1187 estrellas originada a partir del modelo de Yale de evolución estelar describe mejor la muestra de 1187 estrellas de NGC 6397 que la muestra de 1187 estrellas generada a partir del modelo de Padua, a la edad mejor estimada (ver tabla 3.1). Los resultados obtenidos según este nuevo método, de las mejores isocronas que ajustan a la muestra de datos son representados en el DCM de la figura 3.13.

3.2.2 La edad de M92

El procedimiento descrito en la sección 3.2.1 fue aplicado a dos muestras de datos observacionales de M92: una muestra de 1482 estrellas (considerando las isocronas de Padua, Yale y Pisa) y otra de 4846 (considerando sólo las isocronas de Padua y de Yale).

Muestra de 1482 estrellas

Los resultados obtenidos para la estimación de la mejor edad están resumidos en la tabla 3.1. El intervalo que cubre las isocronas de Pisa en M_v es $0.795 < M_v < 6.451$. Al aplicar el proceso de remoción de estrellas que no correspondiesen a

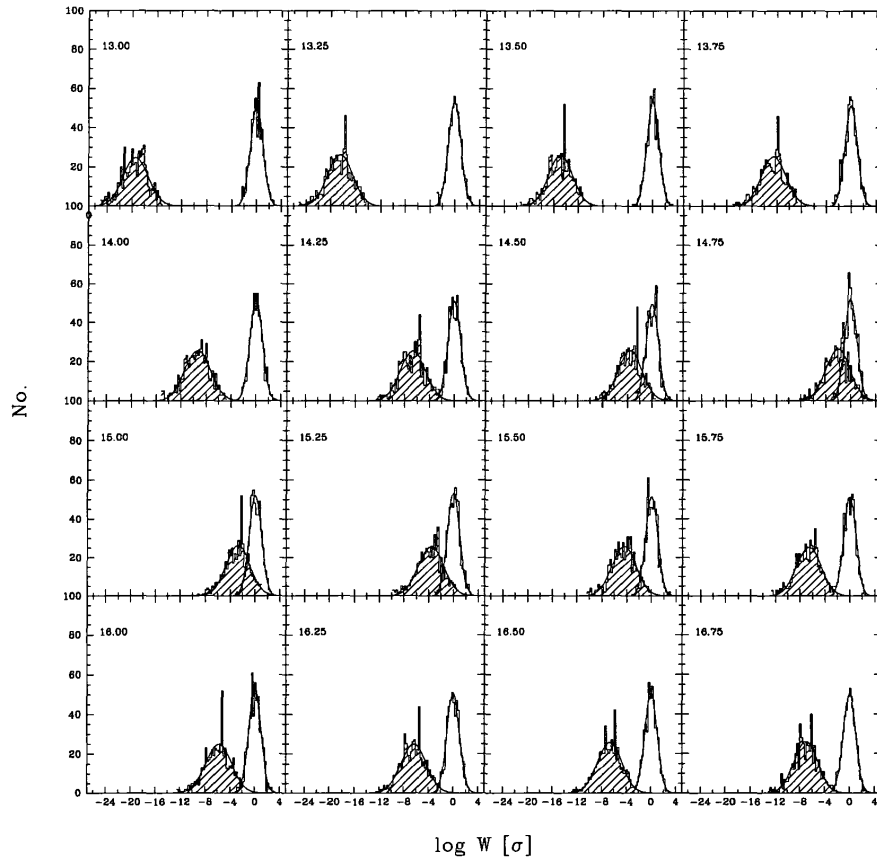


Figura 3.10: Distribución de valores de $\log W$ para diversas edades de las isocronas de Padua, obtenida para una muestra de 1187 estrellas de NGC 6397. Los histogramas no sombreados representan la distribución de frecuencias de $\log W$ obtenida de 500 comparaciones modelo-modelo (provenientes de las isocronas de edad indicada en la esquina superior de cada recuadro), y los histogramas sombreados, la que surge de 500 comparaciones datos-modelo. La mínima distancia entre las medias de las curvas gaussianas ajustadas nos permite establecer la edad óptima (14.75 Gaños) a la que el modelo describe mejor a los datos.

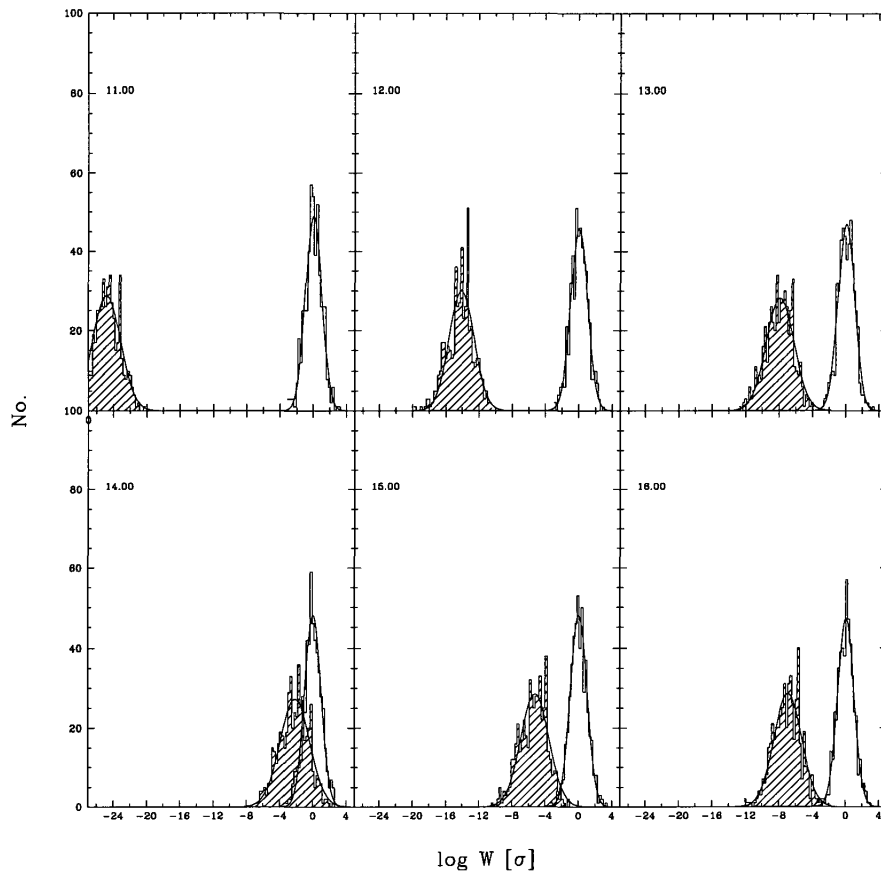


Figura 3.11: Distribución de valores de $\log W$ para diversas edades de las isocronas de Yale, obtenida para una muestra de 1187 estrellas de NGC 6397. Los histogramas no sombreados representan la distribución de frecuencias de $\log W$ obtenida de 500 comparaciones modelo-modelo (provenientes de las isocronas de edad indicada en la esquina superior de cada recuadro), y los histogramas sombreados, la que surge de 500 comparaciones datos-modelo. La mínima distancia entre las medias de las curvas gaussianas ajustadas nos permite establecer la edad óptima (14.00 Gaños) a la que el modelo describe mejor a los datos.

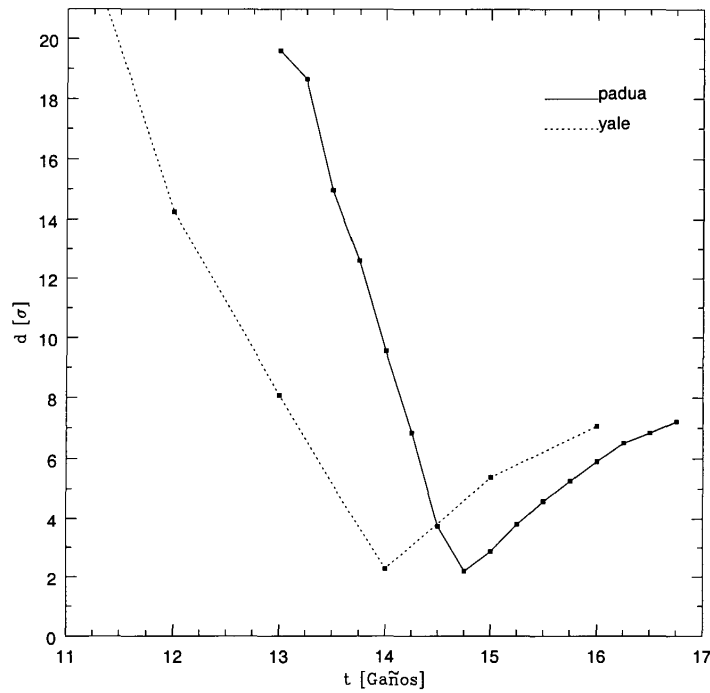


Figura 3.12: Representación gráfica del valor absoluto de la distancia d entre la media de las curvas gaussianas que ajustan a los histogramas datos-modelo y modelo-modelo para las isocronas de Padua y Yale. La edad de NGC 6397 viene dada por la mínima distancia d dentro de un mismo modelo estelar. La isocrona que mejor ajusta viene dada por el mínimo global entre los dos mínimos estimados, 14.75 Gaños para Padua y 14.00 Gaños para Yale.

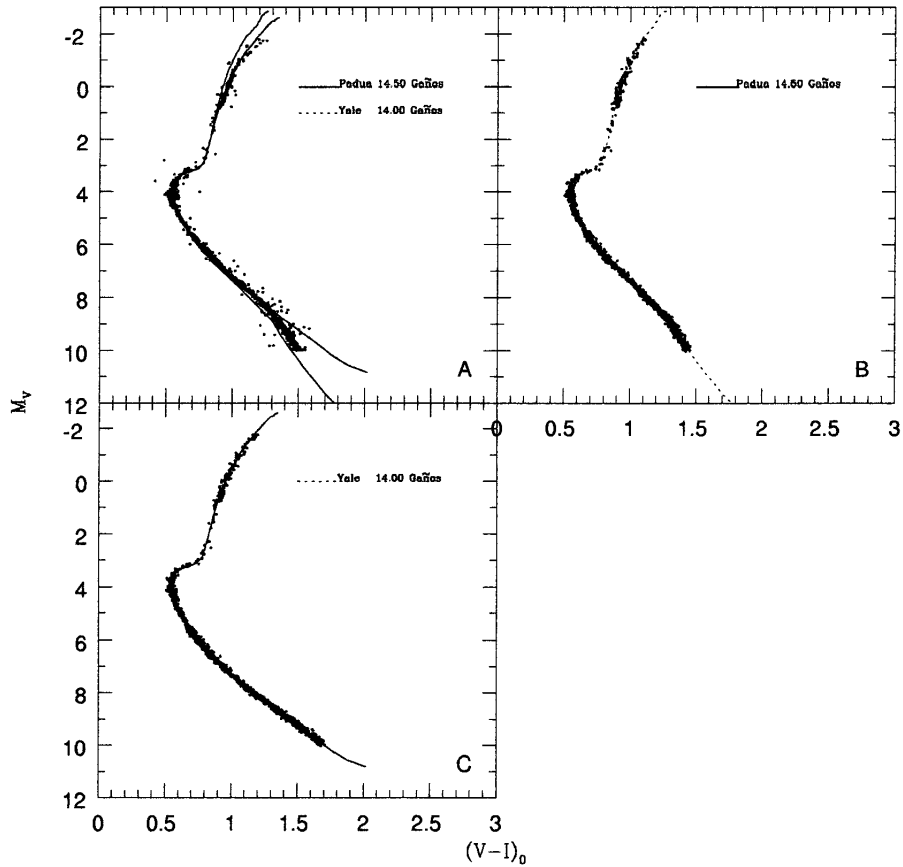


Figura 3.13: DCM de la muestra de 1187 estrellas de NGC 6397 con las isocronas de Padua y Yale que mejor ajustan a esta, según los resultados obtenidos en este trabajo. A: DCM de la muestra de 1187 estrellas observadas, mostrando las isocronas de Padua y Yale que mejor ajustan a la muestra. B y C: DCM de las muestras sintéticas generadas a partir del modelo de Padua y Yale que mejor ajustan a la muestra observada, según resultados de la prueba χ^2 (ver tabla 3.1).

ninguna fase evolutiva de las isocronas consideradas, el número total de estrellas a considerar fue de 1482. La figura 3.14 ilustra la muestra de 1482 datos observados confrontados con las isocronas pertenecientes a los tres modelos de evolución estelar mencionados.

Los resultados obtenidos de la confrontación de la distribución datos-modelo y modelo-modelo, para las isocronas del modelo evolutivo de Padua, y para edades entre 13.00 Gaños y 16.75 Gaños (en pasos de 0.25 Gaños) están representados en la figura 3.16. Igualmente, las comparaciones entre la distribución datos-modelo y modelo-modelo para las isocronas del modelo evolutivo de Yale, y para edades entre 11.00 y 16.00 Gaños se ilustran en la figura 3.17. Asimismo, aplicamos el procedimiento anterior de comparación para la distribución datos-modelo y modelo-modelo considerando las isocronas de Pisa para edades entre 11.00 y 16.00 Gaños (ver figura 3.18).

Luego de medir las distancias entre las medias de las gaussianas ajustadas de los histogramas datos-modelo y modelo-modelo de las figuras 3.16, 3.17 y 3.18, para las isocronas de Padua, Yale y Pisa, estas las representamos gráficamente en función de la edad (ver figura 3.19). Los resultados obtenidos de χ^2 para la muestra de 1482 de M92 y considerando los 3 modelos de evolución estelar a edades razonables, son representados en la figura 3.15.

Los resultados obtenidos por este método implican que la distribución de la muestra de 1187 estrellas originada a partir del modelo de Padua de evolución estelar describe mejor la muestra de 1187 estrellas de M92 que la muestra de 1187 estrellas generada a partir del modelo de Yale, y mejor que la muestra generada a partir del modelo de Pisa, a la edad mejor estimada (ver tabla 3.1). Los resultados obtenidos según este nuevo método, de las mejores isocronas que

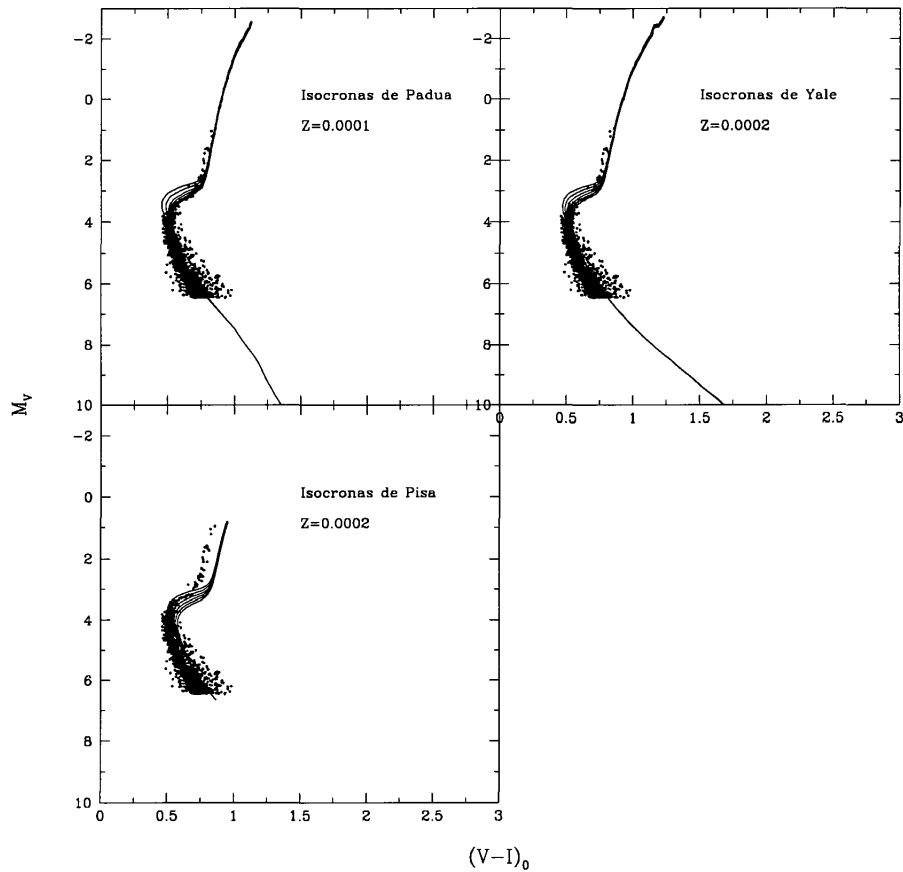


Figura 3.14: Muestra de 1482 estrellas del CG M92 confrontado con tres grupos de isocronas. Se confrontan la muestra de 1482 datos de M92 con tres grupos de isocronas de diferentes modelos de evolución estelar: Padua, Yale y Pisa, con las isocronas desde 11.00 Gaños (primera a la izquierda) hasta 16.00 Gaños (última a la derecha).

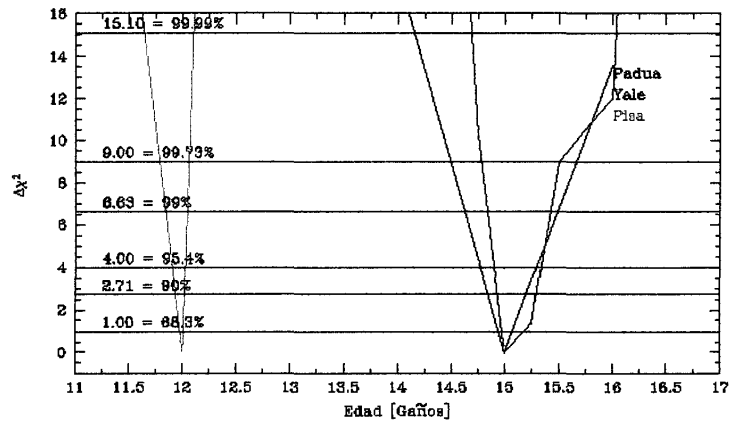


Figura 3.15: $\Delta\chi^2$ en función de la edad para la muestra de 1482 estrellas de M92 y para los conjuntos de isocronas de Padua, Yale y Pisa.

ajustan a la muestra de datos son representados en el DCM de la figura 3.20.

Muestra de 4846 estrellas

Nos valimos de que los valores de las magnitudes visuales de la muestra de las 4846 estrellas estaban contenidas dentro del intervalo en M_v de las fases evolutivas consideradas de las isocronas del grupo de Padua y Yale (ver sub-sección anterior), para reproducir resultados con tal muestra conteniendo estrellas en la SP y en la RSG y RGR. En la figura 3.21 ilustramos la muestra de datos conformada por 4846 estrellas observadas en el DCM junto con el conjunto de isocronas del grupo de Padua y de Yale.

Después de aplicar todos los pasos del procedimiento descrito en la sección

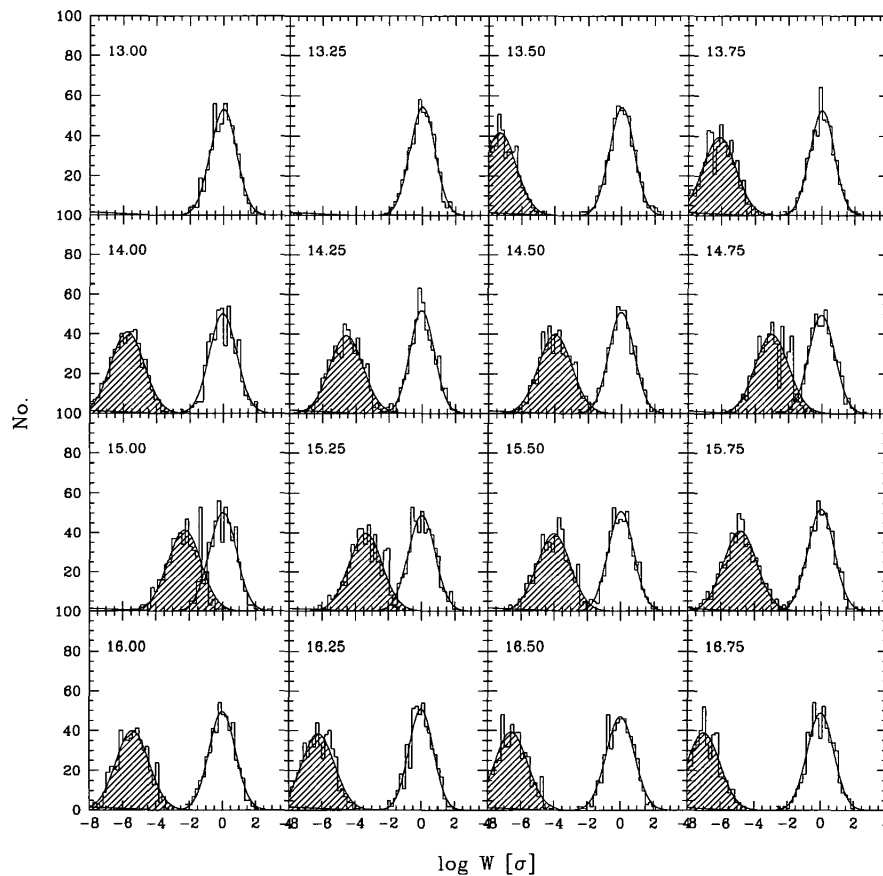


Figura 3.16: Distribución de valores de $\log W$ para diversas edades de las isocronas de Padua, obtenida para una muestra de 1482 estrellas de M92. Los histogramas no sombreados representan la distribución de frecuencias de $\log W$ obtenida de 500 comparaciones modelo-modelo (provenientes de las isocronas de edad indicada en la esquina superior de cada recuadro), y los histogramas sombreados, la que surge de 500 comparaciones datos-modelo. La mínima distancia entre las medias de las curvas gaussianas ajustadas nos permite establecer la edad óptima (15.00 Gaños) a la que el modelo describe mejor a los datos.

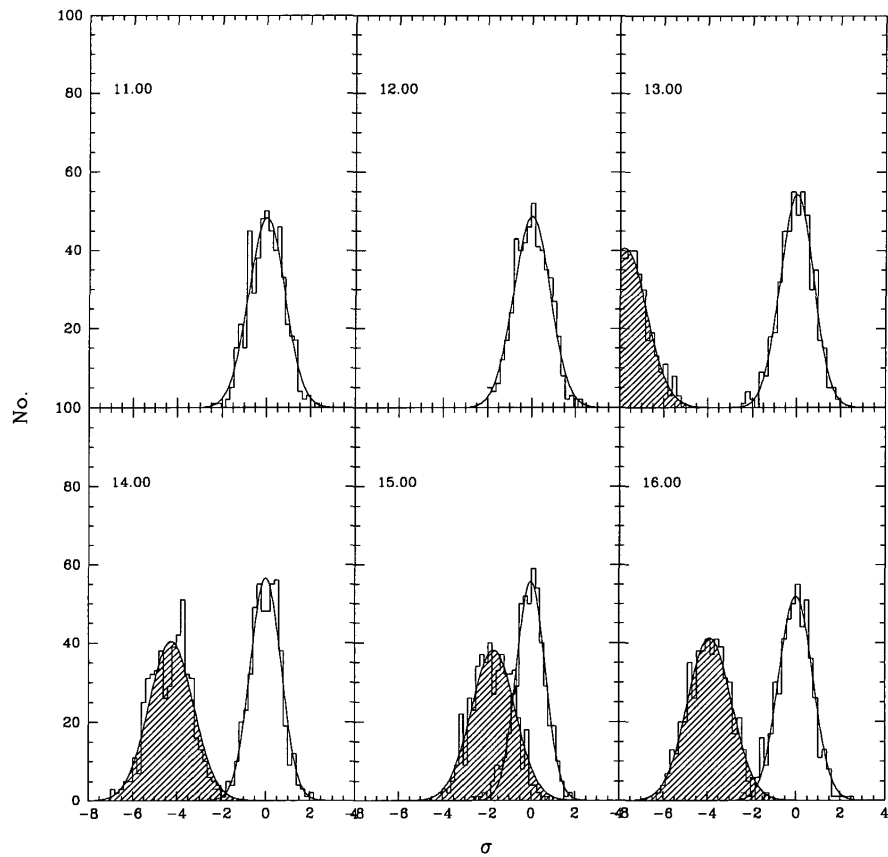


Figura 3.17: Distribución de valores de $\log W$ para diversas edades de las isocronas de Yale, obtenida para una muestra de 1482 estrellas de M92. Los histogramas no sombreados representan la distribución de frecuencias de $\log W$ obtenida de 500 comparaciones modelo-modelo (provenientes de las isocronas de edad indicada en la esquina superior de cada recuadro), y los histogramas sombreados, la que surge de 500 comparaciones datos-modelo. La mínima distancia entre las medias de las curvas gaussianas ajustadas nos permite establecer la edad óptima (15.00 Gaños) a la que el modelo describe mejor a los datos.

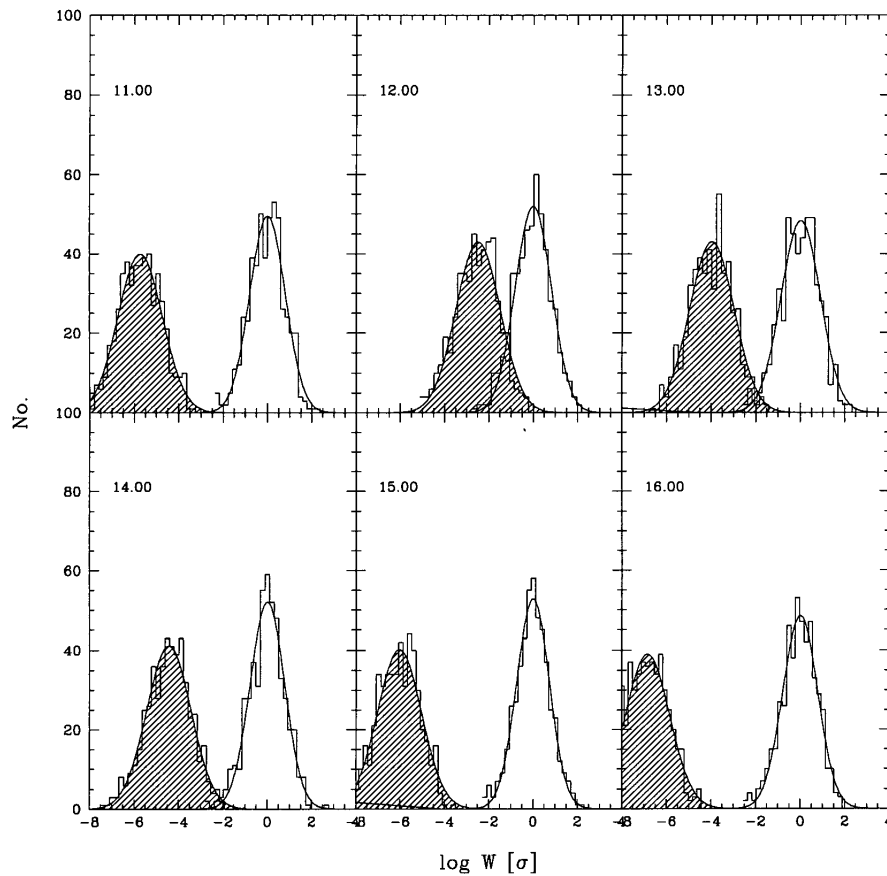


Figura 3.18: Distribución de valores de $\log W$ para diversas edades de las isocronas de Pisa, obtenida para una muestra de 1482 estrellas de M92. Los histogramas no sombreados representan la distribución de frecuencias de $\log W$ obtenida de 500 comparaciones modelo-modelo (provenientes de las isocronas de edad indicada en la esquina superior de cada recuadro), y los histogramas sombreados, la que surge de 500 comparaciones datos-modelo. La mínima distancia entre las medias de las curvas gaussianas ajustadas nos permite establecer la edad óptima (12.00 Gaños) a la que el modelo describe mejor a los datos.

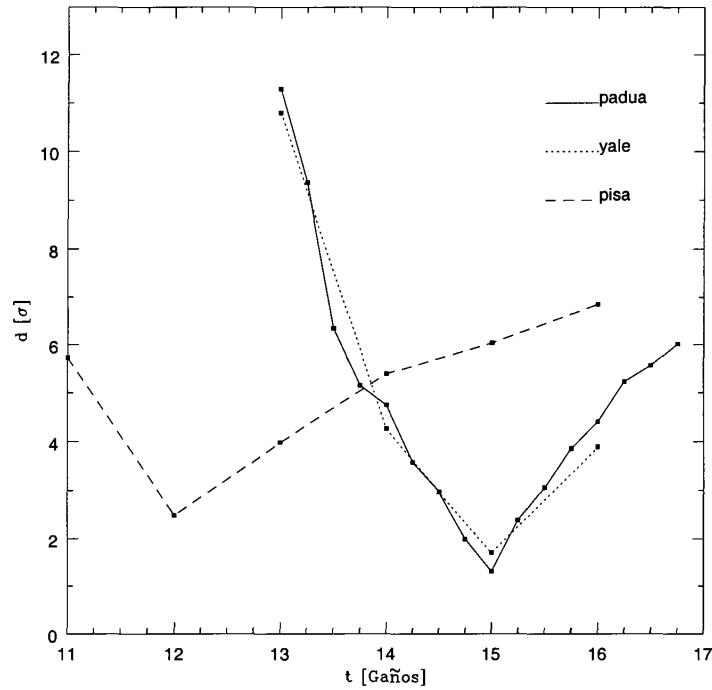


Figura 3.19: Representación gráfica del valor absoluto de la distancia d entre la media de las curvas gaussianas que ajustan a los histogramas datos-modelo y modelo-modelo para las isocronas de Padua, Yale y Pisa. La edad de M92 viene dada por la mínima distancia d dentro de un mismo modelo estelar. La isocrona que mejor ajusta viene dada por el mínimo global entre los tres mínimos estimados, 15.00 Gaños para Padua y Yale, y 12.00 Gaños para Pisa.

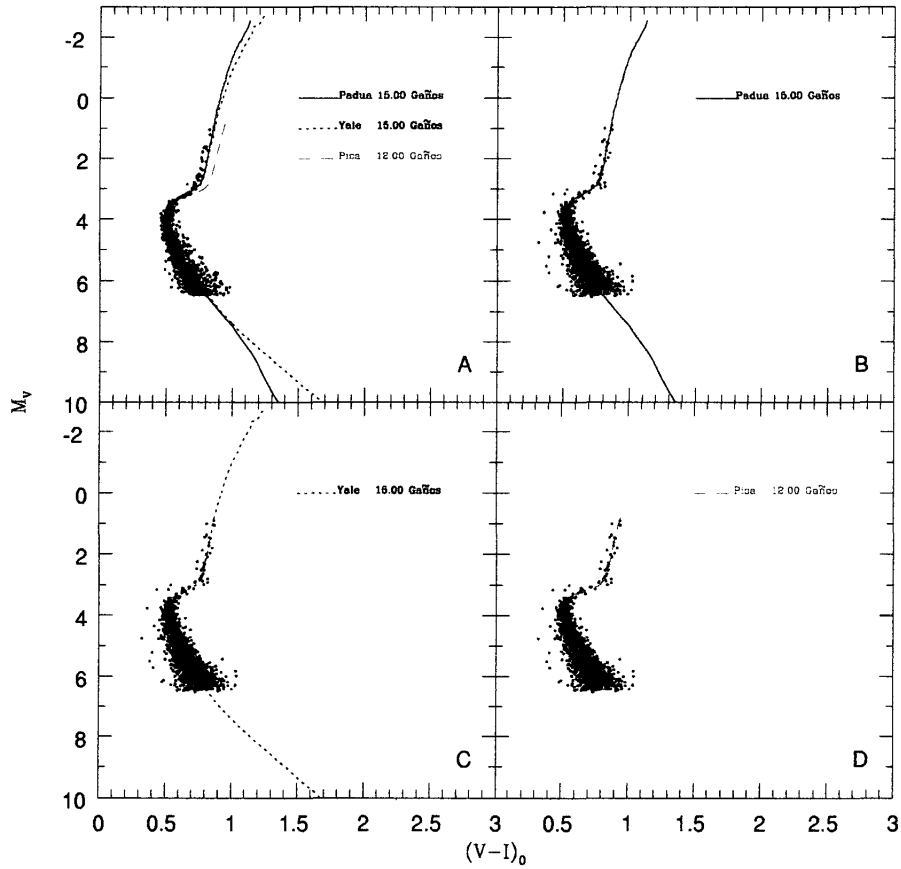


Figura 3.20: DCM de la muestra de 1482 estrellas de M92 con las isocronas de Padua, Yale y Pisa que mejor ajustan a esta. A: DCM de la muestra de 1187 estrellas observadas, mostrando las isocronas de Padua, Yale y Pisa que mejor ajustan a ésta. B, C y D: DCM de las muestras sintéticas generadas a partir del modelo de Padua, Yale y Pisa que mejor ajustan a la muestra observada, según resultados de la prueba χ^2 (ver tabla 3.1).

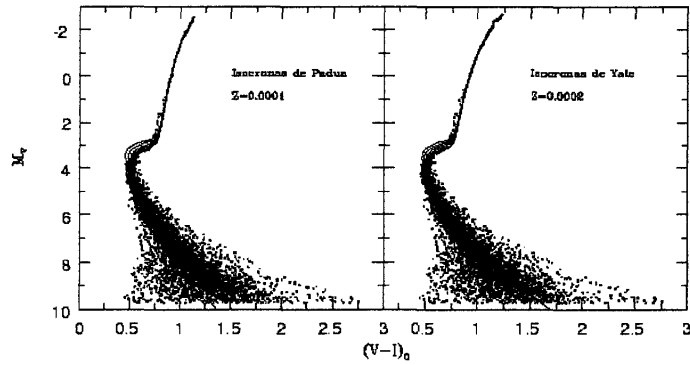


Figura 3.21: Muestra de 4846 estrellas del CG M92 confrontado con dos grupos de isocronas. Se confronta una muestra de datos de 4846 estrellas de M92 con dos grupos de isocronas de diferentes modelos de evolución estelar, Padua y Yale, con las isocronas desde 11.00 Gaños (primera a la izquierda) hasta 16.00 Gaños (última a la derecha).

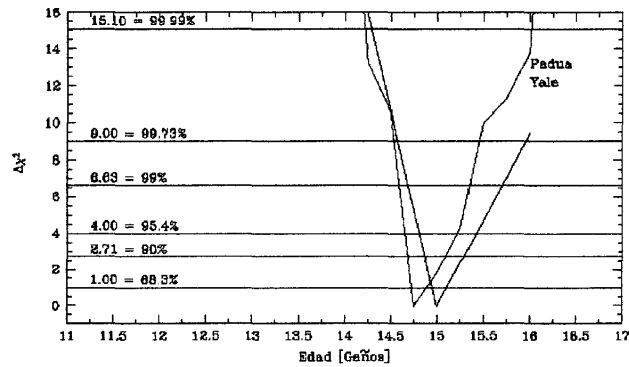


Figura 3.22: $\Delta\chi^2$ en función de la edad para la muestra de 4846 estrellas de M92 y para los conjuntos de isocronas de Padua y Yale.

3.2.1, los resultados obtenidos para la confrontación de la distribución datos-modelo y modelo-modelo, para las isocronas del modelo evolutivo de Padua, y para edades entre 13.00 Gaños y 16.75 Gaños (en pasos de 0.25 Gaños) están representados en la figura 3.23. Igualmente, las comparaciones entre la distribución datos-modelo y modelo-modelo para las isocronas del modelo evolutivo de Yale, (y para edades entre 11.00 y 16.00 Gaños) se ilustra en la figura 3.24.

Luego de medir la distancia entre las medias de las gaussianas ajustadas de los histogramas datos-modelo y modelo-modelo de las figuras 3.23 y 3.24, para las isocronas de Padua y Yale, estas las representamos gráficamente en función de la edad (ver figura 3.25). Los resultados de la prueba χ^2 para esta muestra de estrellas y para los conjuntos de isocronas de Padua y Yale se representan en la figura 3.22. Un resumen de los mejores estimados de la edad para cada modelo de evolución son dados en la tabla 3.1.

Los resultados obtenidos por este método implican que la distribución de las muestra de 4846 estrellas originada a partir del modelo de Padua describe mejor la muestra de 4846 estrellas de M92 que la muestra de 4846 estrellas generada a partir del modelo de Yale, a la edad mejor estimada (ver tabla 3.1). Los resultados obtenidos de las mejores isocronas que ajustan a la muestra de datos son representados en el DCM de la figura 3.26.

3.2.3 La edad de M3

El procedimiento descrito en la sección 3.2.1 fue aplicado a dos muestras de datos observacionales de M3 : una muestra de de 4929 estrellas (considerando las isocronas de Padua, Yale y Pisa) y otra de 10333 estrellas (considerando

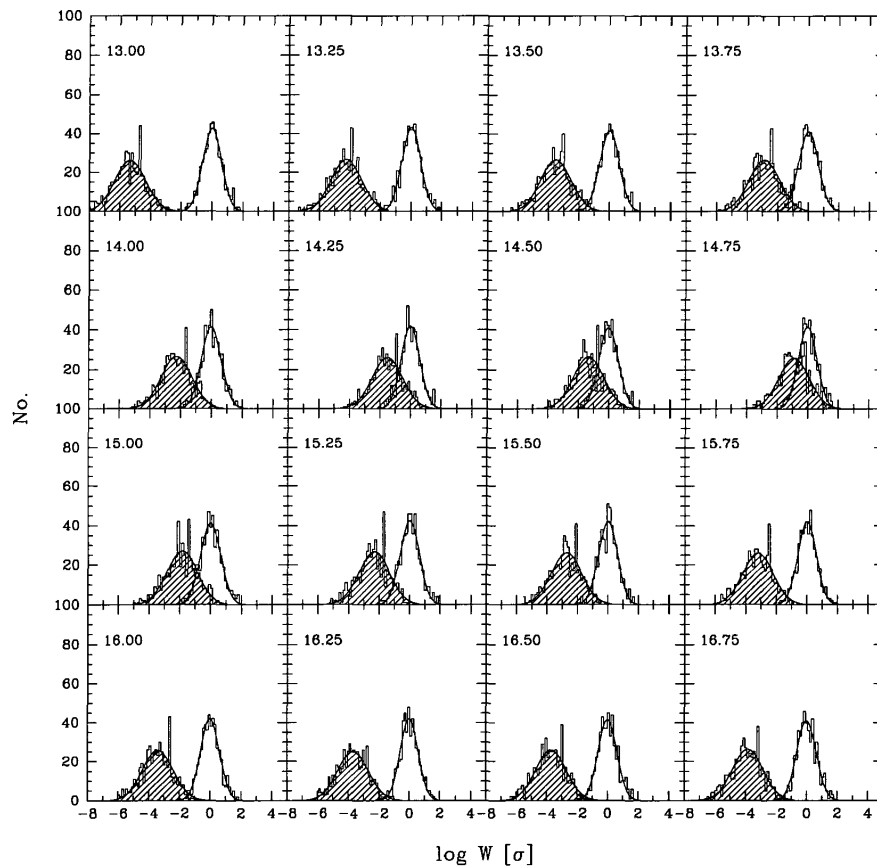


Figura 3.23: Distribución de valores de $\log W$ para diversas edades de las isocronas de Padua, obtenida para una muestra de 4846 estrellas de M92. Los histogramas no sombreados representan la distribución de frecuencias de $\log W$ obtenida de 500 comparaciones modelo-modelo (provenientes de las isocronas de edad indicada en la esquina superior de cada recuadro), y los histogramas sombreados, la que surge de 500 comparaciones datos-modelo. La mínima distancia entre las medias de las curvas gaussianas ajustadas nos permite establecer la edad óptima (14.75 Gaños) a la que el modelo describe mejor a los datos.

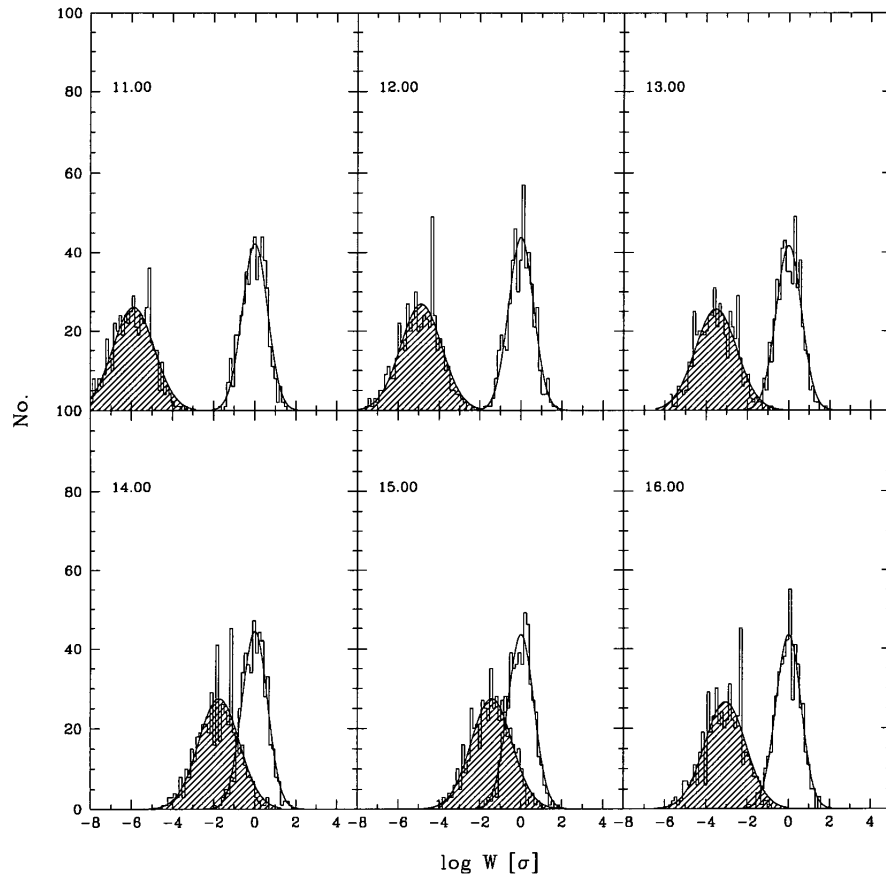


Figura 3.24: Distribución de valores de $\log W$ para diversas edades de las isocronas de Yale, obtenida para una muestra de 4846 estrellas de M92. Los histogramas no sombreados representan la distribución de frecuencias de $\log W$ obtenida de 500 comparaciones modelo-modelo (provenientes de las isocronas de edad indicada en la esquina superior de cada recuadro), y los histogramas sombreados, la que surge de 500 comparaciones datos-modelo. La mínima distancia entre las medias de las curvas gaussianas ajustadas nos permite establecer la edad óptima (15.00 Gaños) a la que el modelo describe mejor a los datos.

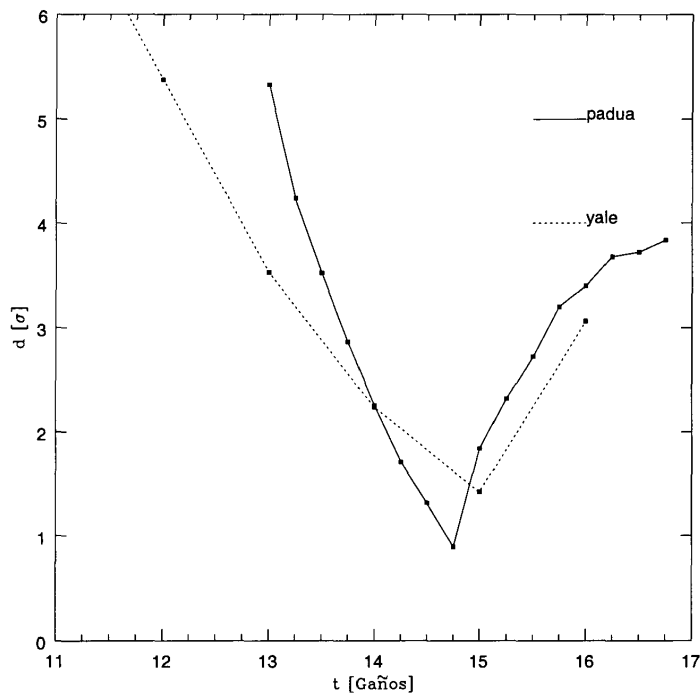


Figura 3.25: Representación gráfica del valor absoluto de la distancia d entre la media de las curvas gaussianas que ajustan a los histogramas datos-modelo y modelo-modelo para las isocronas de Padua y Yale. La edad de M92 viene dada por la mínima distancia d dentro de un mismo modelo estelar. La isocrona que mejor ajusta viene dada por el mínimo global entre los dos mínimos estimados, 14.75 Gaños para Padua y 15.00 Gaños para Yale.

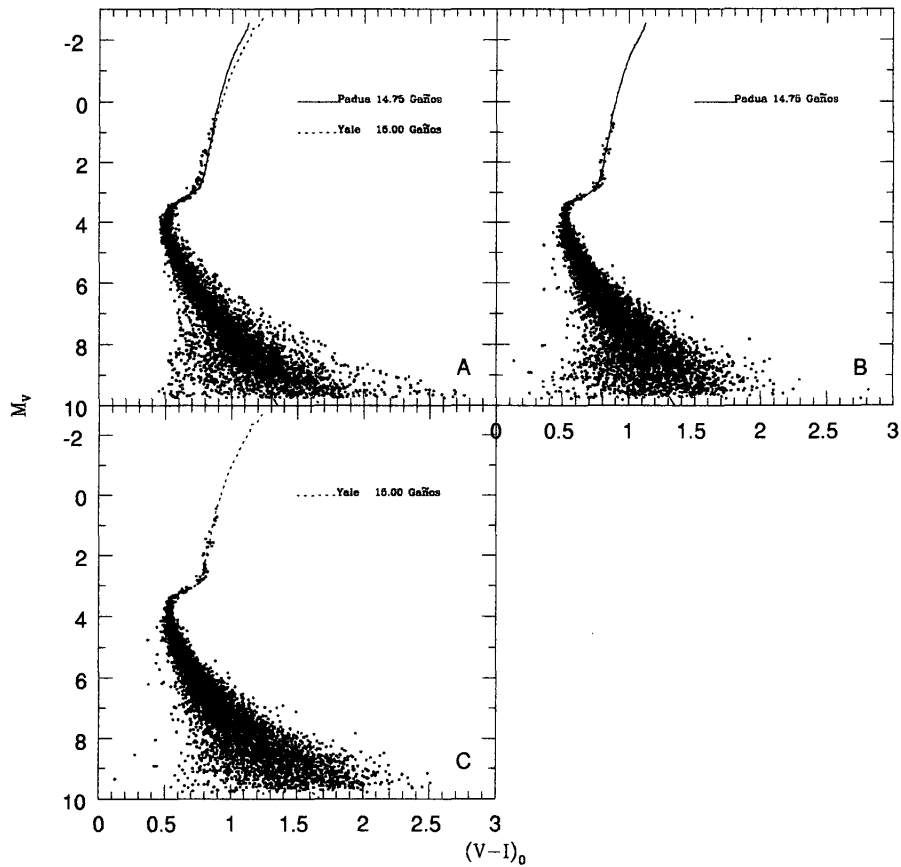


Figura 3.26: DCM de la muestra de 4846 estrellas de M92 con las isocronas de Padua y Yale que mejor ajustan a esta. A: DCM de la muestra de 4846 estrellas observadas, mostrando las isocronas de Padua y Yale que mejor ajustan a ésta. B y C: DCM de las muestras sintéticas generadas a partir del modelo de Padua y Yale que mejor ajustan a la muestra observada, según el resultado de la prueba χ^2 (ver tabla 3.1).

sólamente las isocronas de Padua y de Yale).

Muestra de 4929 estrellas

Los resultados obtenidos para la estimación de la mejor edad están resumidos en la tabla 3.1. El intervalo que cubre las isocronas de Pisa en M_v es $0.94 < M_v < 6.44$. Al aplicar el proceso de remoción de estrellas que no correspondiesen a ninguna fase evolutiva de las isocronas consideradas, el número total de estrellas a considerar fue de 4929. La figura 3.27 ilustra la muestra de 4929 estrellas confrontada con las isocronas pertenecientes a los tres modelos de evolución estelar mencionados.

Los resultados obtenidos de la confrontación de la distribución datos-modelo y modelo-modelo, para las isocronas del modelo evolutivo de Padua, y para edades entre 13.00 Gaños y 16.75 Gaños (en pasos de 0.25 Gaños) están representados en la figura 3.28. Igualmente, las comparaciones entre la distribución datos-modelo y modelo-modelo para las isocronas del modelo evolutivo de Yale, y para edades entre 11.00 y 16.00 Gaños se ilustran en la figura 3.29. Asimismo, aplicamos el procedimiento anterior de comparación para la distribución datos-modelo y modelo-modelo considerando las isocronas de Pisa para edades entre 11.00 y 16.00 Gaños (ver figura 3.30).

Luego de medir las distancias entre las medias de las gaussianas ajustadas de los histogramas datos-modelo y modelo-modelo de las figuras 3.28, 3.29 y 3.30, para las isocronas de Padua, Yale y Pisa, estas las representamos gráficamente en función de la edad (ver figura 3.31). Los resultados obtenidos de χ^2 para la muestra de 4929 estrellas de M3 y considerando los 3 modelos de evolución estelar

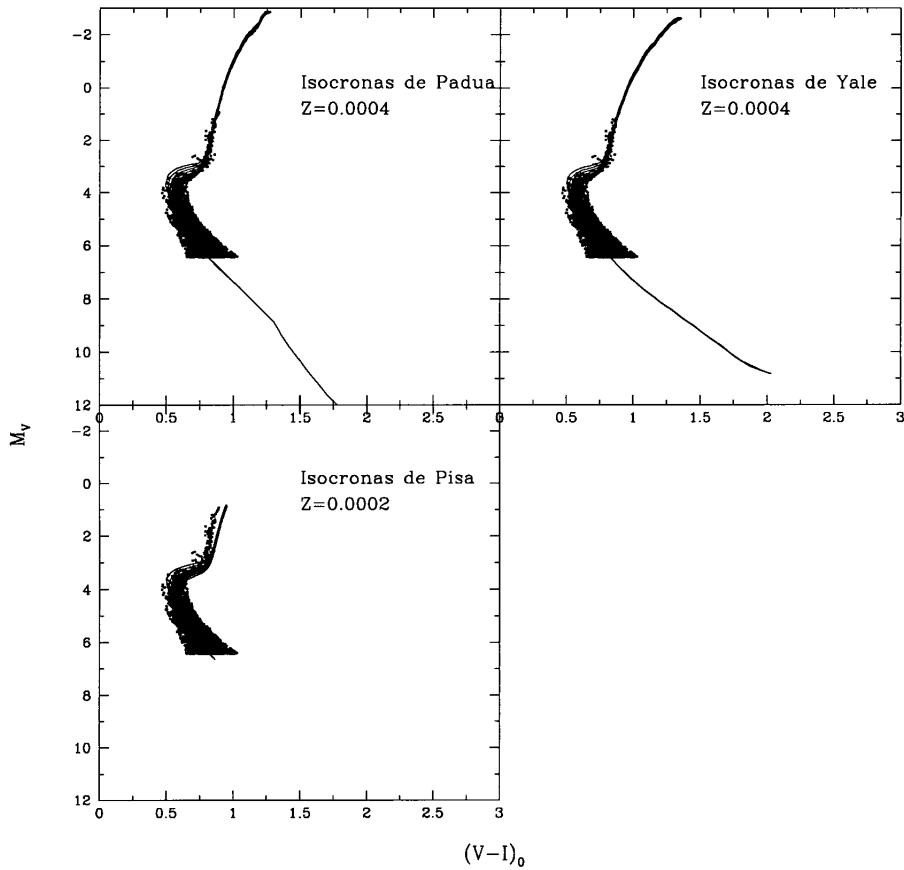


Figura 3.27: Muestra de 4929 estrellas de M3 confrontada con tres diferentes grupos de isocronas. Se confronta la muestra de 4929 estrellas de M3 con tres grupos de isocronas de diferentes modelos de evolución estelar: Padua, Yale y Pisa. Las isocronas mostradas representan edades desde 11.00 Gaños (primera a la izquierda) hasta 17.00 Gaños (última a la derecha).

a edades razonables, son representados en la figura 3.32.

Los resultados obtenidos por este método implican que la distribución de la muestra de 4929 estrellas originada a partir del modelo de Yale de evolución estelar describe mejor a la muestra observada que la muestra de 4929 estrellas de M3 generada a partir del modelo de Padua y de Pisa, a la edad estimada (ver tabla 3.1). Los resultados obtenidos según este nuevo método, de las mejores isocronas que ajustan a la muestra de datos son representados en el DCM de la figura 3.33.

Muestra de 10333 estrellas

Nos valimos de que los valores de las magnitudes visuales de la muestra de 4846 estrellas estaban contenidas dentro del intervalo en M_V de las fases evolutivas consideradas de las isocronas del grupo de Padua y de Yale, para reproducir resultados con tal muestra conteniendo estrellas en la SP y en la RSG y RGR. En la figura 3.34 mostramos la muestra de datos conformada por 10333 estrellas observadas en el DCM junto con el conjunto de isocronas del grupo de Padua y Yale.

Después de aplicar todos los pasos del procedimiento descrito en la sección 3.2.1, los resultados obtenidos para la confrontación de la distribución datos-modelo y modelo-modelo, para las isocronas del modelo evolutivo de Padua, y para edades entre 13.00 Gaños y 16.75 Gaños (en pasos de 0.25 Gaños) están representados en la figura 3.35. Igualmente, las comparaciones entre la distribución datos-modelo para las isocronas del modelo evolutivo de Yale (y para edades entre 11.00 y 17.00 Gaños) se ilustran en la figura 3.36.

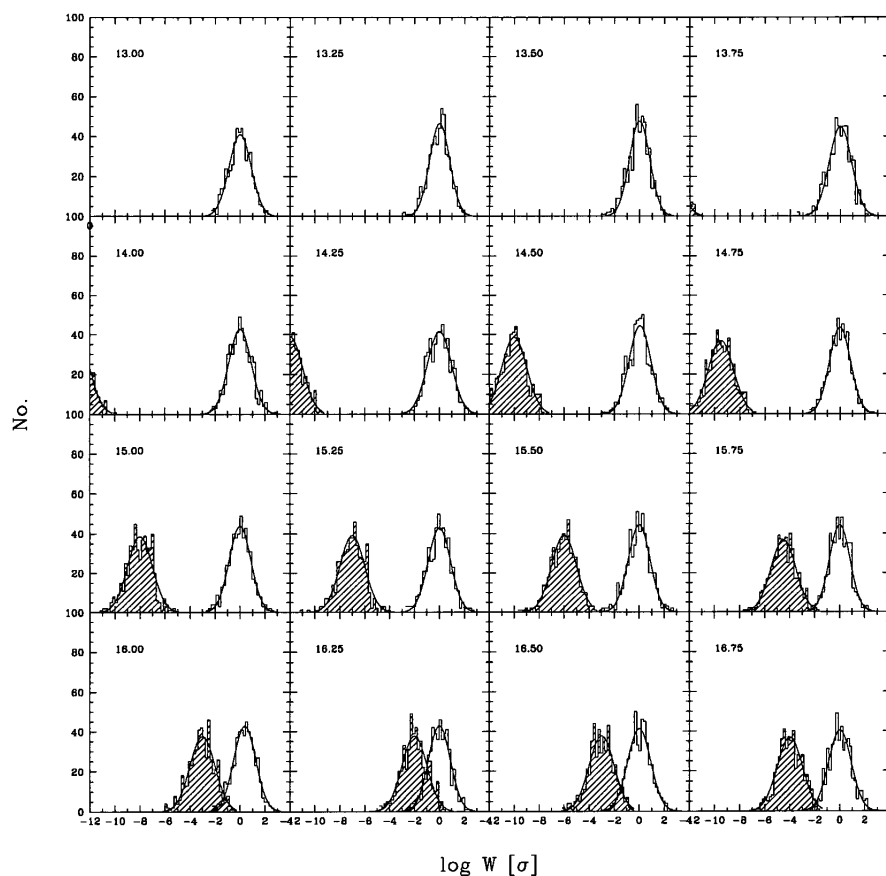


Figura 3.28: Distribución de valores de $\log W$ para diversas edades de las isocronas de Padua, obtenida para una muestra de 4929 estrellas de M3. Los histogramas no sombreados representan la distribución de frecuencias de $\log W$ obtenida de 500 comparaciones modelo-modelo (provenientes de las isocronas de edad indicada en la esquina superior de cada recuadro), y los histogramas sombreados, la que surge de 500 comparaciones datos-modelo. La mínima distancia entre las medias de las curvas gaussianas ajustadas nos permite establecer la edad óptima (16.25 Gaños) a la que el modelo describe mejor a los datos.

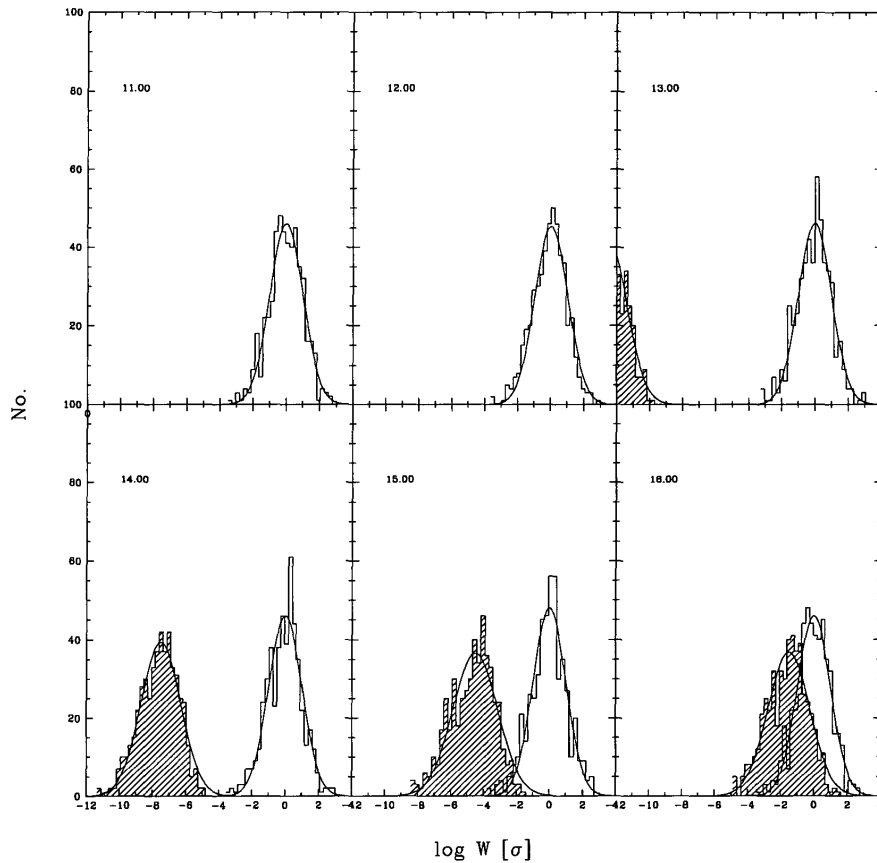


Figura 3.29: Distribución de valores de $\log W$ para diversas edades de las isocronas de Yale, obtenida para una muestra de 4929 estrellas de M3. Los histogramas no sombreados representan la distribución de frecuencias de $\log W$ obtenida de 500 comparaciones modelo-modelo (provenientes de las isocronas de edad indicada en la esquina superior de cada recuadro), y los histogramas sombreados, la que surge de 500 comparaciones datos-modelo. La mínima distancia entre las medias de las curvas gaussianas ajustadas nos permite establecer la edad óptima (16.00 Gaños) a la que el modelo describe mejor a los datos.

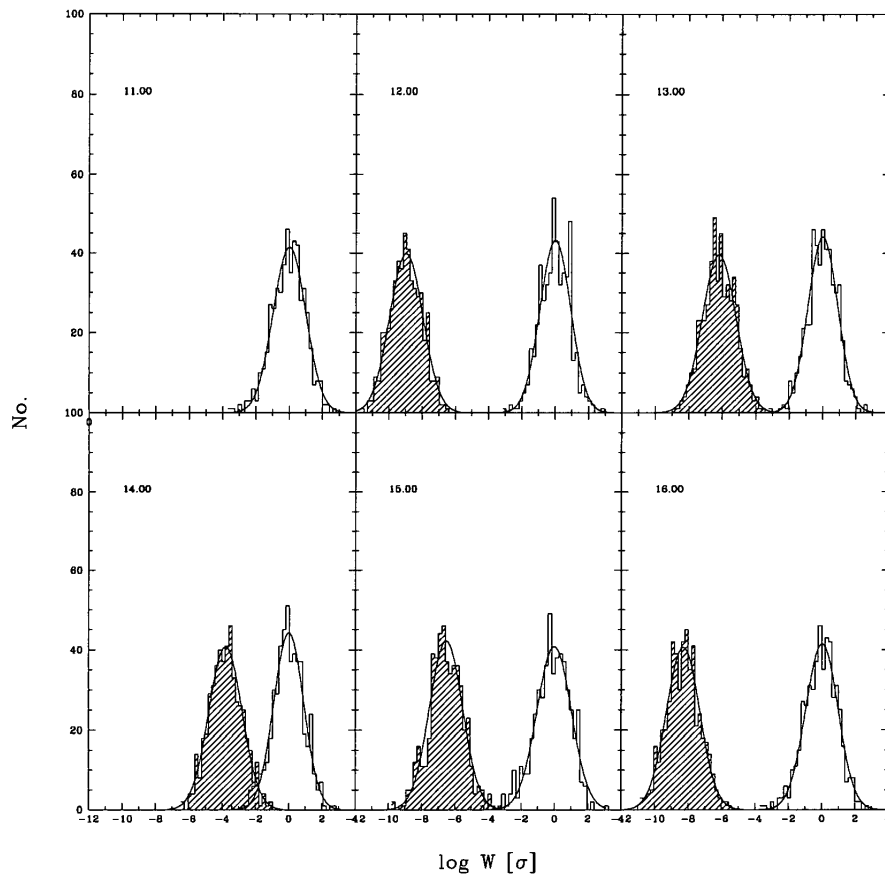


Figura 3.30: Distribución de valores de $\log W$ para diversas edades de las isocronas de Pisa, obtenida para una muestra de 4929 estrellas de M3. Los histogramas no sombreados representan la distribución de frecuencias de $\log W$ obtenida de 500 comparaciones modelo-modelo (provenientes de las isocronas de edad indicada en la esquina superior de cada recuadro), y los histogramas sombreados, la que surge de 500 comparaciones datos-modelo. La mínima distancia entre las medias de las curvas gaussianas ajustadas nos permite establecer la edad óptima (14.00 Gaños) a la que el modelo describe mejor a los datos.

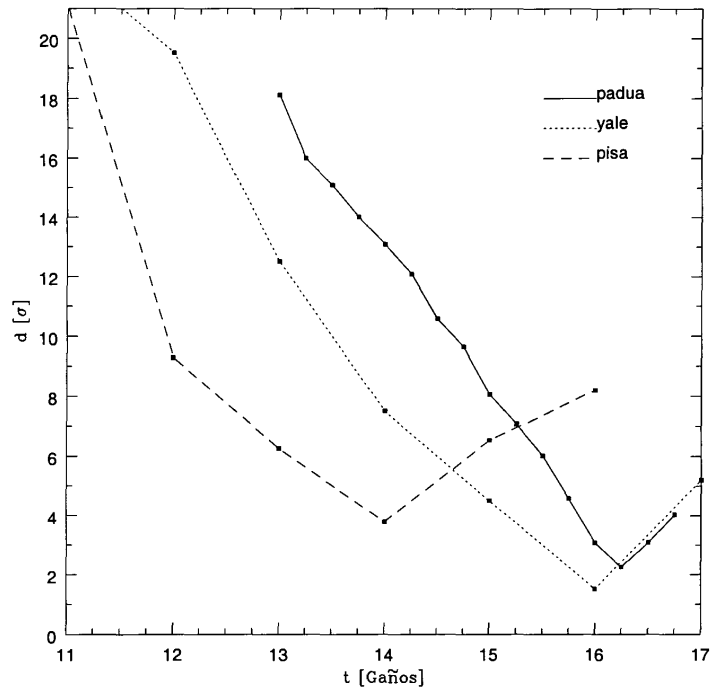


Figura 3.31: Representación gráfica del valor absoluto de la distancia d entre la media de las curvas gaussianas que ajustan a los histogramas datos-modelo y modelo-modelo para las isocronas de Padua, Yale y Pisa. La edad de $M3$ viene dada por la mínima distancia d dentro de un mismo modelo estelar. La isocrona que mejor ajusta viene dada por el mínimo global entre los tres mínimos estimados (16.25 Gaños para Padua, 16.00 Gaños para Yale y 14.00 Gaños para Pisa).

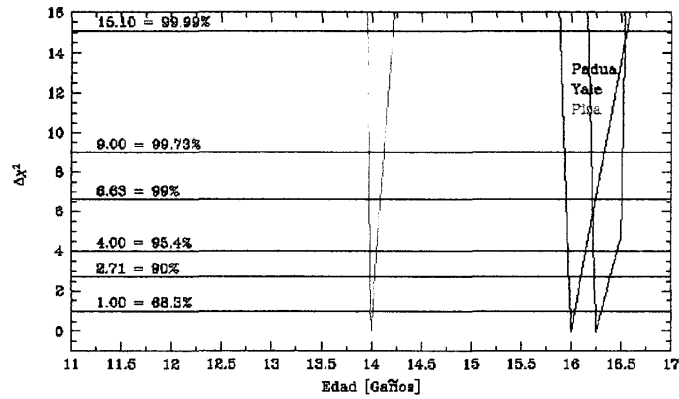


Figura 3.32: $\Delta\chi^2$ en función de la edad para la muestra de 4929 estrellas de M3 y para los conjuntos de isocronas de Padua, Yale y Pisa. Rechazamos las edades que caen por fuera del nivel de confianza de 0.99.

Luego de medir la distancia entre las medias de las gaussianas ajustadas de los histogramas datos-modelo y modelo-modelo de las figuras 3.35 y 3.36, para las isocronas de Padua y Yale, estas las representamos gráficamente en función de la edad (ver figura 3.37). Los resultados de la prueba χ^2 para esta muestra de estrellas y para los conjuntos de isocronas de Padua y Yale se representan en la figura 3.38. Un resumen de los mejores estimados de la edad para cada modelo de evolución son dados en la tabla 3.1.

Los resultados obtenidos por este método implican que la distribución de la muestra de 10333 estrellas originada a partir del modelo de Padua describe mejor la muestra generada a partir del modelo de Yale, a la edad mejor estimada (ver tabla 3.1). Los resultados obtenidos de las mejores isocronas que ajustan a la muestra de datos son representados en el DCM de la figura 3.39.

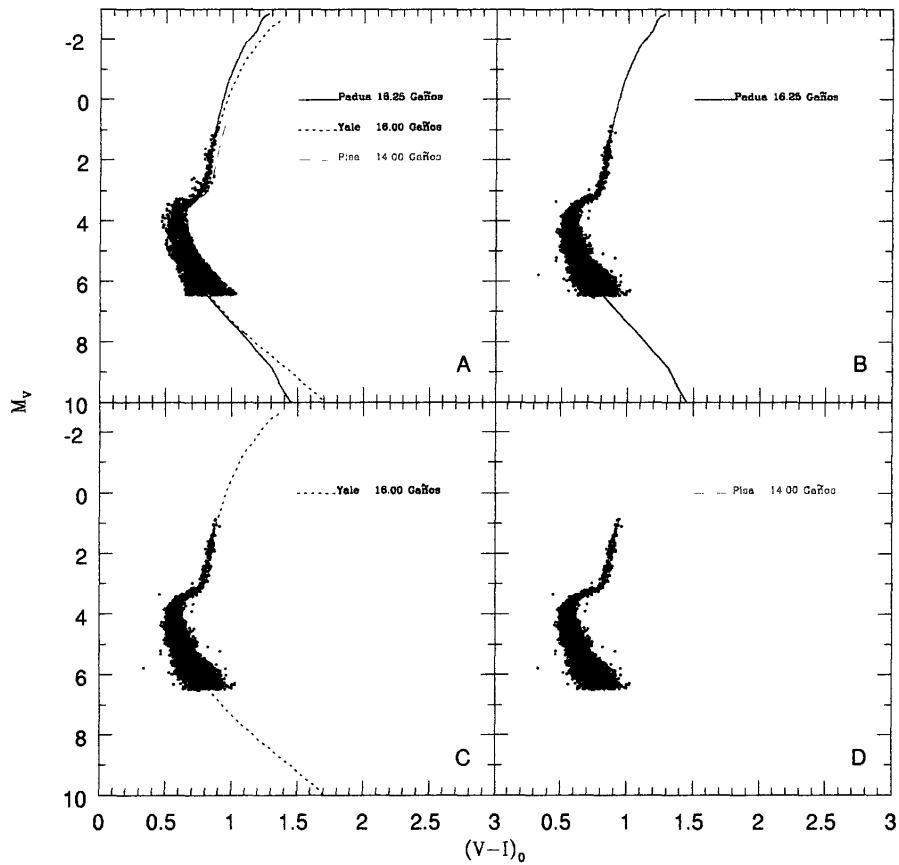


Figura 3.33: DCM de la muestra de 4929 estrellas de M3. A: DCM de la muestra de 4929 estrellas observada, mostrando las isocronas de Padua, Yale y Pisa que mejor ajustan a la muestra. B, C y D: DCM de las muestras sintéticas generadas a partir del modelo de Padua, Yale y Pisa que mejor ajustan a la muestra observada, según resultados de la prueba χ^2 (ver tabla 3.1).

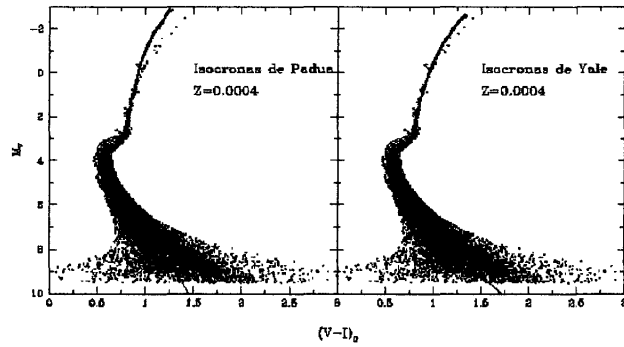


Figura 3.34: Muestra de 10333 estrellas de M3 confrontada con dos diferentes grupos de isocronas. Se confronta la muestra de 10333 estrellas de M3 con dos grupos de isocronas de diferentes modelos de evolución estelar: Padua y Yale. Las isocronas mostradas representan edades desde 11.00 Gaños (primera a la izquierda) hasta 17.00 Gaños (última a la derecha).

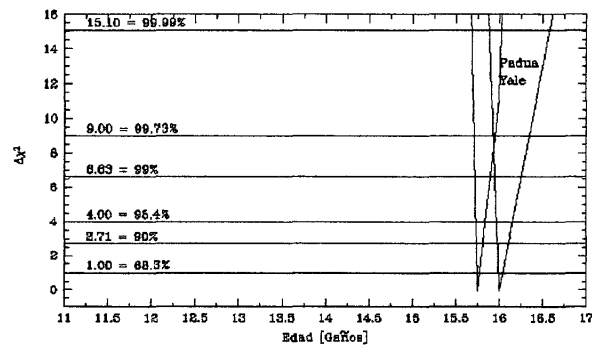


Figura 3.35: $\Delta\chi^2$ en función de la edad para la muestra de 10333 estrellas de M3 y para los conjuntos de isocronas de Padua y Yale.

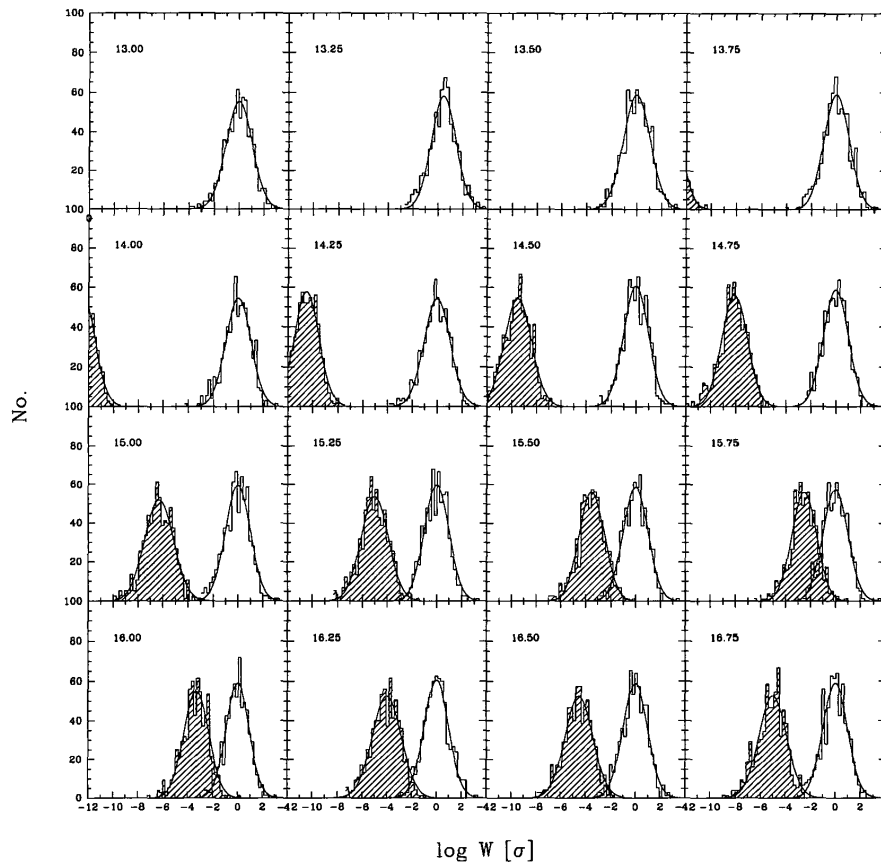


Figura 3.36: Distribución de valores de $\log W$ para diversas edades de las isocronas de Padua, obtenida para una muestra de 10333 estrellas de M13. Los histogramas no sombreados representan la distribución de frecuencias de $\log W$ obtenida de 500 comparaciones modelo-modelo (provenientes de las isocronas de edad indicada en la esquina superior de cada recuadro), y los histogramas sombreados, la que surge de 500 comparaciones datos-modelo. La mínima distancia entre las medias de las curvas gaussianas ajustadas nos permite establecer la edad óptima (15.75 Gaños) a la que el modelo describe mejor a los datos.

Modelo de evolución	Z de la isocrona	χ^2_{min}	χ^2_{red}	Mejor estimación de t [Gaños]	Intervalo de 99% de conf.[Gaños]
NGC 6397.	373 estrellas.	B=8400			
Padua	0.0004	232.84	1.41	14.25	[13.7 - 15.6]
Yale	0.0004	206.80	1.25	14.00	[13.3 - 15.1]
Pisa	0.0002	249.95	1.41	13.00	[11.9 - 14.2]
NGC 6397.	1187 estrellas.	B=14400			
Padua	0.0004	1352.81	2.82	14.50	[14.3 - 15.1]
Yale	0.0004	1089.04	2.34	14.00	[13.8 - 14.3]
M92	1482 estrellas.	B=12000			
Padua	0.0001	678.79	1.73	15.00	[14.8 - 15.5]
Yale	0.0002	769.67	1.91	15.00	[14.7 - 15.5]
Pisa	0.0002	832.86	2.06	12.00	[11.8 - 12.1]
M92	4846 estrellas.	B=12000			
Padua	0.0001	2221.63	1.31	14.75	[14.5 - 15.4]
Yale	0.0001	2455.26	1.42	15.00	[14.6 - 15.7]
M3	4929 estrellas.	B=14400			
Padua	0.0004	1038.53	2.14	16.25	[16.2 - 16.6]
Yale	0.0004	757.20	1.68	16.00	[15.9 - 16.3]
Pisa	0.0002	1120.65	2.45	14.00	[13.9 - 14.2]
M3	10333 estrellas.	B=14400			
Padua	0.0004	3558.38	1.59	15.75	[15.7 - 15.9]
Yale	0.0004	3037.01	1.37	16.00	[15.9 - 16.3]

Tabla 3.1: Tabla que resume los resultados de la mejor estimación de la edad de las muestras consideradas en este trabajo, para cada modelo de evolución estelar.

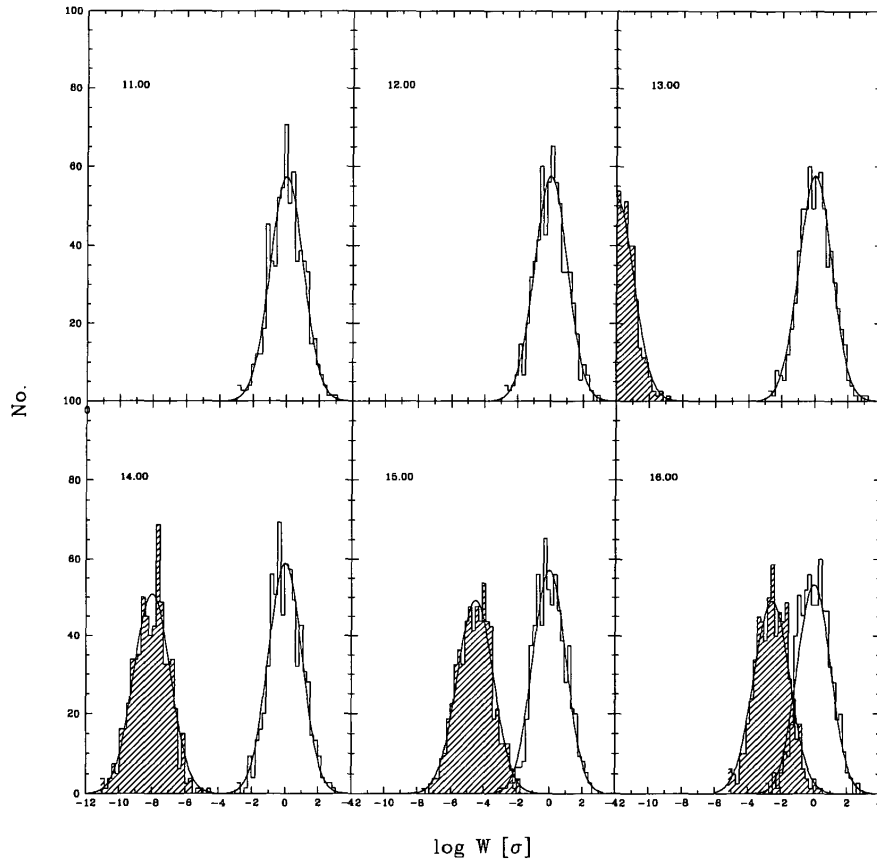


Figura 3.37: Distribución de valores de $\log W$ para diversas edades de las isocronas de Yale, obtenida para una muestra de 10333 estrellas de M3. Los histogramas no sombreados representan la distribución de frecuencias de $\log W$ obtenida de 500 comparaciones modelo-modelo (provenientes de las isocronas de edad indicada en la esquina superior de cada recuadro), y los histogramas sombreados, la que surge de 500 comparaciones datos-modelo. La mínima distancia entre las medias de las curvas gaussianas ajustadas nos permite establecer la edad óptima (16.00 Gaños) a la que el modelo describe mejor a los datos.

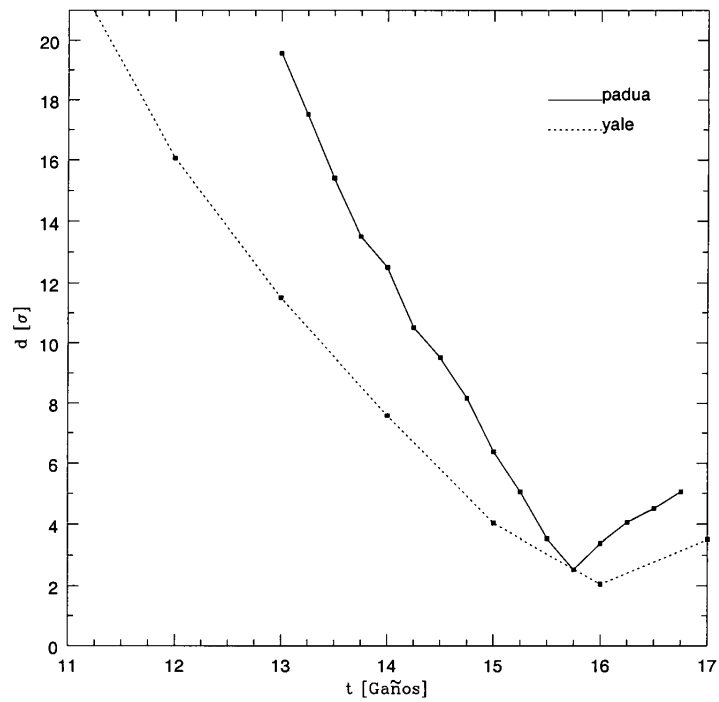


Figura 3.38: Representación gráfica del valor absoluto de la distancia d entre la media de las curvas gaussianas que ajustan a los histogramas datos-modelo y modelo-modelo para las isocronas de Padua y Yale. La edad de $M3$ viene dada por la mínima distancia d dentro de un mismo modelo estelar. La isocrona que mejor ajusta viene dada por el mínimo global entre los dos mínimos estimados, 15.75 Gaños para Padua y 16.00 Gaños para Yale.

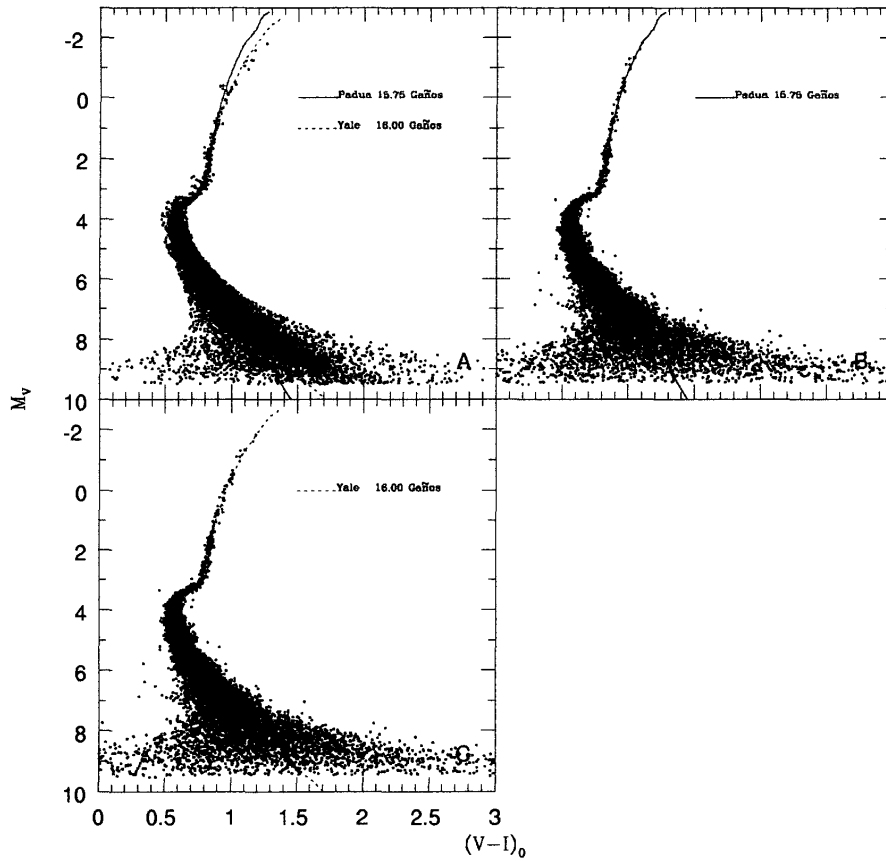


Figura 3.39: DCM de la muestra de 10333 estrellas de M3. A: DCM de la muestra de 10333 estrellas observada, mostrando las isocronas de Padua y Yale que mejor ajustan a la muestra. B, C y D: DCM de las muestras sintéticas generadas a partir del modelo de Padua y Yale que mejor ajustan a la muestra observada, según resultados de la prueba χ^2 (ver tabla 3.1).

Capítulo 4

Discusión y perspectivas

En el presente trabajo presentamos resultados de la estimación de la edad de los CG NGC 6397, M92 y M3, obtenidos mediante la implementación de la estadística de Saha y de la minimización χ^2 , en relación con el problema del ajuste de isocronas. Además, determinamos cual modelo de evolución estelar, entre los considerados en este trabajo, proporciona el mejor ajuste de la isocrona a la muestra del CG en cuestión y determinamos el intervalo de confianza en el que el valor de la edad del CG cae alrededor del valor estimado con un nivel de confianza del 99%.

En los casos tratados de NGC 6397 y M92 evidenciamos que la edad estimada del CG es la misma, dentro de su correspondiente intervalo de confianza, considerando dos muestras de diferente tamaño de un mismo CG. Esto significa que en tales casos ambas poblaciones representan poblaciones significativas del CG. Específicamente, los resultados en la EECG coinciden para NGC 6397 si consideramos la muestra de 373 estrellas (las cuales cubren el TOSP y parte de la

SP) o si consideramos la muestra de 1187 estrellas (las cuales cubren el TOSP y zonas de la SP, RSG y RGR), por ejemplo. Los resultados difirieron, tal y como era de suponerse, en la determinación del intervalo de confianza: las muestras más grandes evidenciaron un menor intervalo de confianza que las muestras más pequeñas. Además, la estimación de la edad de M92 con 4846 estrellas para el modelo de Padua de evolución estelar resultó en 0.25 Gaños menor que la estimación de la edad con 1482 estrellas. Atribuimos tal diferencia a la incursión de un número mayor de estrellas de la parte superior de la RGR en el ajuste, lo que trajo como consecuencia que las estrellas de la RGR también influyeran, ligeramente, en la estimación de la edad de M92. Por otro lado, la estimación de la edad de M3, considerando la muestra menor para Padua es de 16.25 Gaños, mientras que para la población mayor el mejor estimado de la edad fue de 15.75 Gaños. Dado que la muestra grande de M3 presenta sigmas muy grandes en el color a magnitudes débiles y dado que deseamos minimizar el ruido en la estimación de la edad, inferimos que la muestra menor, e incluso muestras con cotas en M_V menores, proporcionan estimados de la edad con menos ruido, y por lo tanto, más exactos.

Por otro lado, la prueba χ^2 aplicada a las muestras de estrellas consideradas en este trabajo, ofrece información sobre las diferencias morfológicas y grado de separación entre isocronas dentro de un mismo modelo. Por ejemplo, sean iso_1 , iso_2 e iso_3 tres isocronas a edades t_1 , t_2 y t_3 , respectivamente, siendo iso_3 la isocrona que mejor reproduce las observaciones. Al representar gráficamente los resultados de $\Delta\chi^2$ en función de t , nos encontramos que estos tres puntos forman dos segmentos: el segmento de recta entre la edad t_1 y t_2 , cuya pendiente denotamos como m_1 , y el segmento entre la edad t_2 y t_3 , cuya pendiente llamamos m_2 . Si $m_1 > m_2$, las isocronas iso_1 , iso_2 e iso_3 van alejándose entre sí, si $m_2 > m_1$,

las isocronas iso_1 , iso_2 e iso_3 van acercándose entre sí, y si $m_1=m_2$, las isocronas iso_1 , iso_2 e iso_3 no se alejan ni se acercan entre sí, sino que las distancias entre TOSP son mantenidas entre ellas. Si las isocronas se alejan, acercan o permanecen con igual grado de separación, esto claramente se evidencia en la distribución de frecuencias de $\log W$ en función de la edad, o lo que es lo mismo, en la representación gráfica de la distancia d entre la media de las curvas gaussianas que ajustan a los histogramas datos-modelo y modelo-modelo para los modelos de evolución considerados (ver Capítulo 3).

4.1 Comparación de los resultados con otros trabajos

Nuestra estimación de la edad de los CG NGC 6397, M92 y M3 no es consistente con algunos de los recientes resultados teóricos y observacionales obtenidos entre 1998 y 1999 (período llamado post-Hipparcos) sobre el mejor estimado de la edad promedio de los más viejos CG. Chaboyer *et al.* 1998 estima una edad de (11.5 ± 1.3) Gaños para los CG más viejos, y un intervalo de confianza de 10-14 Gaños. Por el contrario, nuestros resultados apoyan los hallazgos obtenidos entre 1996 y 1997 (período denominado pre-Hipparcos), los cuales están contenidos en un intervalo entre 13-18 Gaños. D'Antona 1999 interpreta que los resultados de Hipparcos, por sí solos, no justifican el cambio global del promedio de la edad de los CG (de ~ 4 Gaños) entre la era pre-Hipparcos y la post-Hipparcos, y que Hipparcos simplemente ha dado más peso a las distancias de los CG, las cuales ya han tenido cierto énfasis en la literatura sobre las observaciones (Sandage 1993 y Walker 1992). Además, la construcción teórica del DHR, en el transcurso de

muchos años, ha sido consistente con aquellas estimaciones de la edad obtenidas en la era pre-Hipparcos. Esta discusión se hace más clara cuando examinamos la posición relativa del TOSP y de la RGR en los modelos de evolución estelar. Tal y como comentamos en el Capítulo 1, el TO está afectado por muchas incertidumbres en los datos de entrada de las isocronas, y tan sólo con un simple cambio en el color en +0.02 mag., la estimación de la edad se torna más pequeña en 2 Gaños. Si las incertidumbres en la determinación del TO son de ~ 0.05 mag., esto implica que la estimación de la edad es incierta hasta 4 Gaños. Por lo tanto, una visión definitiva sobre la edad de los CG aún no es posible mientras permanezcan dichas incertidumbres. Sin embargo, el desarrollo de nuevos y más precisos métodos es crucial en el avance en la EECG.

Los resultados obtenidos en la presente investigación concuerdan también, dentro de sus correspondientes intervalos de tolerancia, con los obtenidos por algunos autores. Vandenberg *et al.* 1996 proporcionan una edad de M92 de 15.8 ± 2 Gaños, y Chaboyer *et al.* 1996 obtiene una edad promedio de los CG de 14.6 ± 1.7 Gaños. Sin embargo, la edad obtenida de NGC 6397 en este trabajo no es consistente con la edad de 12 Gaños obtenida por D'Antona 1999. Atribuimos esta discrepancia a las diferencias de los modelos de evolución estelar seleccionados por cada uno: D'Antona 1999 utiliza para su ajuste, a las isocronas de Silvestri 1998, las cuales son más rojas que las isocronas seleccionadas en esta investigación.

La edad estimada de los CG considerados en el presente trabajo concuerdan con los resultados obtenidos del modelo de Einstein-De Sitter ($\Omega_M=1$, $\Omega_\Lambda=0$, $t_0=2/3H_0^{-1}$), si $H_0 > 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. También, los resultados obtenidos podrían coincidir con aquellas edades provenientes del modelo de la expansión acelerada, (con $\Omega_M=0.3$ y $\Omega_\Lambda=0.7$), $t_0=(14.2 \pm 1.7)$ Gaños (con $H_0=65 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$).

4.2 Importancia del trabajo realizado

Hemos desarrollado e implementado un método objetivo para la EECG mediante el uso de técnicas estadísticas, basado en el método de ajuste de isocronas. Los resultados obtenidos nos permiten decir que nuestra implementación representa un avance en la EECG. Si se disponen de isocronas de una resolución más fina en Z y en t , y de incluso de isocronas aún construídas más cuidadosamente que las previas, y de observaciones fotométricas en varias bandas fotométricas y con menores incertidumbres, reduciríamos el intervalo de confianza en que están dados los mejores estimados de la edad. Sin embargo, dado que las incertidumbres en la distancia acarrearán un error mínimo de ± 1.5 Gaños (D'Antona 1999), hasta que no se minimicen las incertidumbres en algunas mediciones como la distancia, por más disminuciones del intervalo de confianza que proporcionen los métodos, la estimación de la edad tendrá asociado el error de las incertidumbres de las mediciones (Peacock 1999). Gracias a que el modelo presentado aquí es un método elaborado, la EECG se hace de una manera objetiva.

4.3 Perspectivas

La EECG por medio de la técnica desarrollada e implementada en este trabajo pudiera tener las siguientes aplicaciones:

(1) en el desarrollo de modelos de evolución estelar. Los datos de entrada de las isocronas que minimicen las discrepancias entre el modelo y la población estelar podrían ser de utilidad como cotas de los mismos. Estudios de la física de tales datos de entrada podrían conducir a nuevos avances teóricos de la estructura

y evolución estelar.

(2) en consideraciones cosmológicas. La EECG es usada como método directo para estimar el límite inferior de la edad del Universo, la cual puede ser usada para contrastar con modelos cosmológicos y encontrar cuál de ellos describe mejor a las observaciones.

(3) en la ayuda a la construcción de los modelos de formación de la Vía Láctea.

(4) en la revisión y/o confirmación de los parámetros de entrada de códigos de síntesis de población, como por ejemplo en BC2000. Yi *et al.* 2000 proponen llevar a cabo investigaciones sobre varios modelos de síntesis de población mediante pruebas con objetos con edades relativamente bien conocidas como los Cúmulos Globulares.

(5) El método presentado pudiera ser aplicado a poblaciones estelares con más de un brote de formación. Para iniciar esta aplicación sugerimos, por ejemplo, el caso de la formación estelar de proto-CG (Burkert *et al.* 1993). Estos modelos predicen la formación de una primera generación de cúmulos y una segunda generación de estrellas a 2×10^7 años (McCray y Kafatos 1987, Brown *et al.* 1995).

(6) la metodología presentada aquí podría ser aplicada a la determinación de la edad de una población cualquiera que constituya una población estelar simple. En particular, podría ser implementado a cúmulos de estrellas jóvenes. La determinación de la edad promedio de un conglomerado de estrellas jóvenes nos permite estudiar la historia de formación estelar en ese complejo de nubes moleculares. Las edades de las estrellas nos permiten saber cuando se inició el

proceso de formación estelar en un complejo dado de nubes moleculares. Más aún, la edad de la población estelar joven pone límites a los tiempos de vida de las nubes moleculares.

(7) en el desarrollo de otras posibles técnicas estadísticas en el problema de la EECG. Sugerimos la implementación de la técnica de máxima verosimilitud apeándose al desarrollo de Hernandez *et al.* 1999 a través del cálculo variacional. Tal método es basado en la construcción de una ecuación diferencial, la cual es iterada para encontrar la TFE(t) del CG en cuestión, que satisfaga la nulidad de la derivada de la función de verosimilitud. La solución de la ecuación mencionada (TFE(t)), es parametrizada como un brote de corta vida, con lo cual la edad del CG vendría dada por la edad del brote.

(8) Debido a los interesantes resultados obtenidos en este trabajo y a sus implicaciones, fruto de la aplicación de estimadores como W y como χ^2 , sugerimos contrastar tales resultados con los que se podrían obtener de otras pruebas estadísticas, como por ejemplo la prueba de dos colas de Kolmogorov-Smirnov, que permite analizar la diferencia entre dos distribuciones en base a la diferencia absoluta acumulada entre las frecuencias relativas de cada distribución. También sugerimos aplicar el procedimiento descrito con un número de celdas diferentes, y considerar también otras regiones del DCM en la EECG. También, podría implementarse la técnica de Saha en la determinación de más de un parámetro tal como es la edad, e incluir simultáneamente la estimación de la edad y la metalicidad o la distancia.

(9) en la obtención de resultados aplicando otros datos de entrada en los mismos modelos de evolución estelar. Por ejemplo, los nuevos modelos de atmósferas estelares BaSel 2000, al menos para [Fe/H] y a edades de 10 Gaños, las isocronas,

en la RGR, son más calientes que las isocronas obtenidas por BC2000. Sería de interés confrontar los resultados que se obtendrían de aplicar el método desarrollado con los hallazgos obtenidos en la presente investigación.

Capítulo 5

Conclusiones

Al término de esta investigación se concluye que:

(1) Hemos desarrollado un esquema para cuantificar la verosimilitud entre dos muestras y lo hemos aplicado exitosamente al caso particular de la EECG.

(2) El método desarrollado en la presente investigación, mediante la estadística W , estima objetivamente la edad de un CG. La minimización χ^2 nos permitió determinar el intervalo de confianza en el que el valor de la edad mejor estimado cae a un específico nivel de confianza, además de corroborar la estimación de la isocrona entre un conjunto de isocronas originadas a partir de diferentes modelos de evolución estelar, proporciona el mejor ajuste a un DCM de un CG.

(3) Los resultados obtenidos en este trabajo en la estimación de la edad de los CG NGC 6397, M92 y M3 están contenidos en la tabla 3.1. Nuestro análisis estadístico derivó que la distribución de la de 373 estrellas de NGC 6397 se apega

mejor al modelo de Yale que al modelo de Padua, al igual que la muestra de 1187 estrellas (para NGC 6397). Para M92, la distribución de la población de estrellas se apega mejor al modelo de Padua que al modelo de Yale en las muestras tratadas en este trabajo, comportamiento contrario a lo que ocurre con M3.

(4) El análisis estadístico desarrollado en este trabajo conduce a posibles futuros desarrollos de técnicas relacionadas al problema de la EECG por el ajuste de isocronas y deja una vía abierta para futuras investigaciones en el tema.

Referencias

- Allard F., Hauschildt P., Alexander D. y Starfield S. *A.R.A.A.* **35** 137 (1997)
- Alongi M., Bertelli G., Bressan A., Chiosi C. *A&A* **244**, 95 (1991)
- Alongi M., Bertelli G., Bressan A. *et al.* *A&As* **97** 851 (1993)
- Aparicio A., Bertelli G., Chiosi C., Garcia-Pelayo J. *A&A* **240** 262 (1990)
- Aparicio A., Gallard C., Bertelli G. *AJ* **114** 669 (1997)
- Bergbusch, P. y Vandenberg, D. *AJ* **114** 2604B (1997)
- Bertelli G., Bressan A., Chiosi C., Angerer K. *A&A*, **66** 191 (1986)
- Bertelli G., Bressan A., Chiosi C., Angerer K. *The Age of Stellar Clusters*, ed. F. Caputo, Mem. Soc. Astron. Ital. **57** 427 (1986)
- Bertelli G., Bressan A., Chiosi C., Fagotto F., Nasi E. *A&As*, **106** 275 (1994)
- Bertelli G., Bressan A., Chiosi C. *A&A*, **150**, 33 (1985)
- Bertelli G., Bressan A., Chiosi C. *ApJ* **392**, 522 (1992)
- Bevington P. y Robinson K. *Data reduction and error analysis for the physical Sciences*. Second edition. Mc Graw Hill (1992)
- Bolte, M. *Astron. J.* **97**, 1688 (1989)
- Bolte M. y Hogan C. *Nature* **376** 399 (1995)
- Bressan A., Bertelli G., Chiosi C. *A&A*, **102**, 25 (1981)
- Bressan A., Bertelli G., Chiosi C. *The Age of Stellar Clusters*, ed. F. Caputo, Mem. Soc. Astron. Ital. **57** 427 (1986)
- Brown H., Burkert A., Truran J. *ApJ* **440** 865 (1995)
- Bruzual, G., Barbuy, B., Ortolani, S., Bica, E., Cuisinier, F., Lejeune, T. y Schiavon, R. *As J.* **114** 1531 (1997)
- Bruzual G. *Comunicación personal* (2000)
- Bruzual G., y Charlot S. *ApJ* **405** 538 (1993)

- Bruzual G. *Comunicación personal* (1999)
- Buonanno, R., Corsi, C. y Fusi Pecci, F. *A&A*, **216**, 80 (1989)
- Burkert, A., Truran, J., y Hensler, G. *As. J* **391**, 651 (1992)
- Carreta E., Gratton R. astro-ph/9902086 (1999)
- Cassisi, S., Castellani, V., Degl'Innocenti, S., Salaris, M. y Weiss, A. *AA*s **134** 103 (1999)
- Cassisi, S., Castellani, V., Degl'Innocenti, Weiss A. *AA*s **129** 267 (1998)
- Castellani, V. *Globular Cluster as a test for Stellar Evolution*. Lessons from the Canary Islands Winter School on Globular Clusters. (1998).
- Castellani, V., Chieffi, A., Straniero, O. *ApJS* **74**, 463 (1990)
- Castellani, V., Chieffi, A., Straniero, O. *ApJS* **78**, 517 (1992)
- Castellani, V. Degl'Innocenti, S. y Rommaniello, M. *ApJ* **423** 266 (1994)
- Castelli F., Gratton R. y Kurucz R. *AA* **318** 841 (1997)
- Castelli F., Gratton R. y Kurucz R. *AA* **324** 432 (1997)
- Chaboyer, B., Demarque, P., Kernan, P. J., y Krauss, L. astro-ph/9706128 (1997)
- Chaboyer, B. Demarque, P. Kernan, P. y krauss, Lawrence. *As.J.* **96**, 96 (1996)
- Chaboyer, B., Demarque, P. y Sarajedini, A. *ApJ* **459**, 558 (1996)
- Chaboyer, B. *AsJL* **444** L9 (1995)
- Chaboyer B., Demarque P., Kernan P., Krauss L. *ApJ* **494** 96 (1998)
- Charlot S. y Bruzual G. *ApJ* **367** 126 (1991)
- Chin C., Stothers R. *ApJ* **77** 299 (1991)
- Chiosi C., Bertelli G., Bressan A. *AA*s **196** 84 (1988)
- Chiosi C., Bertelli G., Meyland G., Ortolani S. *AA*s **219** 167 (1989)
- Iben I. *Ap* **67** 275 (1962)
- Cool A. "Binary Stars Bellow the Turnoff in Globular Cluster Color-Magnitude Diagrams", en *Advances in Stellar Evolution*, eds. R. T. Rood y Renzini (Cambridge: Cambridge U. Press) 191 (1997)

- Crow E., Davis F., Maxfield M. *Statistics Manual*. Dover Publications, Inc. (1960)
- D'Antona Francesca. *Comunicación personal* (1999)
- D'Antona Francesca. astro-ph/9910312 (1999)
- Demarque P., Chaboyer B., Guenther D., Pinsonneault M., Pinsonneault L. y Yi S. (1996) <http://www.astro.yale.edu/demarque/astronomy.html>.
- Djorgovski, S., Piotto, G., y Capaccioli, M. *Astron. J.* **105**, 2148 (1993)
- Dolphin A. *NewA* **2** 397 (1997)
- Doom C. *A&A*, **116**, 303 (1982)
- Doom C. *A&A*, **142**, 143 (1985)
- Girardi, L., Bressan, A., Chiosi C., Bertelli, G. y Nasi, E. *AA*s **117**, 113 (1996)
- Graton, R. "Early nucleosynthesis and chemical abundances of stars in globular clusters". Lessons from the Canary Islands Winter School on Globular Clusters. (1998)
- Green, E., Demarque, P., King, C. *The Revised Yale Isochrones and Luminosity Functions*, New Haven: Yale University Observatory. (1987)
- Green, y Norris, J. *Astrophys. J. Lett.* **353**, L17 (353) (1990)
- Hansen B. *Nature* **394** 860 (1998)
- Harris, W. "Catalog of Parameters for Milky Way Globular clusters". McMaster University. (1997)
- Hauschildt P., Allard F. y Baron E. *ApJ* **512** 377 (1999)
- Hendry M. *ASPCS* **385** 411 (1997)
- Hernandez X., Valls-Gabaud D. y Gilmore G. astro-ph/0002488 (2000)
- Hernandez X., Valls-Gabaud D. y Gilmore G. astro-ph/0001337 (2000)
- Hernandez X., Valls-Gabaud D. y Gilmore G. *M.N.R.A.S.* **304** 705 (1999)
- Hurley-Keller D., Mateo M., Nemeč J. *AJ* **115**, 1840 (1998)
- Iben, I., Jr, y Faulkner, J. *Astrophys. J* **153**, 101 (1968)

- Jimenez R. *ASPCS* **126** 411 (1997)
- Jimenez, R. y Padoan, P. *ApJ* **463**, L17 (1996)
- Johnson J., Bolte M. *AJ* **115** 693J (1998)
- Kaluzny J. *A&AS* **122** 1 (1997)
- King I., Anderson J., Cool A., Piotto G. *ApJ* **492** L37 (1988)
- Kippenhahn W. *Stellar Structure and Evolution*. Springer-Verlag. (1990)
- Kraft R., Sneden C., Langer G. y Prosser C. *PASP* **107** 1065 (1992)
- Kurucz R. *IAUS* **149** 225 (1992)
- Lejeune T. *Thèse de Doctorat Européen*. Université Louis Pasteur (1997)
- MacCray R. y Kafatos R. *ApJ* **317** 190 (1987)
- Maeder A., Meynet G. *A&A* **182** 243 (1987)
- Maeder A., Meynet G. *A&A* **210** 155 (1989)
- Maeder A., Meynet G. *A&AS* **76** 411 (1988)
- Maeder A., Meynet G. *A&AS* **89** 451 (1991)
- Maeder A. *A&AS* **84** 139 (1990)
- Matraka B., Wassermann C., Weigert A. *A&A*, **107** 283 (1982)
- Mould J., Han M., Stetson P., Gibson B., Graham J., Huchura J., Madore B.,
Rawson D. *ApJ* **483** L41 (1997)
- Ng Y. *A&AS* **132** 133 (1998)
- Peacock J. *Cosmological Physics*. Cambridge University Press. (1999)
- Peterson C. *Structure and Dynamics of Globular Clusters : ASPCS 50* Eds. Djorgowski S. y Meylan (San Francisco: ASP). 337 (1993)
- Pont F., Mayor M., Turon C., Vanderberg D. *MNRAS* **298L** 43F (1998)
- Press W., Flannery B., Teukolsky S., Vetterling W. *Numerical Recipes. The art of Scientific computing*. Cambridge University Press. (1986)
- Reid, I. N. *AJ* **114** 161 (1997)
- Renzini, A. et al *ApJ* **465**, L23 (1996)

- Richer, H., Fahlman, G., Ibata, R., et al *ApJ* **484**, 741 (1997)
- Richer *et al.* *ApJ* **451**, L17 (1995)
- Riess, M., Filippenko V., *et al.* *AJ* **116** 1009 (1998)
- Rosenberg A., Aparicio A., Saviane I, Piotto G. astro-ph/0006299 (2000)
- Rosenberg, A. Saviane, I. y Aparicio, A. astro-ph/9907394 (1999)
- Rosenberg Alfred. *Comunicación personal* (1999)
- Rosenberg Alfred, Saviane I., Aparicio A. astro-ph/9907394 (1999)
- Ruiz-Lapuente P. *ASPCS* **126** 411 (1997)
- Saha P. *AJ* **115** 1206 (1998)
- Sandage, A. *Astrophys. J* **252**, 553 (1982)
- Sarajedini, A., y Demarque, P. *ApJ* **365**, 219 (1990)
- Sarajedini, A. y King, C. *AJ* **98**, 1624 (1989)
- Sarajedini, A. y Geisler D. *Astron.J.* **112**, 2013 (1996)
- Silvestri F., Ventura P., D'Antona F., Mazzitelli I. *ApJ* **509**, 192 (1998)
- Stetson, P., Vandenberg, D., Bolte, M., Hesser, J. y Smith, G. *Astron. J.* **97**, 1360 (1989)
- Stetson, P., Vandenberg, D. y Bolte, M. *P.A.S.P.* **108**, 560 (1996)
- Stothers R., Chin C. *ApJ* **348** L21 (1990)
- Stothers R. *ApJ* **298** 521 (1985)
- Sweigart, A., Greggio, L., Renzini, A. *ApJ* **364**, 527 (1990)
- Tayler R. *Q. Jl. R. astr. Soc.* **27** 367 (1986)
- Tolstoy E. *PhD thesis*. Groningen Univ. (1995)
- Vandenberg, D., Bolte, M., y Stetson, P. *AJ* **100**, 445 (1990)
- Vandenberg, D. *As Js* **51** 29 (1983)
- Vandenberg, D. *ApJS* **58**, 711 (1996)
- Walker A. *ApJ* **300**, L81 (1992)
- Weiss A. y Salaris M. astro-ph/9904236 (1999)

Wood, M. *In White Dwarfs*. Edic. Koester, D. y Werner, K. 41 (1995)

Yin S., Brown T., Heap S., *et al.* *ApJ* **533** 670 (2000)

Zinn R. y West. *ApJs* **55** 45 (1984)

Apéndice A

La dispersión $\sigma(M_v)$

En el Capítulo 2 vimos que, los datos de los CG M92 y M3, tanto fotométricos como la posición respecto con el centro del cúmulo, fueron sometidos a un proceso de selección para eliminar las estrellas de campo y estrellas propias, con mayor error observacional. En el presente apéndice describimos el procedimiento empleado en la remoción de aquellas estrellas localizadas fuera de $3\sigma(M_v)$ en el color, lo que significa que tenemos un 99 % de confianza de que cualquiera de las estrellas seleccionadas caigan a una distancia 3σ del valor promedio del color \bar{c} .

La eliminación de estrellas, bien sea de campo o no, con un error observacional mayor a $3\sigma(M_v)$ en el color se fundamenta en la suposición de que la distribución de colores del CG se aproxima a una distribución tipo gaussiana o normal. Hallar una expresión analítica de la dispersión en el color en función de M_v de las estrellas, o la función $\sigma(M_v)$, para cada cúmulo es de gran utilidad, no sólo para remover estrellas que no nos interesan o estrellas que tienen un error

observacional muy grande, sino que también, como se vió en el Capítulos 3, se utiliza en la generación de cúmulos sintéticos.

El procedimiento empleado por nosotros para encontrar una expresión analítica que aproxime $\sigma(M_v)$ para cada cúmulo es el siguiente: dividimos el DCM del CG en cuestión en franjas horizontales de ancho en M_v de 1 mag.: 10 franjas para M92 y 11 para M3. Contamos el número de estrellas N contenidas en cada franja y estimamos el color promedio \bar{c} para cada franja, obteniendo de esta manera la media de la distribución para cada franja. Luego calculamos la desviación estándar, o el estimado de la incertidumbre de las mediciones en el color σ , para cada franja, por medio de la expresión

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (c_i - \bar{c})^2} \quad (\text{A.1})$$

Como segundo paso del procedimiento, representamos gráficamente los sigmas obtenidos de cada franja en función de la M_v . Las expresiones analíticas de $\sigma(M_v)$ para M92 y M3, derivadas de ajustes a los puntos mencionados anteriormente (ver la figura A.1) vienen dadas por las expresiones A.2 y A.3.

Para NGC 6397, por simple inspección del DCM de la figura 2.2, estimamos su dispersión o σ en el color como constante para toda M_v , lo que resultó aproximadamente igual a 0.015 mag.

$$\sigma(M_v) = 0.005 \cdot e^{0.46 \cdot M_v} \quad (\text{A.2})$$

$$\sigma(M_v) = 0.00003 \cdot e^{1.09 \cdot M_v} + 0.03 \quad (\text{A.3})$$

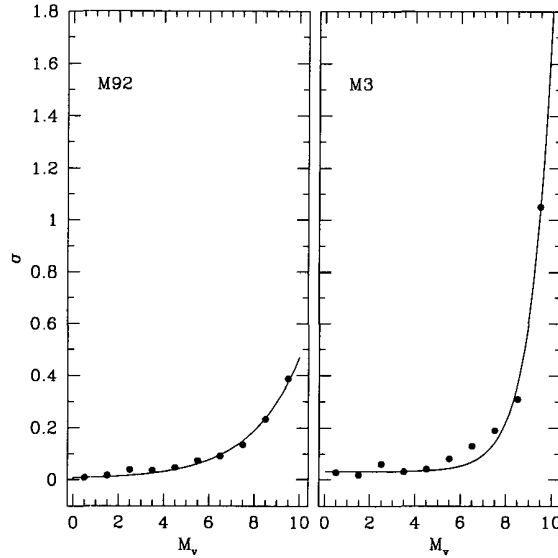


Figura A.1: **Sigmas estimados en función de M_v para los CG M92 y M3.** Los puntos representan los σ estimados correspondientes a cada M_v . La línea continua representa el ajuste de una función a tales puntos. La expresión analítica del ajuste viene dada en las expresiones A.1 y A.2 para M92 y M3. Observe que a magnitudes visuales débiles, M3 presenta una dispersión aprox. 2.5 veces mayor que M92, lo que significa que los datos de M3 fueron medidos con mayores incertidumbres que M92, para magnitudes muy débiles.

Luego que obtuvimos las expresiones de $\sigma(M_v)$ para M92 y M3, el proceso de remoción de estrellas fuera de un intervalo de $\pm 3\sigma(M_v)$ desde la media, es sencillo. Basta con eliminar aquellas estrellas de cada banda de M_v que están fuera de $\bar{c} \pm 3\sigma$. Luego, con las expresiones A.1 y A.2, y las M_v de las estrellas, determinamos los sigmas correspondientes a estas magnitudes y éstas, multiplicadas por tres, serán las dispersiones máximas en el color, tanto a un lado, como al otro de la media. Se eliminaron aquellas estrellas que sobrepasaran semejantes valores en el color para todas las M_v consideradas en la muestra de datos.

Como vimos en la sección 3.2.1, las expresiones A2 y A3 son necesarias en la generación de los cúmulos sintéticos. En la práctica, dado que las estrellas en la RGR ($M_V \leq 4$ mag.) de los CG NGC 6397, M92 y M3 lucen tener una misma dispersión en el color, y de que la dispersión de pocas estrellas involucra errores adicionales en el color, preferimos en esta región emplear un sigma igual a 0.015.