

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
ESCUELA DE INGENIERÍA DE SISTEMAS  
DEPARTAMENTO DE INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

# Metodología para el Diseño de un Laboratorio Actuarial Soportado por Tecnología de la Información y Administración del Riesgo

**Br. Juan Miguel Palma Vale**  
**Profesor Tutor: Dante Conti**

PROYECTO DE GRADO PRESENTADO ANTE LA ILUSTRE UNIVERSIDAD DE  
LOS ANDES COMO REQUISITO FINAL PARA OPTAR POR EL TÍTULO DE  
INGENIERO DE SISTEMAS

**Mérida, Abril de 2006**



Universidad de Los Andes © 2006



**PROYECTO DE GRADO  
CALIFICACIÓN FINAL**

Titulo del Proyecto de Grado: "SISTEMA DE GESTIÓN EN TORNERÍA DE CILINDROS EN EL ÁREA DE LAMINACIÓN EN FRIO DE LA EMPRESA SIDOR".

Bachiller: **YESSIKA YARLEY RINCÓN SÁEZ** C.I. **14.916.973**

1) Calificación del (de la) Profesor(a) Tutor(a): 20 (20%)

2) Calificación del manuscrito final: 20 (40%)

3) Calificación de la defensa oral: 20 (40%)

Calificación final: 20 **puntos**

Los suscritos miembros del Jurado asignan como calificación final del Proyecto de Grado la nota de:

**20** (puntos)  
Números

**Veinte** (puntos)  
Letras

**Observaciones:**

  
Prof. Wladimir Rodriguez  
Tutor

  
Prof. Isabel Besembel  
Jurado

  
Prof. Dulce Rivero  
Jurado

Mérida, 21 de Abril de 2006





**Dedicatoria**

**A mi madre María Vale fuente de inspiración, apoyo, fortaleza y amor incondicional.**

**A mi padre Miguel Palma, que desde las alturas cuida y vela por todo los pasos que doy, esto es por ti!**

**Deseo que se sientan orgullosos de mí, pues ustedes también se gradúan conmigo.**



### **Agradecimientos**

**A Dios, por darme salud, paciencia y sabiduría para poder lograr la culminación con éxito de esta meta.**

**A mi hermano Emiliano, su apoyo y lealtad son invaluableles.**

**A mi tío Antonio Vale, fuente de sabiduría, equilibrio y fino humor.**

**A mi tía Elda y mi prima María Fernanda, a las que les debo todo, gracias por todo el amor.**

**A mi Profesor Tutor Dante Conti, por su ayuda, apoyo, dedicación y esfuerzo conjunto, en el desarrollo de este proyecto.**

**A todas esas personas que estuvieron y están conmigo, y que para mal o para bien, aportaron algo para este proyecto y lo fortalecieron.**

**MUCHAS GRACIAS !**



---

**Índice de contenido.**

<b>Dedicatoria.</b>	<b>i</b>
<b>Agradecimientos.</b>	<b>ii</b>
<b>Índice de Tablas y Figuras.</b>	<b>vii</b>
<b>Resumen</b>	<b>xii</b>
<b>Capítulo 1. Marco Introductorio y Planteamiento del Problema</b>	<b>1</b>
1.1 Antecedentes	3
1.2 El problema – definición, justificación y alcance	8
1.3 Objetivos de la investigación	10
1.4 Metodología	11
1.4.1 Fase ciencias actuariales	13
1.4.2 Fase diseño y modelado	14
1.5 Palabras claves	15
<b>Capítulo 2. Fundamentos en Teoría del Riesgo y Seguros Generales</b>	<b>16</b>
2.1 Preliminares	17
2.2 Los procesos de riesgo y sus variables	17
2.2.1 Número de siniestros	18
2.2.2 Monto de los siniestros	20
2.3 El problema de los seguros	22
2.3.1 El problema de la tarificación	23
2.3.1.1 Tarificación a priori	25
2.3.1.2 Tarificación a posteriori	25
2.3.2 El problema de la administración	26
2.3.2.1 Índice de liquidez	27
2.3.2.2 Índice de solvencia	27
2.3.2.3 Índice de cobertura	28
2.3.3 Algunos fundamentos en el manejo de riesgos	29
2.3.3.1 Control de riesgos	30
2.3.3.1.1 Eliminación	30
2.3.3.1.2 Previsión – Reducción	30
2.3.3.1.3 Transferencia a otros diferente de los seguros	31
2.3.3.1.4 Retención	32
2.3.3.1.5 Transferencia al seguro	32
2.3.3.2 Breve reseña en los fundamentos matemáticos dentro de la administración	32
2.4 Principios en el cálculo de primas	35
2.5 Teoría de credibilidad	40
2.5.1 Estadística bayesiana. Teorema de Bayes	41
2.5.2 La fórmula de credibilidad	48
2.6 Modelos de cálculo de primas en seguros generales	49



---

2.6.1	Métodos frecuentistas	50
2.6.1.1	Método de la esperanza	50
2.6.1.2	Método del trapecio	51
2.6.2	Modelos de credibilidad bayesiana	54
2.6.2.1	Modelos colectivos	54
2.6.2.1.1	Modelo de Bühlmann	55
2.6.2.1.1.1	Variables del factor de credibilidad z: Bühlmann	56
2.6.2.2	Modelos jerárquicos	58
2.6.2.2.1	Modelo de Bühlmann – Straub	58
2.6.2.2.1.1	Variables del factor de credibilidad z: Bühlmann–Straub	60
2.6.2.2.2	Modelo jerárquico de Jewell	61
2.6.2.2.2.1	Variables del factor de credibilidad z: Jewell	65
2.6.3	Análisis de sensibilidad del factor z para los modelos de credibilidad	66
2.7	Análisis a posterior del cálculo de prima	67
2.7.1	Desigualdad de Chebyshev	68
2.7.2	Intervalos de confianza	71
2.7.2.1	Intervalos de confianza para la media	71
2.7.2.2	Intervalos de confianza para la varianza	73
2.7.3	Ley del interés compuesto	74
2.7.4	Índice de siniestralidad	76
<b>Capítulo 3. Esquematización y Lineamientos para el Diseño del Laboratorio Actuarial: Metodología Propuesta</b>		<b>78</b>
3.1	Preliminares	79
3.2	Resumen de los métodos y/o modelos para el cálculo de primas	80
3.3	Principios para la selección de un modelo para el cálculo de la primas	83
3.3.1	Fases de la metodología propia para el diseño del Laboratorio Actuarial	85
3.3.1.1.	Fase I: Ciencias Actuariales.	86
3.3.1.1.1.	Sub – Fase 1: Preparación y vista actual de la empresa	87
3.3.1.1.2.	Sub – Fase 2: Planificación de los fines, metas y alcances	88
3.3.1.1.3.	Sub – Fase 3: Planificación de los medios, métodos y herramientas	88
3.3.1.1.3.1.	Selección de los de los algoritmos de tarificación	89
3.3.1.1.3.2.	Aplicación de los modelos para el cálculo de primas (Fase de ejecución)	97
3.3.1.1.3.2.1	Estructura de la tarifa	97
3.3.1.1.3.2.1.1	Selección de los factores de riesgo	98
3.3.1.1.3.2.1.2.	Determinación de las clases de tarifas	102
3.3.1.1.3.2.1.3.	Obtención de los grupos de tarifas	102
3.3.1.1.3.2.2.	Cálculo de la tarifa	102
3.3.1.1.3.2.3.	Implementación de la tarifa	103
3.3.1.1.4.	Sub – Fase 4: Planificación de los recursos y requerimientos	103
3.3.1.2.	Fase II: Tecnologías de la información y comunicación	104
3.3.1.2.1.	Sub – Fase 5: Análisis, diseño e implementación	105

---



---

3.3.1.2.2. Sub – Fase 6: Implantación del Laboratorio Actuarial	106
3.3.1.2.3. Sub – Fase 7: Pruebas, entregas y puesta en marcha	106
3.3.2. Resumen de las sub-fases de la metodología propuesta	107
3.3.3 Beneficios administrativos de un buen modelo para el cálculo de primas de riesgo (Laboratorio Actuarial)	109
<b>Capítulo 4. Metodología para el Diseño, Desarrollo y Futura Implementación de un Sistema de Información Gerencial (SIG) de un Laboratorio Actuarial bajo el soporte de Tecnologías de Información (TIC).</b>	<b>110</b>
4.1 Preliminares	111
4.2 Sistema de información gerencial (SIG)	111
4.3 Metodología recomendada para el diseño e implementación del SIG: Laboratorio Actuarial	114
4.3.1 Metodología WATCH EXTENDIDO	115
4.3.2 Arquitectura a n-capas	116
4.3.3 UML (Unified Modelling Language)	118
4.4 Diseño del Laboratorio Actuarial como un Sistemas de Información Gerencial	120
4.4.1 Procesos gerenciales	122
4.4.2 Modelado de negocios	123
4.4.2.1 Requerimientos del proyecto	126
4.4.2.2 Casos de uso	128
4.4.2.3 Descripción de los casos de usos	130
4.4.2.4 Eventos	131
4.4.3 Definición y especificación del Laboratorio Actuarial	132
4.4.3.1 Requerimientos de la aplicación	132
4.4.3.1.1 Requerimientos técnicos	133
4.4.3.1.2 Requerimientos de la aplicación	133
4.4.3.2 Modelo Conceptual	134
4.4.3.3 Diagrama de clases	136
4.4.3.4 Diagramas de interacción	137
4.4.3.5 Diagramas de estado	138
4.4.3.6 Diagramas de actividades	139
4.4.4 Diseño de la aplicación	141
4.4.4.1 Sitio Web conceptual	141
4.4.4.2 Diseño de la arquitectura	143
4.4.5 Fase de implementación	144
4.5 Esquema resumen de la metodología propuesta para la creación de un Laboratorio Actuarial	146
<b>Capítulo 5. Pruebas y Resultados</b>	<b>148</b>
5.1 Preliminares	149
5.2 Seguro directo operación de accidentes y enfermedades para México.	149
5.2.2 Cálculo de los índices de siniestralidad, reserva de seguridad y costo promedio.	153
5.2.3 Prima por los métodos frecuentistas	159
5.2.4. Cálculo de la prima por el modelo de Bühlmann – Straub	167
5.2.4.1. Cálculo del ponderador de los tipos de póliza ( $w_{jr}$ , $w_j$ y $W$ )	170

---



---

5.2.4.2. Cálculo del monto promedio de siniestros de los tipos de pólizas ( $X_{jw}$ y $X_{ww}$ )	171
5.2.4.3. Cálculo de la dispersión $S^2$	172
5.2.4.4. Cálculo de la heterogeneidad $a$	174
5.3 Tablas resumen de los índices totales por años	176
<b>Capítulo 6. Conclusiones y Recomendaciones</b>	<b>177</b>
<b>Referencias Bibliográficas</b>	<b>182</b>
<b>Apéndices</b>	<b>185</b>
Apéndice A	186
Apéndice B	194
Apéndice C	213
Apéndice D	236
Apéndice E	248
Apéndice F	254
Apéndice G	274



---

**Índice de tablas y figuras****Tablas**

<b>N°</b>	<b>Título</b>	
2.1	Distribuciones de probabilidad más comunes para la distribuciones de riesgo	22
2.2	Rango del índice de liquidez	27
2.3	Rango del índice de solvencia	28
2.4	Rango del índice de cobertura	28
2.5	Rango de las Reservas de Seguridad	34
2.6	Principios de cálculos de prima	37
2.7	Cuatro principios y las propiedades que verifica la verdadera prima	40
2.8	Principios de cálculo de primas (prima neta y exponencial) para primas verdaderas, a priori y a posteriori	47
2.9	Principios de cálculo de primas (Esscher y varianza) para primas verdaderas, a priori y a posteriori	47
2.10	Interpretación del factor de credibilidad $z$	49
2.11	Cálculo de la prima según el método de la esperanza para las distribuciones de probabilidad más comunes para la distribuciones de riesgo	51
2.12	Número de clases, límite inferior y límite superior de las mismas	53
2.13	Observación de los conglomerados en el tiempo	56
2.14	Términos del Modelo Bühlmann - Straub	59
2.15	Términos en el Modelo Jerárquico de Jewell	62
2.16	Términos en el Modelo Jerárquico de Jewell para sumas ponderadas	63
2.17	Variación del factor B de la fórmula de credibilidad	66
2.18	Variación del factor A de la fórmula de credibilidad	66
2.19	Variación del factor C de la fórmula de credibilidad	67
2.20	Valores de $k$ según el nivel de quasi-certidumbre $\eta$	69
3.1	División de los seguros generales caso de Venezuela	79
3.2	Ventajas y desventajas de los métodos y/o modelos para el cálculo de la prima	80
3.3	Aplicación de los métodos y/o modelos para el cálculo de la prima	83
3.4	Matriz de decisión para los métodos frecuentistas	90
3.5	Matriz de decisión para el modelo de Bühlmann	91
3.6	Matriz de decisión para el modelo de Bühlmann-Straub	92
3.7	Matriz de decisión para el modelo jerárquico de Jewell	93
3.8	Consecuencias posibles relacionadas a los modelos para el cálculo de primas	94
3.9	Resumen de las sub-fases de la metodología propuesta	107
4.1	Diagramas UML para modelado de sistemas	118
4.2	Proceso gerencial para el diseño del Laboratorio Actuarial	122
4.3	Alcance del dominio del Laboratorio Actuarial	124
4.4	Requerimientos del proyecto	127
4.5	Tablas descriptivas de los casos de uso para el cálculo de la tarifa y la reserva	130
4.6	Tablas descriptivas de los eventos para el casos de uso: Cálculo de la tarifa	132
4.7	Fases de implementación del Laboratorio Actuarial	146
5.1	Algoritmo base del pre-procesamiento de los datos	149

---



---

5.2	Datos para el año 1995 para el caso mexicano	150
5.3	Datos para el año 1996 para el caso mexicano	150
5.4	Datos para el año 1997 para el caso mexicano	151
5.5	Datos para el año 1998 para el caso mexicano	151
5.6	Datos para el año 1999 para el caso mexicano	151
5.7	Datos para el año 2000 para el caso mexicano	152
5.8	Datos para el año 2001 para el caso mexicano	152
5.9	Datos para el año 2002 para el caso mexicano	152
5.10	Datos para el año 2003 para el caso mexicano	153
5.11	Datos para el año 2004 para el caso mexicano	153
5.12	Algoritmo base para el cálculo de la siniestralidad	153
5.13	Algoritmo base para el cálculo de la reserva de seguridad	155
5.14	Siniestralidad, reserva de seguridad, porcentaje de siniestros y costo promedio de los siniestros para el caso mexicano 1995	156
5.15	Siniestralidad, reserva de seguridad, porcentaje de siniestros y costo promedio de los siniestros para el caso mexicano 1996	156
5.16	Siniestralidad, reserva de seguridad, porcentaje de siniestros y costo promedio de los siniestros para el caso mexicano 1997	156
5.17	Siniestralidad, reserva de seguridad, porcentaje de siniestros y costo promedio de los siniestros para el caso mexicano 1998	157
5.18	Siniestralidad, reserva de seguridad, porcentaje de siniestros y costo promedio de los siniestros para el caso mexicano 1999	157
5.19	Siniestralidad, reserva de seguridad, porcentaje de siniestros y costo promedio de los siniestros para el caso mexicano 2000	157
5.20	Siniestralidad, reserva de seguridad, porcentaje de siniestros y costo promedio de los siniestros para el caso mexicano 2001	158
5.21	Siniestralidad, reserva de seguridad, porcentaje de siniestros y costo promedio de los siniestros para el caso mexicano 2002	158
5.22	Siniestralidad, reserva de seguridad, porcentaje de siniestros y costo promedio de los siniestros para el caso mexicano 2003	158
5.23	Siniestralidad, reserva de seguridad, porcentaje de siniestros y costo promedio de los siniestros para el caso mexicano 2004	159
5.24	Algoritmo base para el cálculo de la prima por el Método del Trapecio	159
5.25	Tabla resumen del año 1999, para el cálculo de la prima por el Método del Trapecio	161
5.26	Número de asegurados (presencias), primas directas emitidas (esperadas), primas devengadas (reales), costo promedio de los siniestros, la frecuencia relativa de siniestros y el porcentaje de siniestros para el caso mexicano 1995	162
5.27	Número de asegurados (presencias), primas directas emitidas (esperadas), primas devengadas (reales), costo promedio de los siniestros, la frecuencia relativa de siniestros y el porcentaje de siniestros para el caso mexicano 1996	162
5.28	Número de asegurados (presencias), primas directas emitidas (esperadas), primas devengadas (reales), costo promedio de los siniestros, la frecuencia relativa de siniestros y el porcentaje de siniestros para el caso mexicano 1997	163
5.29	Número de asegurados (presencias), primas directas emitidas (esperadas), primas devengadas (reales), costo promedio de los siniestros, la frecuencia	163

---



---

	relativa de siniestros y el porcentaje de siniestros para el caso mexicano 1998	
<b>5.30</b>	Número de asegurados (presencias), primas directas emitidas (esperadas), primas devengadas (reales), costo promedio de los siniestros, la frecuencia relativa de siniestros y el porcentaje de siniestros para el caso mexicano 1999	163
<b>5.31</b>	Número de asegurados (presencias), primas directas emitidas (esperadas), primas devengadas (reales), costo promedio de los siniestros, la frecuencia relativa de siniestros y el porcentaje de siniestros para el caso mexicano 2000	164
<b>5.32</b>	Número de asegurados (presencias), primas directas emitidas (esperadas), primas devengadas (reales), costo promedio de los siniestros, la frecuencia relativa de siniestros y el porcentaje de siniestros para el caso mexicano 2001	164
<b>5.33</b>	Número de asegurados (presencias), primas directas emitidas (esperadas), primas devengadas (reales), costo promedio de los siniestros, la frecuencia relativa de siniestros y el porcentaje de siniestros para el caso mexicano 2002	164
<b>5.34</b>	Número de asegurados (presencias), primas directas emitidas (esperadas), primas devengadas (reales), costo promedio de los siniestros, la frecuencia relativa de siniestros y el porcentaje de siniestros para el caso mexicano 2003	165
<b>5.35</b>	Número de asegurados (presencias), primas directas emitidas (esperadas), primas devengadas (reales), costo promedio de los siniestros, la frecuencia relativa de siniestros y el porcentaje de siniestros para el caso mexicano 2004	165
<b>5.36</b>	Prima técnicas, sobreprima de seguridad, incremento de interés, incremento de inflación y los incrementos de gastos administrativos para el caso mexicano	166
<b>5.37</b>	Varianza y desviación para el cálculo de la sobreprima para el caso mexicano	166
<b>5.38</b>	Algoritmo base para el cálculo de la prima por el Modelo de Bühlmann - Straub	168
<b>5.39</b>	Obtención del ponderador de las pólizas para el caso mexicano 1995 - 1999	171
<b>5.40</b>	Obtención del ponderador de las pólizas para el caso mexicano 2000 - 2004	171
<b>5.41</b>	Cálculo del monto promedio de siniestros para el caso mexicano 1995 - 1999	171
<b>5.42</b>	Cálculo del monto promedio de siniestros para el caso mexicano 2000 - 2004	172
<b>5.43</b>	Cálculo de los ponderadores para obtener la dispersión $S^2$	172
<b>5.44</b>	Cálculo de los ponderadores para la heterogeneidad $a$	174
<b>5.45</b>	Cálculo de los ponderadores y monto promedio para la heterogeneidad $a$	174
<b>5.46</b>	Factor de credibilidad para el caso mexicano	175
<b>5.47</b>	Primas de credibilidad por póliza	176
<b>5.48</b>	Tabla resumen de los índices desde 1995 - 1999	176
<b>5.49</b>	Tabla resumen de los índices desde 2000 - 2004	176
<b>C.1</b>	Observación de las conglomerados en el tiempo	218
<b>C.2</b>	Términos del Modelo Bühlmann - Straub	223
<b>C.3</b>	Términos en el Modelo Jerárquico de Jewell	228
<b>C.4</b>	Términos en el Modelo Jerárquico de Jewell para sumas ponderadas	231
<b>D.1</b>	Components of the Process Level	239
<b>D.2</b>	The Methodological Level: phases and activities	240
<b>D.3</b>	The Managerial & Integral Activities	243
<b>F.1</b>	Tablas descriptivas de los casos de uso propuestos	254
<b>F.2</b>	Tablas descriptivas de los eventos de cada uno de los casos de uso	259

---

**Figuras**

<b>N°</b>	<b>Título</b>	
1.1	Esquema del laboratorio actuarial	12
1.2	Diagrama de la metodología del proceso Reloj	13
2.1	División de métodos de administración de riesgo	29
2.2	Principios de cálculo de primas	36
2.3	Esquema de métodos y modelos para el cálculo de primas de riesgo	49
2.4	Representación de un diagrama de frecuencias para el riesgo	52
2.5	Cuantiles de la distribución $\chi^2_{n-1}$	73
3.1	Etapas de la aplicación de un modelo para el cálculo de primas	97
4.1	Esquema básico de un SIG	113
4.2	Diagrama de la metodología del proceso Reloj	115
4.3	Diagrama de arquitectura a tres capas	117
4.4	Diagrama del sistema puente	121
4.5	Diagrama de caso de uso general	128
4.6	Diagrama de caso de uso detallado	129
4.7	Modelo conceptual	135
4.8	Diagrama de clases	136
4.9	Diagrama de secuencia para el cálculo de la prima	137
4.10	Diagrama de colaboración para el cálculo de la prima	138
4.11	Diagrama de estado para los objetos Actuario, Conglomerado y Siniestro	139
4.12	Diagrama de actividades para el cálculo de la prima	140
4.13	Diagrama Web conceptual para el Laboratorio Actuarial	141
4.14	Diagrama Web detallado para el caso del cálculo de la prima	142
4.15	Diagrama de arquitectura a tres capas para el laboratorio actuarial	143
4.16	Esquema general de la metodología propuesta	147
C.1	División de un portafolio para el Modelo de Jewell	227
D.1	The structure of the Watch Process Model	238
D.2	The Watch Process Model	241
G.1	Diagrama de secuencia para el análisis del número de siniestros	274
G.2	Diagrama de colaboración para el análisis del número de siniestros	275
G.3	Diagrama de secuencia para el análisis del monto de los siniestros	275
G.4	Diagrama de colaboración para el análisis del monto de los siniestros	276
G.5	Diagrama de secuencia para el cálculo de la siniestralidad	276
G.6	Diagrama de colaboración para el cálculo de la siniestralidad	277
G.7	Diagrama de secuencia para el cálculo de la reserva de seguridad	277
G.8	Diagrama de colaboración para el cálculo de la reserva de seguridad	278
G.9	Diagrama de secuencia para la generación de los reportes	278
G.10	Diagrama de colaboración para la generación de reportes	279
G.11	Diagrama de estado para los objetos Reserva y Reporte	280
G.12	Diagrama de estado para los objetos Siniestralidad y Prima	281
G.13	Diagrama de estado para el objeto Análisis	282
G.14	Diagrama de actividades para el número de siniestros	282
G.15	Diagrama de actividades para el monto de los siniestros	283



<b>G.16</b>	Diagrama de actividades para el índice de siniestralidad	284
<b>G.17</b>	Diagrama de actividades para el cálculo de las reservas	285
<b>G.18</b>	Diagrama de actividades para la generación de reportes	286
<b>G.19</b>	Diagrama de actividades para la comparación de variables	287
<b>G.20</b>	Diagrama de actividades para el cálculo de proyecciones en el tiempo	288

**Resumen.**

Las entidades de seguros representan un factor de suma importancia dentro de la economía de cada país y a nivel mundial. La estabilidad, fiabilidad y eficiencia de la administración de los seguros, es entonces una tarea ardua e importante donde convergen diferentes ciencias y profesiones, haciendo de esto un sistema complejo y dinámico. Por estos motivos, el presente proyecto de grado *“Metodología para el Diseño de un Laboratorio Actuarial Soportado en Teoría del Riesgo y Sistemas de Información”* aborda los tópicos más importantes que engloban una compañía de seguros, analizando métodos matemáticos-estadísticos y económicos-financieros que son la base de este tipo de sistemas, combinándolos con técnicas de desarrollo de sistemas de información gerenciales para de esta manera optimizar sus procesos productivos.

En esta investigación se presenta una metodología ecléctica para la adopción, diseño e implementación bajo sistemas programados de las técnicas más avanzadas de tarificación y administración de los riesgos, así como el cálculo y análisis de los índices, factores y variables que se desprenden del mismo. Además de proponer estrategias, planteamientos gerenciales y metodologías alternas que perfeccionan la aquí planteada.

Las técnicas de tarificación trazadas se derivan de la teoría de la credibilidad y herramientas heurísticas basada en análisis de frecuencias; mientras que las de administración se componen de análisis de sensibilidad de la tarifa ya calculada mediante el teorema de Chebyshev, ley del interés compuesto y gastos administrativos y de crecimiento de la empresa que dependen de la experiencia del actuario y la junta directiva de la compañía. Adicionalmente, realizar los diseños mediante la metodología para diseño de software WACTH extendida y el lenguaje unificado de modelos (UML).

Se delimita la investigación a solo la fase de análisis, ponderación, calificación, selección de las técnicas de tarificación, administración y análisis de los factores de riesgo, y su diseño como una aplicación programada bajo plataforma Web.

**Palabras Claves:** teoría del riesgo, teoría de credibilidad, laboratorio actuarial, ciencias actuariales, modelos de credibilidad, tarificación, seguros, sistemas de información gerencial.



## Capítulo 1

# Marco Introdutorio y Planteamiento del Problema



El siguiente proyecto de Grado titulado “Metodología para el diseño de un Laboratorio Actuarial soportado en Teoría del Riesgo y Tecnologías de la Información” se presenta esquematizado en seis (06) capítulos, los cuales ilustran el trabajo secuencial de investigación. De manera resumida se tiene:

- Capítulo I. *Marco Introdutorio y Planteamiento del Problema*: donde se exponen una breve reseña histórica y los antecedentes del proyecto desarrollado, el planteamiento del problema, así como los objetivos tanto generales y específicos que se persiguen, su justificación y la metodología que se usó en el desarrollo del proyecto.
- Capítulo II. *Fundamentos en Teoría del Riesgo y seguros generales*: se desarrollan los tópicos teóricos de los cuales se nutre el proyecto; conceptos básicos de **Teoría de Credibilidad**, los modelos con los que se trabaja y los detalles concernientes a estos modelos. Por otro lado, se encuentra la **Teoría de Riesgo**, definiciones bases, variables a contemplar y modelos probabilísticos que se ajustan a la teoría; y por último los conceptos y características particulares de los **Seguros Generales**, que es el enfoque en el que se encuentra basado nuestro estudio.
- Capítulo III. *Esquematización y Lineamientos para el diseño del Laboratorio Actuarial: Metodología Propuesta*: capítulo donde se selecciona los métodos descritos en el capítulo anterior, que se han aplicado en el proyecto. Así como, los fundamentos para la selección de esos modelos, la aplicación de los modelos seleccionados a el caso de estudio, descripción de las condiciones y suposiciones pertinentes al caso en estudio y los estudios analíticos pertinentes al caso.
- Capítulo IV. *Metodología para el Diseño, Desarrollo y Futura Implementación de un Sistema de Información Gerencial (SIG) de un Laboratorio Actuarial bajo el soporte de Tecnologías de Información (TIC)*: en esta sección se describe en detalle que es un **Laboratorio Actuarial**, sus ventajas y requerimientos técnicos y teóricos; al igual que todo el soporte en **Sistemas de Información** que debe llevar un sistema de esta categoría. Metodologías recomendadas para su diseño e implantación, utilización de



UML para el modelado de los procesos que ejecuta el Laboratorio, diseño de la Base de Datos Relacional del sistema y como debe ser alimentado por datos externos para su perfecta ejecución y óptimo rendimiento.

- Capítulo V. **Pruebas y resultados.** Se expondrán en este tópico de la investigación, todos los resultados y pruebas que se realizaron al **Laboratorio Actuarial**, y a los métodos y modelos utilizados por este.
- Capítulo VI. **Conclusiones y recomendaciones.** Se detallarán, todas y cada una de las conclusiones arrojadas por el proyecto y las recomendaciones que se realizan para estudios posteriores, nuevas implementaciones, ampliación del laboratorio, plataforma tecnológica recomendada y ámbitos en los cuales se debería probar e implementar.

## 1.1 ANTECEDENTES

Como premisa inicial de esta monografía es necesario establecer ciertos conceptos básicos para la lectura y comprensión de la misma, ya que este trabajo toca terminología técnica propia de las ciencias actuariales y la gestión de carteras de seguros. Se comenzará entonces por abordar conceptos básicos y el marco evolutivo de los seguros con el fin de introducir al lector a la definición, planteamiento y objetivos de esta investigación.

Una “mutua de seguros” es un *grupo de personas que previsora y solidariamente hacen aportaciones a un fondo común de tipo financiero o monetario para compensar en un futuro los siniestros, defunciones, etc. que pudieran ocurrirles* [1]. Por otra parte, “una compañía de seguros” es una empresa, con ánimo de lucro, que se establece para ofrecer al público general los mismos servicios de la mutua [1], pero que persigue un enriquecimiento sano.

Los seguros permiten diluir la incertidumbre, el riesgo, los daños potenciales que pueden tener un grupo de asegurados. Esto se debe a que solo de algo se esta **seguro** dentro de los

---



**seguros**, los  **siniestros**  van a ocurrir, no se conoce con certeza quienes serán las víctimas pero si que habrá víctimas.

Desde tiempos inmemoriales, el hombre en su afán de combatir la incertidumbre que genera cualquier acción o evento interno o externo a su causa, ha buscado medios para disminuir estas repercusiones. Acciones estas, que se pueden catalogar como de  **acción – reacción** , pues un evento de  **riesgo**  intrínsecamente trae consigo, una necesidad de tener  **seguridad**  de algún tipo, para permitir en muchos casos tomar la decisión de realizar o no dicha acción o eventualidad en que se encuentra un sujeto.

En las antiguas civilizaciones, estas prácticas fueron establecidas y ordenadas dando pie a lo que hoy se conoce como  **seguros** . La primera noción la impartieron los  *babilonios* , mediante el  **financiamiento**  de viajes marítimos ( *préstamos a la gruesa* ); pasando luego por los romanos quienes fundaron (a “grosso modo”) los seguros de vida, mediante agrupaciones o mutuas que realizaban colectas, para después distribuir los fondos entre sus miembros en caso de muerte de alguno de ellos.

En la Edad Media con la explosión del comercio entre los países del Viejo y Nuevo Mundo, las prácticas de seguros mediante financiamiento y colectivos se vieron ampliadas enormemente; jugando Inglaterra (Londres en especial) un papel de gran importancia, tanto así, que se le conoció como la capital aseguradora del mundo. Las primeras compañías u organizaciones con objetos sociales y definidos como aseguradoras nacieron en Alemania e Inglaterra entre 1670 y 1720.

Es en este punto crucial, cuando gracias a los grandes matemáticos y estadísticos de la época - *E. Halley, A. De Moivre, C. Huggens, J. Bernoulli, G. W. Leibnitz, T. Bayes* , entre otros - con sus teoremas y conceptos, dieron pie a la fusión de la necesidad natural (seguridad frente al riesgo) con las ciencias; naciendo de esta manera, las  **Ciencias Actariales** , las cuales a lo largo del devenir científico se fueron enriqueciendo día tras día, sobretodo con los aportes y avances de la teoría del riesgo.



Alguno de estos hallazgos que facilitaron y nutrieron el crecimiento de las **Ciencias Actuariales** fueron:

- Tablas de Mortalidad (*E. Halley*)
- Cálculo de rentas vitalicias (*A. De Moivre*)
- Teorema del Límite Central (*Gauss*)
- La Ley de los Grandes Números (*J. Bernoulli* y *C. Huygens*)
- Esperanza matemática (*C. Huygens*)
- Desviación típica y varianza (*D. Bernoulli*)
- Teorema de Bayes (*T. Bayes*)

Este crecimiento exponencial hizo de las **Ciencias Actuariales** una materia apasionante, que algunos estudiosos del área la clasifican como una vertiente de las ciencias matemáticas, y a la cual dedicaron sus estudios. Estas investigaciones generaron la **Teoría de Credibilidad**, que estudia el problema general de la tarificación en los seguros, es decir, “*dado un riesgo asociado cualquiera, cuánto se debe tarifar para cubrir dicho riesgo reduciendo la incertidumbre y la no generación de pérdidas*”. Así surgieron los grandes autores y maestros de la **Teoría de Credibilidad** como *H. Buhlmann, H. Gerber, L. Freifelder, J. Berger* y *W.S. Jewel*.

Paralelamente, la Investigación de Operaciones y sus herramientas establecidas en métodos cuantitativos matemáticos y probabilísticos han tenido en los últimos años gran aplicación en un sin fin de ramas del quehacer económico y social, entre los que se tienen aplicaciones para la tarificación y gestión de carteras de seguros.

Los seguros fueron en su día una extraordinaria innovación financiera, tanto por la vertebración social que generó la asunción mutua de riesgos como por el impulso que la contratación de seguros trajo al mecanismo de transferencia de riesgos y el desarrollo del comercio financiero. Además, es de vital importancia resaltar que gracias a creer en la confiabilidad de una ley matemática – probabilística, como lo es la **Ley de Los Grandes**



*Números*, se pueden diseñar esquemas con los que un grupo de personas se atreve a anticipar (solidariamente) a los siniestros individuales que ocurrirán.

Uno de los sectores económicos, que sin la menor duda, fundamenta sus operaciones y reglas de funcionamiento en la Investigación de Operaciones, lo constituye el sector asegurador y de previsión social. El campo de los seguros hace uso extensivo de la Estadística y del cálculo de probabilidades para establecer y evaluar los criterios de funcionamiento y rentabilidad económica. Por ejemplo, una empresa aseguradora trata de evaluar una frecuencia anual de siniestros, con el fin de establecer el costo mínimo del monto de las primas que le permitan cumplir sus compromisos y garantizar a su vez un volumen de negocios rentable y productivo. Además, las herramientas propias de la Inferencia Estadística, Teoría del Riesgo y la Estadística Multivariante son capaces de ofrecer a la empresa de los seguros los lineamientos necesarios para la administración de las carteras y portafolios de riesgos, estableciendo patrones de seguridad y pronósticos ante diversos escenarios.

La industria del seguro y las propias ciencias actuariales, han dividido los seguros en dos grandes ramos para su estudio: la rama de los **seguros de vida** y la rama de los **seguros generales** (autos, hogares, servicios pre-hospitalarios, servicios hospitalarios y procedimientos quirúrgicos, entre otros.).

Esta filosofía netamente cuantitativa se maneja paralelamente con políticas comerciales y de administración y da cabida al surgimiento de las ciencias actuariales propias del campo financiero y de los seguros.

Adicionalmente, hoy en día, el avance y crecimiento exponencial de la Tecnología de la Información permite conjugar los métodos clásicos con sistemas de información expertos y capaces de servir de soporte en el proceso de toma de decisiones y evaluación de escenarios para el correcto manejo de carteras de seguros y/o productos – servicios de previsión social.



Lo anterior, se puede resumir mediante aplicaciones comerciales de evaluación de riesgos en sistemas de información gerencial sustentados en manejo robusto de datos en plataforma de **Datawarehousing** mezclando criterios estadísticos de minería de datos aplicados a variables descriptivas determinantes en el campo de los seguros.

Históricamente en Venezuela, los seguros entraron por medio de compañías extranjeras que prestaban sus servicios en el país. Hasta que en 1893 se fundó la **Compañía Venezolana de Seguros**. De allí en adelante se fundaron una serie de empresas aseguradoras en las principales ciudades de la nación.

En 1935 el Ministerio de Fomento dictó la Ley de Seguros, que posteriormente, en 1965 se conocería como la **Ley de Empresas de Seguros y Reaseguros**. En la actualidad existen alrededor de 50 empresas de seguros que prestan servicio en el país y que con el transcurrir de los días siguen captando clientes, pues han despertado la necesidad en el venezolano de reducir la incertidumbre y el riesgo en diferentes áreas de su desarrollo cotidiano.

En Venezuela, las empresas del ramo se han alejado, en gran medida de los avances actuariales, ya que la mayoría de ellas operan con criterios comerciales y dejan muy de lado la planificación técnica o actuarial. No obstante, la presencia reciente de empresas europeas y norteamericanas que han adquirido gran parte de las empresas nacionales comienza a solidificar una cultura actuarial dentro del ramo creando un panorama alentador para desarrollar investigaciones ligadas al sector.

Estas premisas dan pie a idear el siguiente proyecto de grado, el cual en su espina dorsal de desarrollo persigue en líneas globales conjugar las herramientas clásicas de las ciencias actuariales junto a técnicas emergentes para la interpretación de datos y su implementación en un sistema de información gerencial, denotado como **Laboratorio Actuarial** facilitando el proceso de toma de decisiones dentro de un ramo asociado al manejo y administración de carteras de seguros. Su enfoque es inicial y pretende abrir una línea de investigación encarada en crear y desarrollar metodologías capaces de gestionar carteras de seguro



monoramo sobretodo en empresas aseguradoras denotadas como mutuales y medianos gestores del sector asegurador.

## 1.2 EL PROBLEMA – DEFINICIÓN, JUSTIFICACIÓN Y ALCANCE

El presente estudio permite delimitar y definir el problema o eje central de la investigación en el diseño de la metodología propuesta para la implementación de un **Laboratorio Actuarial**, el cual puede describirse como un sistema de información gerencial que conjuga en su diseño y funcionalidad los criterios clásicos de las ciencias actuariales, la inferencia estadística y el uso de técnicas emergentes de la minería de datos para así, obtener una herramienta de soporte en la planificación técnica de carteras de seguros aplicadas a un ramo en particular.

La importancia del problema resulta evidente ya que una empresa de servicios referida al sector de seguros y de previsión social debe manejar a futuro la determinación óptima de puntos de equilibrio entre costos e ingresos. Esta relación básica de factibilidad económica no es tan fácil de tener clara cuando se manejan eventos netamente aleatorios y a futuro. Por lo tanto, un laboratorio actuarial persigue establecer criterios mínimos de operación técnica que garanticen el correcto manejo en la relación costos – beneficios de una empresa de seguros. Dicha relación se proyecta netamente en manejo adecuado de siniestros (costos) versus la determinación técnica y comercial del valor de las primas (ingresos).

El mundo de los negocios se ha tornado sumamente competitivo y complejo. Pero el mercado de los seguros aún más, tanto que hoy en día la gerencia se ha visto en la necesidad de adoptar nuevos estilos administrativos, reestructurar su información, invertir en tecnología, optimizar los costos para generar mayor rendimiento, emplear reingenierías y reconversiones a todos los niveles y así estar preparados de tal manera que el negocio no se quede estancado y acribillado por la competencia.



Esto se ve reflejado en un excelente trato y cuidado para el cliente, pues es el factor crucial y decisivo en toda empresa o negocio. Para esto la organización se debe avocar a las cuatro prácticas de *resultado final* que deben ejercer con sus clientes:

- **Calidad:** La expectativa de los clientes de un producto o servicio debe cumplirse y superarse. Los gerentes deben garantizar que todo lo que la organización produzca sea atractivo, confiable y carezca de defectos.
- **Costo:** Los bienes y/o servicios deben ser valiosos ofrecerse a precios que el cliente este dispuesto a pagar. Para alcanzar esta meta, los gerentes deben mantener sus costos bajo control para permitirle a la empresa fijar precios justos que cubran los egresos y rindan una utilidad.
- **Innovación:** Los gerentes deben luchar constantemente para crear rápidamente nuevos bienes y servicios competitivos que los clientes valoren. Esta práctica es clave para mantenerse a la cabeza de los competidores.
- **Velocidad:** La organización debe responder rápidamente a las necesidades del mercado por la introducción primero de los productos nuevos; segundo por la entrega rápida de los pedidos de los clientes, y tercero por la respuesta rápida de sus solicitudes.

El **Laboratorio Actuarial** propuesto como tema de este proyecto se enfocará en primera instancia en la determinación de escenarios para los siniestros versus las primas técnicas a cobrar teniendo como base primordial los datos históricos recientes de la cartera de seguros. En segunda fase se aplicarán técnicas de análisis multivariante y de conglomerados a los fines de optimizar portafolios de seguros personalizando tarifas y en tercera fase traducir estas herramientas en la aplicación de un caso empresarial conexo a la previsión social.

De manera un poco más detallada, se presenta el **Laboratorio Actuarial** como un plan piloto resultante de la implementación automatizada de los métodos cuantitativos antes descritos. Para ello, se enfocará el problema en:

- Análisis de Riesgo (Enfoque descriptivo): Manejo de indicadores actuariales en la gestión de seguros. Criterios de administración y credibilidad de portafolios.



- Agrupamiento de Variables determinantes dentro de la cartera.
- Selección de variables de riesgo mediante análisis multivariante.
- Implementación de tarifas personalizadas o por grupo según los análisis previos. Es precisamente este punto, en el que se basa el laboratorio. Pues, es crucial para una compañía de seguros saber el monto exacto que debe cobrar a sus clientes, para evadir lo más posible el riesgo y además tener una relación de costos – beneficios positiva, mantener sus clientes y atraer nuevos.
- Comparación de los criterios técnicos obtenidos cuantitativamente versus las políticas comerciales de la empresa y la competencia.

### **1.3 OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN**

#### **GENERAL**

Explicar y fundamentar los lineamientos para el diseño y la futura implementación de un **Laboratorio Actuarial** bajo teoría clásica y técnicas emergentes de análisis de datos.

#### **OBJETIVOS ESPECÍFICOS**

- Conjugar las técnicas clásicas de las ciencias actuariales con técnicas de análisis multivariante soportadas con manejo de Tecnología de la Información aplicadas al sector de los seguros.
- Establecer mecanismos de personalización en el manejo de siniestros y tarifas que



garanticen mayor competitividad y rentabilidad en la administración de una cartera de seguros.

- Aplicar los lineamientos del laboratorio actuarial a un ramo o sector dentro de los seguros o previsión social para una empresa.
- Aplicación de metodología y políticas de ingeniería de software para el diseño del sistema actuarial planteado.
- Dada la carencia de literatura en lengua castellana referida a técnicas sofisticadas en el desarrollo actuarial y sus aplicaciones, se persigue con este proyecto redactar artículos técnicos y monográficos que contribuyan al acervo de la literatura actuarial en Venezuela.
- Utilización y recomendación en el uso del Software Libre para el diseño y la implementación del Laboratorio Actuarial.

## 1.4 METODOLOGÍA

La metodología a utilizar dentro del diseño y desarrollo del **Laboratorio Actuarial**, se basa en dos grandes etapas o **fases**. Estas fases, se caracterizan por dividir la parte científico – matemático – probabilística de la parte de Sistemas de información, diseño y requerimientos del sistema actuarial. Ver Figura 1.1.

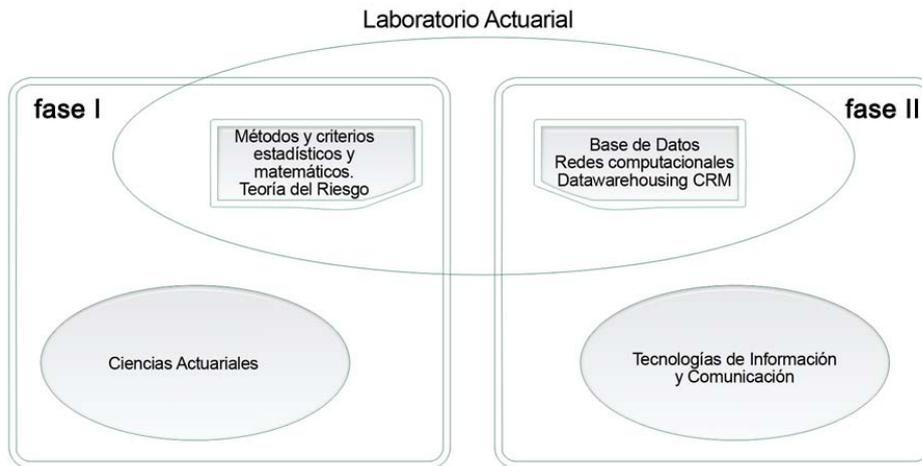


Figura. 1.1 Esquema del laboratorio actuarial

Esta metodología se aplica por la facilidad que otorga en la creación y puesta en marcha del **Laboratorio Actuarial**, y además de complementar por su características cíclica – espiral, las metodologías de ingeniería de software para el diseño e implantación de sistemas programados de alta calidad. Es decir, se podrían ver en la primera fase, como ciclo o etapas agregadas al *modelo de procesos de reloj para el desarrollo de aplicaciones de software* [2] que se utilizan para el diseño del sistema en la segunda fase. De esta manera, se asegura una construcción uniforme y robusta en todos los ámbitos del sistema.

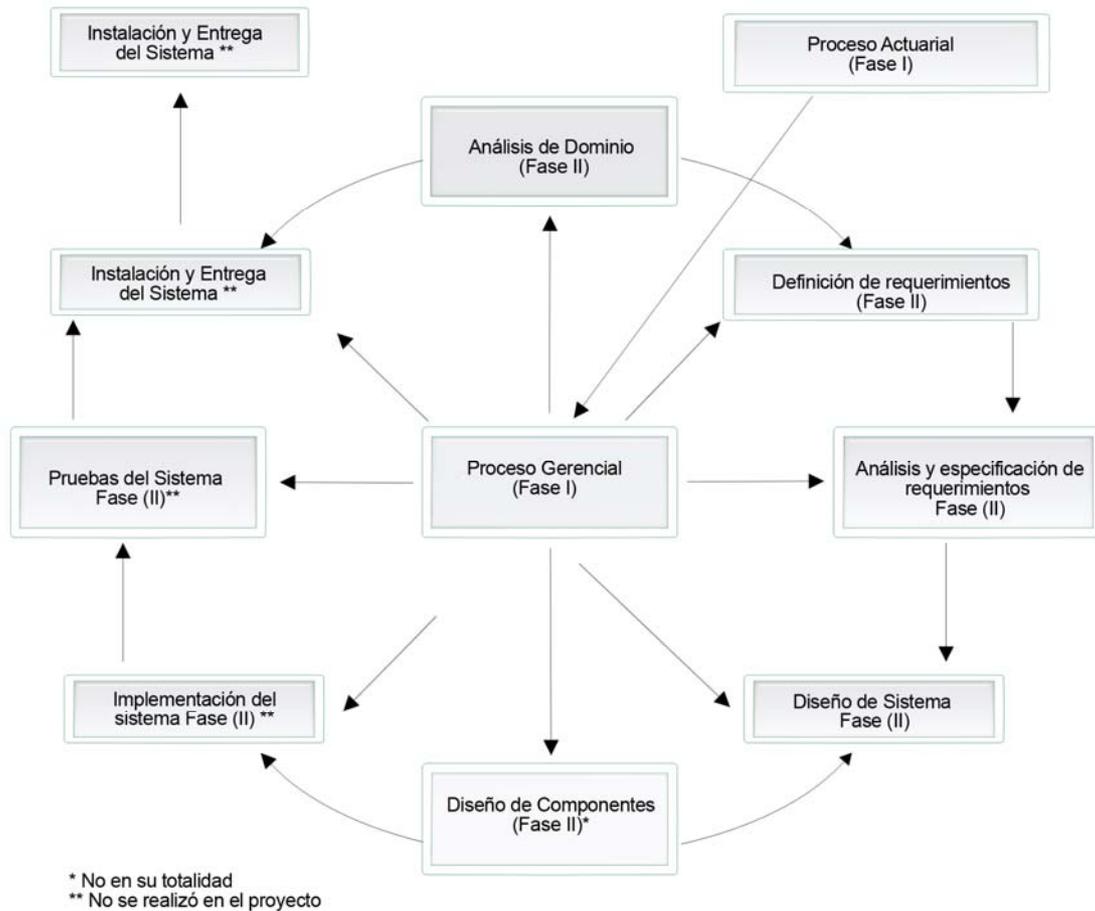


Figura. 1.2. Diagrama de la metodología del proceso Reloj [2].

### 1.4.1 FASE CIENCIAS ACTUARIALES

En la primera de estas fases se describen los basamentos teóricos necesarios de las Ciencias Actuariales, con los cuales se definen métodos, modelos y teorías que permitan construir y definir los algoritmos pertinentes al laboratorio. De la gama de soluciones viables dadas por las ciencias actuariales, se seleccionó para este proyecto la herramienta más apta que cumpla con ciertas características esenciales:



- Se adapte a la localidad, en este caso a Venezuela.
- Tenga un gran espectro de acción.
- Posea un grado de error aceptable, es decir, que ataque con fortaleza la incertidumbre y el riesgo generado.
- Tenga la capacidad de ser reconfigurable.

En esta fase se manejarán conceptos propios de la gestión de seguros y que se explicarán en detalle a lo largo de los próximos capítulos de esta monografía. Los fundamentos teóricos incluyen referencias a:

- Teoría de Credibilidad
- Teoría del Riesgo.
- Inferencia Estadística.
- Estadística Univariante.
- Estadística Multivariante.
- Variables Económicas (micro y macro).

#### **1.4.2 FASE DE DISEÑO Y MODELADO**

En esta fase se pormenoriza en el entorno computacional y se abordan los tópicos necesarios para llevar a cabo el diseño y la implementación del laboratorio actuarial como sistema programado. En este caso y por innumerables razones de estándares mundiales, rapidez, eficiencia y eficacia, se manejan los siguientes tópicos:

- Modelado bajo UML (*Unified Modeling Language*).
- Metodología del proceso de Reloj.
- Modelos de Bases de datos relacionales y objeto-relación.
- Teoría y modelos de sistemas de información.
- Arquitectura de computadores.
- Casos de Análisis.



Esta metodología es completamente dinámica y como se puede observar iterativa. El diagrama representado en la Figura 1.2, muestra los diferentes procesos que forman la metodología Reloj, comenzando en este caso en el **Proceso Actuarial (Fase I de nuestro proyecto)**, que es el agregado a la metodología seleccionada. Luego se procede a pasar al proceso gerencial, al cual se puede retornar en cualquier momento o punto del diseño. Esta metodología será expuesta a profundidad en el capítulo IV del proyecto.

### 1.5 PALABRAS CLAVES

- Teoría del riesgo.
- Teoría de credibilidad.
- Laboratorio Actuarial.
- Ciencias Actuariales.
- Modelos de credibilidad.
- Tarifación.
- Seguros.
- Sistema de información gerencial.



**Capítulo 2**

Fundamentos en Teoría del Riesgo y Seguros  
Generales



## 2.1 Preliminares

La rama de seguros es uno de los sectores económicos que basa sus actividades, fundamentos y características en las probabilidades. Cualquier factor, tasa, índice o variable que se desee observar o evaluar lleva tras de sí una serie de pasos matemático-estadísticos para su obtención y comportamiento.

Por tales razones, se debe profundizar (e innovar) en el estudio de los modelos y métodos matemáticos de los cuales se nutre, para así, optimizar el desempeño de las carteras, trayendo consigo, el mejoramiento de los ingresos y la estabilidad a largo plazo de la empresa aseguradora.

En el presente capítulo serán discutidos y evaluados los fundamentos matemáticos y estadísticos básicos de los cuales se componen las ciencias actuariales para sectores monoramo que se manejan dentro de la gerencia y planificación de grandes compañías de seguros en el mundo entero como Allianz, MAPFRE, Generali, entre otras.

## 2.2 Los procesos de riesgo y sus variables

**Riesgo**, es todo aquello que puede generar un evento no deseado y traer en consecuencias pérdidas y/o daños.

Según Bühlmann, el actuario caracteriza el riesgo no “por lo que es” sino por “las propiedades que este tiene”. Las características básicas del riesgo residen en dos propiedades:

- Pago de primas.
- Producción de siniestros.

Por lo tanto el riesgo se puede definir por un *par funcional*  $(P_t, S_t)$ , donde



$P_t$  = Primas cobradas en el tiempo  $(0,t]$ ,

$S_t$  = Suma de los montos de los siniestros ocurridos en  $(0,t]$ .

Ambos pueden ser funciones aleatorias (procesos estocásticos) o funciones que no dependen del azar. Normalmente se estipula que  $P_t$  y  $S_t$  sean funciones aleatorias, pues no se tiene un control sobre los siniestros ya que son eventos netamente aleatorios. [10]

En este apartado se profundizará el segundo factor  $S_t$ . Mientras que en el próximo punto se tratará a profundidad el estudio de la prima, es decir del segundo factor que compone al riesgo ( $P_t$ ).

El proceso aleatorio  $S_t$  es conocido como el *proceso acumulado de los siniestros*, este proceso se puede definir en función de dos variables aleatorias (v.a.):

- $N_t$  o *número de siniestros* ocurrido en el período  $(0,t]$ , y
- $Y_t$  *monto de los siniestros* ocurridos en el período  $(0,t]$ .

Ahora bien, el caso de estudio que compete al proyecto son los seguros generales, en estos, ambas variables son aleatorias completamente. Mientras que, por el contrario, en algunos seguros de vida el costo de los siniestros,  $Y_t$ , son sumas fijas para la compañía.

### 2.2.1 Número de siniestros

$N_t$  es una variable aleatoria discontinua (aunque es posible modelarla por una distribución normal), pues se desconoce con total certeza la cantidad de siniestros que se producirán en un punto de tiempo determinado (aleatoriedad) y ofrece saltos a lo largo del tiempo (discontinuidad) que representan el número de siniestros que ocurrieron en un tiempo  $t$  determinado para una póliza, cartera o individuo. Por lo tanto, es un proceso independiente uno de otro y completamente aleatorio.



Por esta cualidad de independencia de cada uno de los valores que se presentan a lo largo del tiempo, se asume que el comportamiento que mejor modela a  $N_t$  es un **Proceso de Poisson**, pues se describe como *proceso de incrementos independientes*.

$$P[N_t = K] = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \quad [10]$$

O, bajo ciertas circunstancias, también puede modelarse bajo una **Ley Binomial**.

$$P[M = k] = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k} \text{ donde } k = 1, 2, \dots, n$$

Pues en esencia la ocurrencia de un número dado de siniestros en un periodo de tiempo determinado puede modelarse bajo un esquema de pruebas repetidas de **Bernoulli**, tomando en consideración que es necesario que las pólizas sean idénticas e independientes entre ellas y que la aparición de un número de siniestro pueda producirse solo una vez como máximo.[3]

De esta manera, si la cantidad de datos es suficiente y la probabilidad de ocurrencia de un ensayo de Bernoulli es lo suficientemente pequeña, se presta para aproximar entonces la v.a a una distribución normal aplicando el **teorema del limite central** y tomando en consideración

$$X \sim \mathbf{B}(n, p) \text{ donde } \begin{cases} n > 30 \\ np > 4 \\ nq > 4 \end{cases} \implies X \overset{\approx}{\sim} \mathbf{N}(np, npq)$$

Es de hacer notar que mientras mayor sea el número de muestras, mejor será la aproximación.



En resumen, la v.a.  $N_t$  número de siniestros puede verse modelada de tres maneras diferentes para la realización de los análisis pertinentes dentro de las ciencias actuariales

- $N_t \sim \text{Poi}(\lambda)$
- $N_t \sim \text{Bin}(n, k)$
- $N_t \sim N(nk, nk(1-k))$

### 2.2.2 Monto de los siniestros

$Y_t$  es una variable aleatoria que representa el monto de un siniestro ocurrido en el tiempo  $t$ , al igual que,  $N_t$  es aleatoria pues se desconoce la cantidad exacta de siniestros al ocurrir el mismo, y que son entre si independientes y equidistribuidas.

Cuando se estudia el riesgo dentro de un periodo de tiempo dado,  $Y_t$  es un vector de v.a.  $Y_1, Y_2, \dots, Y_t$ . Al sumar todos estos montos  $Y_1 + Y_2 + \dots + Y_t$  dan lugar a otra v.a. que representa el monto acumulado de los siniestros, es decir  $S_t$

$$S_t = \sum Y_t$$

Esta v.a.  $S_t$  posee las misma cualidades de  $Y_t$ .

De aquí se genera entonces,

$$G_t(x) = P[S_t \leq x]$$

La cual representa la distribución de probabilidades del monto total de los siniestros. Esta distribución puede modelarse bajo algunas de las leyes de probabilidades conocidas, las más frecuentes son:

- $Y_t \sim \text{Geometrica}(k)$
- $Y_t \sim \text{Pareto}(a,b)$



---

-  $Y_t \sim \text{Exponencial}(\lambda)$

La forma que toma la distribución  $Y_t$  es diversa y depende por simplicidad de la distribución asumida para  $N_t$ .

Cada una de estas variables o su combinación generan la distribución del riesgo  $\theta$  que varia en un espacio paramétrico  $\Theta$ , y es la que permite la solución de los problemas de tarificación y administración que se plantean luego en el proyecto.

La composición de la distribución del riesgo  $\theta$  dependerá entonces de la manera como la empresa de seguros o el ente asegurador recoja los datos de los eventos siniestros de sus clientes, pues según esto se determina la metodología a implementarse a la hora de crear la función de distribución del riesgo  $\theta$ . Las maneras más comunes son:

1. Recolección de solamente los costes totales en unidades monetarias generadas por cada póliza, cada año. En este caso la única vía de trabajo es utilizar los costos totales y los modelos y estimadores se verán reflejados bajo esta variable.[5]
2. Se recogen los datos por separado del número de siniestros y coste de cada uno de ellos. La vía para trabajar de esta manera es generar un modelo compuesto por el número de siniestros y de la cuantía de los mismo para obtener así la función de distribución del riesgo  $\theta$ . [5]
3. Por último, empresas que recolectan solo el número de siniestros pues consideran que es la única variable que se encuentra bajo control del asegurador. Inferencia que se hace pues una vez ocurrido el siniestro no se sabe con certeza cual será su valor monetario. Al estar organizados de esta manera los datos debe trabajarse con el número de siniestros para generar la función de distribución del riesgo  $\theta$ . [5]

La vía óptima para desarrollar una distribución de riesgo es según el postulado 2., donde expresa la generación de  $\theta$  por la composición de ambas v.a. Esta es llamada **distribución de daño total**. [5]



En general se puede escribir,

$$O = F(x) = \sum_{N=0}^{\infty} P_N \cdot V^{N*}(x)$$

Donde

$P_N$  = Distribución del número de siniestros°

$V^{N*}$  = Convolución N-ésima de la variable aleatoria  $Y_t$  [5] [10]

Según la forma que adopte  $P_N$ ,  $F(x)$  recibe su nombre más la composición. Así, si  $P_N$  es una distribución *Poisson*,  $F(x)$  es una distribución de *Poisson compuesta*. Presentamos un cuadro resumen de las más populares distribuciones para cada una de las variables que componen el riesgo.

$P_N$	$Y_t$
Binomial	Geométrica
Poisson	Pareto
Poisson	Exponencial

Tabla 2.1 Distribuciones de probabilidad más comunes para la distribuciones de riesgo

### 2.3 El problema de los seguros

En los seguros existe una variada gama de condiciones de riesgo. Debido a que todas las acciones de los seguros se fundamentan en el azar; que generan la problemática colosal de velar por la equidad de los ingresos y egresos dentro de la empresa. Estos riesgos deben ser, obligatoriamente, minimizados lo más posible, para que la empresa este en la estabilidad añorada.

Esta problemática se divide en dos grandes puntos [3]:



- a) El problema de la tarificación.
- b) El problema de la administración

### 2.3.1 El problema de la tarificación

El objetivo primordial de tarifar, es *la obtención de precios equitativos para cada riesgo, teniendo en cuenta la solvencia del asegurador* [4]. Este precio o tarifa se conoce en el ámbito de los seguros como **prima**, que se define como:

*El precio del servicio más el margen explícito de beneficio y debe cumplir los principios de equidad y suficiencia de acuerdo con la naturaleza de los riesgos asumidos por el asegurador.* [4]

El principio de **equidad** determina que esa **prima** represente fielmente el riesgo de siniestralidad asociado a ella, de una cartera o una póliza en particular, pues la prima es una función del riesgo de la cartera y de los factores internos y externos del ambiente asegurador.

El principio de **suficiencia** se refiere a, que dichas primas deben aportar el capital completo para cubrir de manera eficiente los riesgos de la cartera, permitiendo así la rentabilidad de la compañía aseguradora.

La prima se compone de tres elementos [5]:

- Prima pura de riesgo.
- Sobreprima de seguridad.
- Costo adicional para el beneficio.

La **prima pura del riesgo** es aquella que se calcula empleando alguno de los métodos matemáticos que se expondrán a lo largo del proyecto, con los cuales se asegura que los costos generados por la siniestralidad no sean superiores a nuestro límite o beneficio.



---

Mientras, que la **sobreprima de seguridad** es un monto o tasa adicional que se recarga a la **prima pura**, que asegura a la empresa que los costos no superaran a los beneficios. Esta tasa puede ser calculada o colocada por medio de la experiencia de la empresa y los actuarios, o mediante análisis de sensibilidad estadístico que genera rango de variabilidad o intervalo de confianza donde puede moverse la prima (este apartado será discutido más adelante en este capítulo).

El **costo adicional para el beneficio**, es un valor que depende única y exclusivamente de la empresa. Pues es aquel, que refleja los gastos administrativos, costos fijos, tasas de ganancia y crecimiento que espera obtener la empresa en ese período. Detrás de este costo debe, necesariamente, haber un estudio económico-financiero de la empresa para lograr una tasa lo más apegada posible a la realidad económica de la empresa y el país.

Si se ambienta este cálculo de primas a la realidad venezolana (y Latinoamericana); vale la pena incluir por separado un cuarto elemento que compone esta prima, la **tasa inflacionaria**.

La inestabilidad que caracteriza a este indicador en los países latinoamericanos es tal, que las empresas de seguros y en especial los actuarios deben tener en cuenta para modelar perfectamente una prima y que esta no caduque en un tiempo inferior a lo estipulado (comúnmente anual), trayendo como consecuencia problemas económicos fuertes a la empresa.

*El precio correcto, que es llamado **rating** es vital, pues si es demasiado bajo representa una pérdida para la compañía y si es demasiado alto se pierde competitividad frente a otras empresas del ramo. Por tanto una de los labores del actuario consiste en encontrar métodos de cálculos de primas. [5]*

Consideremos ahora el riesgo como una v.a. **X** que representa el **monto acumulado de los siniestros** (número de siniestros o ambas). La prima, es una función **H** que asigna a un riesgo **X** un número real **P**, tal que



$$P = H(X)$$

Es decir, que dado un riesgo  $X$  el asegurador o ente asegurador está dispuesto a recibir  $P$  como contrapartida al pago aleatorio  $X$ . Por tanto la ganancia del asegurador es  $P - X$ , y es una variable aleatoria.

$$G = P - X$$

Existen dos sistemas generales de tarificación conocidos en las ciencias actuariales:

- a) Tarificación **a priori** o **class-rating** (clases de riesgo).
- b) Tarificación **a posteriori** o **experience-rating** (experiencia conocida).

### 2.3.1.1 Tarificación a priori

Es cuando el problema de tarificación se plantea al comienzo del período de cobertura. *El problema básico de la tarificación a priori es establecer clases de riesgo, de modo que dentro de ciertos límites puedan considerarse homogéneos, desde el punto de vista de la exposición al riesgo* [7]. Es decir, se parte del hecho de carteras homogéneas o agrupables y que se puede calcular primas iguales para este tipo de conglomerados. Es el punto de partida para tarifar cuando no se tienen datos siniestros sobre el individuo o cartera, debido a que son nuevos dentro del portafolio de la empresa aseguradora.

### 2.3.1.2 Tarificación a posteriori

En este sistema se toma como punto de partida una tarifa inicial (puede ser la calculada **a priori**) para cada unidad de riesgo (individuo o cartera) que se modifica en los períodos sucesivos de acuerdo con la experiencia individual o colectiva. Es una prima sensible que se ajusta al ambiente de riesgo que presenta la unidad. Este sistema se justifica basándose en que una unidad de riesgo posee cierta heterogeneidad, gracias a diversos factores de



---

riesgo que no son considerados en el estudio, o bien en las fluctuaciones que puedan tener los factores que si se consideraron y que se verán reflejados en la siniestralidad en el transcurso del tiempo.

Los dos sistemas anteriores lo que definen son estimaciones apropiadas de lo que los actuarios denominan la **Verdadera Prima Individual** (true individual premium), que es aquella prima **teórica** que cobraría a sus clientes un ente asegurador, al este solicitar sus servicios. *Para obtener este precio exacto la compañía debe* conocer la forma de la distribución de probabilidad de siniestralidad y los parámetros de esta distribución. Si esta información es asequible a la compañía, la verdadera prima individual se podrá cobrar [5]. Pero en la realidad es muy poco probable obtener esa información directa, por tal motivo es necesario estimar mediante una prima **a priori** esta tarifa, pues representa la mejor prima individual. Aquí se opta por información indirecta y supuestos (definir una distribución de probabilidad para los valores de los parámetros desconocidos). Esta información se obtiene entonces de datos de contratos similares o de la experiencia anterior sobre las mismas pólizas.

### 2.3.2 El problema de la administración

Es aquí donde recae la importancia de un trabajo en conjunto dentro de la entidad aseguradora entre los actuarios, gerentes y administradores de la misma, pues es el problema de la sensibilización de las primas en el tiempo no sólo con el estudio **a posteriori** sino, como se comenta al comienzo del capítulo, estudiando las variables macroeconómicas del país y el estado económico-financiero de la institución. Tomando en consideración esto se asegura (parcialmente según la profundidad y el detalle del estudio) la manutención de los gastos administrativos y la carga de siniestros de la empresa trayendo consigo la perdurabilidad de la misma en el largo plazo.

Existen en el ámbito asegurador gerencial, unos índices que le permiten a la compañía conocer su situación actual y de allí tomar decisiones que permitan mejorarla o mantenerla, según sea el caso. Estos índices son:



- a) Índice de liquidez.
- b) Índice de Solvencia.
- c) Índice de cobertura.

### 2.3.2.1 Índice de liquidez

Este índice mide la relación entre los créditos o cuentas por cobrar y el activo patrimonial de la empresa.

$$I_L = \frac{\text{Créditos o cuentas por cobrar}}{\text{Activo patrimonial}} \times 100$$

A nivel Internacional se evalúa la situación de la empresa o cartera según los siguientes estándares:

$I_L \leq 40\%$	Óptimo
$40\% < I_L \leq 50\%$	Aceptable
$I_L > 50\%$	Situación Grave

Tabla 2.2 Rango del índice de liquidez.

### 2.3.2.2 Índice de Solvencia

Mide la relación entre la **disponibilidad** (inversiones) contra las cuentas por pagar.

$$I_s = \frac{\text{Disponibilidad}}{\text{Cuentas por pagar}} \times 100$$



A nivel Internacional se evalúa la situación de la empresa o cartera según los siguientes estándares:

$I_S \geq 80\%$	<b>Óptimo</b>
$65\% \leq I_S < 80\%$	<b>Aceptable</b>
$I_L < 65\%$	<b>Situación Grave - Pésima</b>

Tabla 2.3 Rango del índice de solvencia.

### 2.3.2.3 Índice de Cobertura

Este índice muestra la relación entre la **disponibilidad contable** más los **bienes de activos fijos o inmóviles**, en relación a las cuentas por pagar (siniestros).

$$I_c = \frac{\text{Disponibilidad Contable} + \text{Bienes Fijos}}{\text{Cuentas por Pagar (Siniestros)}} * 100$$

A nivel Internacional se evalúa la situación de la empresa o cartera según los siguientes estándares:

$I_L \geq 100\%$	<b>Óptimo</b>
$80\% < I_L < 100\%$	<b>Aceptable</b>
$I_L < 80\%$	<b>Situación Grave - Pésima</b>

Tabla 2.4 Rango del índice de cobertura.

Es recomendable obtener su representación para el caso particular venezolano, para de esta manera tener índices más representativos a la hora de una toma de decisiones.

### 2.3.3 Algunos fundamentos de manejo de riesgos

Después del cobro de las primas y obtener el capital de esos cobros la tarea de la empresa es manejarlos de manera eficiente y eficaz para que se cumplan con todas y cada una de sus obligaciones, y por otro lado generar ganancias. Es primordial dentro de una empresa de seguros modelar contingencias para que así los años buenos subsidien a los años malos.

Esto se realiza mediante diferentes herramientas financieras o matemático-estadísticas de la administración de los seguros, en este proyecto no se aborda en profundidad este punto, pues solo se dedica a solventar el problema de la tarificación (no está incluido dentro del **Laboratorio Actuarial**) pero se realiza una reseña de su alcance y sus métodos.

Estas herramientas pueden dividirse como se muestra en la figura



Figura 2.1 División de métodos de administración de riesgo [11]

Estos métodos son independientes entre ellos y pueden ser combinados para una mayor eficiencia. No tienen un orden fijo, y deben ser aplicados según criterios de optimización además de tener la completa certeza que generarán resultados y no resulten económicamente inadecuados para la compañía.



### 2.3.3.1 Control de riesgos

Tienen como finalidad eliminar los riesgos presentes o de no ser posible esto, minimizarlos mediante la reducción de su frecuencia, de su severidad o la variación de su potencialidad [11].

#### 2.3.3.1.1 Eliminación

Su fin primordial es la manutención del riesgo por completo, suspendiendo la exposición al mismo. Esto puede realizarse simplemente con eliminar la cobertura o producto que da soporte a ese tipo de riesgo, teniendo en cuenta en no caer en costos altos, ni en tener pérdidas monetarias considerables dentro de la compañía. Entendiendo que al eliminar un riesgo se le otorgan posibilidades claras a la competencia dentro del ramo, debido a esto el estudio de su eliminación debe ser detallado y conociendo muy bien el mercado y los clientes. Método basado netamente en experiencia y gerencia de riesgos.

#### 2.3.3.1.2 Previsión – Reducción

Es un método aplicable si el criterio anterior falla, es muy costoso o no es gerencialmente correcta su eliminación. Este método plantea la reducción significativa de la frecuencia o cuantía de los riesgos a los que está sometido un cliente o entidad.

Las medidas tomadas para la reducción de la cantidad o frecuencia del riesgo se denominan **medidas de previsión**, mientras que aquellas que intentan reducir la severidad de las pérdidas se conocen como **medidas de reducción**.

Desde la perspectiva de la compañía aseguradora, las primeras medidas (previsión) se pueden contemplar desarrollando políticas de concientización dentro de las entidades o dirigidas hacia los usuarios para reducir los índices de accidentes; estas políticas pueden ser: publicitarias, charlas, talleres o seminarios sobre seguridad (industrial, salud, enfermedades, epidemias, automotriz, entre otras) dirigidos a las posibles fuentes de riesgo,

---



o también la difusión y promoción de uso de equipos de protección contra daños, visitas periódicas al médico, realizar actividades físicas, deportes, por nombrar algunos.

Por otro lado las medidas de **reducción** pueden verse reflejadas en una buena construcción y planificación detallada de las cláusulas dentro de los contratos de seguros para así disminuir (desde el enfoque de la empresa) los siniestros *válidos* ocurridos. Se muestra obvio que muchas de las posibilidades expuestas intrínsecamente influyen en ambos aspectos, tanto en la **reducción** como en la **previsión**, es entonces menester de la compañía aseguradora seleccionar la política más rentable y eficaz para la disminución acertada del riesgo que conlleva una póliza de seguros.

#### **2.3.3.1.3 Transferencia a otros diferentes al seguro**

El fin que persigue este apartado es el de *traspasar* el riesgo al cual esta expuesto una póliza o cartera de seguros a un tercero, para de alguna manera reducir la frecuencia de los siniestros, la severidad de los siniestros o que estos sean más predecibles para el actuario y la compañía aseguradora. En este caso el tercero puede tener varios papeles.

- Financiamiento del riesgo.
- Apertura económica de la empresa en la bolsa.
- Artificios financieros.

Se puede observar claramente que esta estrategia es desarrollada dentro de un plano netamente económico – financiero, para lo cual la empresa debe tener personal capacitado e insumos suficientes y de ese modo poder optar por esta vía, que a su vez es riesgosa pues se confía en un tercero o en la experiencia de los que manejen las acciones y su relación **compra-venta**, para generar ganancias que mermen la siniestralidad y den liquidez a la empresa.



---

#### 2.3.3.1.4 Retención

Es la manera clásica de enfrentar el riesgo en una empresa de seguros. Asumir los riesgos que se presenten en una cartera o a un individuo y correr con los gastos que ocasionen los siniestros. Estos gastos deben verse compensados con el cobro de la prima que siempre se espera (y es la parte que ahonda el proyecto) que los siniestros nunca sobrepasen el beneficio de la prima. Es decir, es la opción de *no hacer nada* frente a la administración del riesgo, sino esperar y confiar completamente en que los desarrollos estadísticos describan perfectamente las ocurrencias y generen los beneficios.

#### 2.3.3.1.5 Transferencia al seguro

El último tópico trata el problema de reaseguro. El Reaseguro es el Seguro de las Compañías de Seguros; es decir, es la transferencia de una parte de los riesgos que un asegurador directo asume frente a los asegurados. Existen diversos tipos de contratos de reaseguro, siendo los más comunes los conocidos como de "cuota-parte", "exceso de pérdida", de "excedente" y "facultativo".

De esta manera, la compañía puede asegurarse entonces de que los siniestros no sobrepasarán los beneficios, pues si llegase a pasar la compañía **reaseguradora** correría con los gastos en ese punto.

#### 2.3.3.2 Breve reseña en los fundamentos matemáticos dentro de la administración

En términos matemáticos

$$U'' - F \geq X$$

en la que  $U''$  representa el importe, capitalizado a la tasa  $i^*$ , del ingreso  $U'$  el cual representa



---

$$U' = \sum P_i$$

Donde  $P_i$  es las primas consideradas para la cartera *i-ésima*;  $F$  es el importe total de los gastos de administración de la cartera y  $X$  es el riesgo o asociado a la cartera.[3]

Lo que estipula que el ingreso bruto capitalizado, restados todos los gastos, debe ser **menor o igual** al valor observado de la v.a.  $X$ . Para que de esta manera, exista una ganancia o beneficio para la compañía aseguradora.

Si por el contrario esta inecuación no ocurriera, se esta en presencia de una ruina por parte de la empresa en esa cartera, la cual se debe a múltiples factores que pueden ser internos como externos. Estos último escapan de las manos de las entidades de seguros y su ocurrencia es casi nula o muy poco frecuente (huracanes, terremotos, desastres naturales, guerras, terrorismo). Mientras que los internos se deben a una mala planificación y consolidación de las tarifas.

Para este punto fueron halladas dos variables, que al ser calculadas mejoran y aseguran un óptimo desempeño de la compañía, estas son

- Retenciones
- Reservas

El problema de la **retención** (no confundir con la retención de los **fundamentos de manejo de riesgos** descritos en el punto anterior) consiste en determinar, para un **cartera de riesgo** dada, la porción a la cual está, el portador del seguro, en ventaja para conservar. Es decir, la parte del riesgo que puede ser procesada por la empresa de seguros de una cartera, portafolio o cliente específico. Este permite decidir la posibilidad de la transferencia a otras compañías de seguros (reaseguro), y cual parte exactamente debe ser reasegurada de esa cartera o portafolio. El problema es, influenciado directamente por el precio que el reasegurador solicita para tomar esa porción de riesgo como propia.[10]



En segundo lugar, se encuentra el problema de las reservas, que se entiende generalmente en un sentido de la contabilidad. Una reserva es un ajuste dejando un lado los fondos del final del año para un propósito específico como:

- Primas no ganadas,
- Siniestros pendientes (incluyendo los no reportados) y
- fluctuaciones de los resultados técnicos y en la inversiones.[10]

En conclusión, las **reservas** es la manera de entender que porción de los recursos de la cartera o empresa aseguradora están disponibles para *absorber* las fluctuaciones o problemas ocurridos en las operaciones técnicas [10].

Un cálculo elemental de las reservas se realiza mediante una relación *beneficio – costo* dentro de la compañía de seguros. El beneficio es representado por las **primas netas devengadas** por la compañía en un lapso determinado de tiempo, mientras que los costos lo representan los **siniestros totales cancelados** en el mismo lapso de tiempo.

$$\text{Reserva\_seguridad} = \text{Primas\_devengadas} - \text{Siniestros\_cancelados}$$

<b>Reserva_seguridad <math>\geq 0</math></b>	<b>Aceptable</b>
<b>Reserva_seguridad <math>&lt; 0</math></b>	<b>Situación Grave</b>

Tabla 2.5. Rango de las Reservas de Seguridad.

El nivel **aceptable**, indica lo que no debe ser utilizado por la compañía desde el punto de vista de liquidez monetario, pues este indica los recursos mínimos que se requieren para el año siguiente.

Al igual que todos los factores que están incluidos dentro de un sistema asegurador las **retenciones** y las **reservas** son **v.a.** que dependen del riesgo **X**, de las primas devengadas **P**, de las variables económicas externas e internas propias del ambiente asegurador y de la



empresa.

Estos dos (2) grandes problemas, con los cuales caracterizamos las funciones de los seguros, no deben ser tratados por separado ni dando importancia a uno sobre el otro. Debe haber cierta estabilidad y criterios de estabilidad para lograr un punto óptimo dentro de la administración de una empresa de seguros. Darle prioridades a uno sobre el otro puede traer graves problemas dentro de una empresa, o peor aún pérdidas del mercado o de beneficios para la empresa y sus accionistas.

#### 2.4 Principios en el cálculo de primas

En el presente punto se abordará de lleno el tema que concierne al proyecto, **el problema de la tarificación** estudiando para esto los principales modelos de cálculo de primas para seguros generales (o seguros de no vida).

La **prima**, como se explicó con anterioridad, es el precio que coloca un ente asegurador y que debe ser cancelado por el cliente, para poder absorber el riesgo que este presenta para un diverso hecho futuro fortuito. Entendiendo esto, es posible modelar el riesgo **X** de un portafolio, cartera o individuo como una **v.a.** que puede definirse en función de:

1. El número de siniestros  $N_t$  para un período  $[0,t)$ ,
2. El monto de los siniestros  $Y_t$  para un período  $[0,t)$  o
3. Ambos factores medidos en un período de tiempo  $[0,t]$ .

Dado esto, un principio de cálculo de prima es aquel que a partir de un riesgo **X** puede calcular un número real **P** que se define como prima, que estipula que de ocurrir **X** el ente asegurador esta dispuesto a obtener **P** en contrapartida por el suceso aleatorio de **X**. Por lo tanto **P – X** es la ganancia que obtendrá el asegurador, y que es a su vez es una **variable aleatoria**.



La obtención de la prima  $P$ , es entonces una función que depende de  $X$  la cual se puede modelar de acuerdo a la conveniencia o preferencia del actuario o ente asegurador, bajo dos especificaciones:

- Funciones de pérdida. Minimización de la pérdida. [8]
- Funciones de ganancia. Maximización de las ganancias. [9]

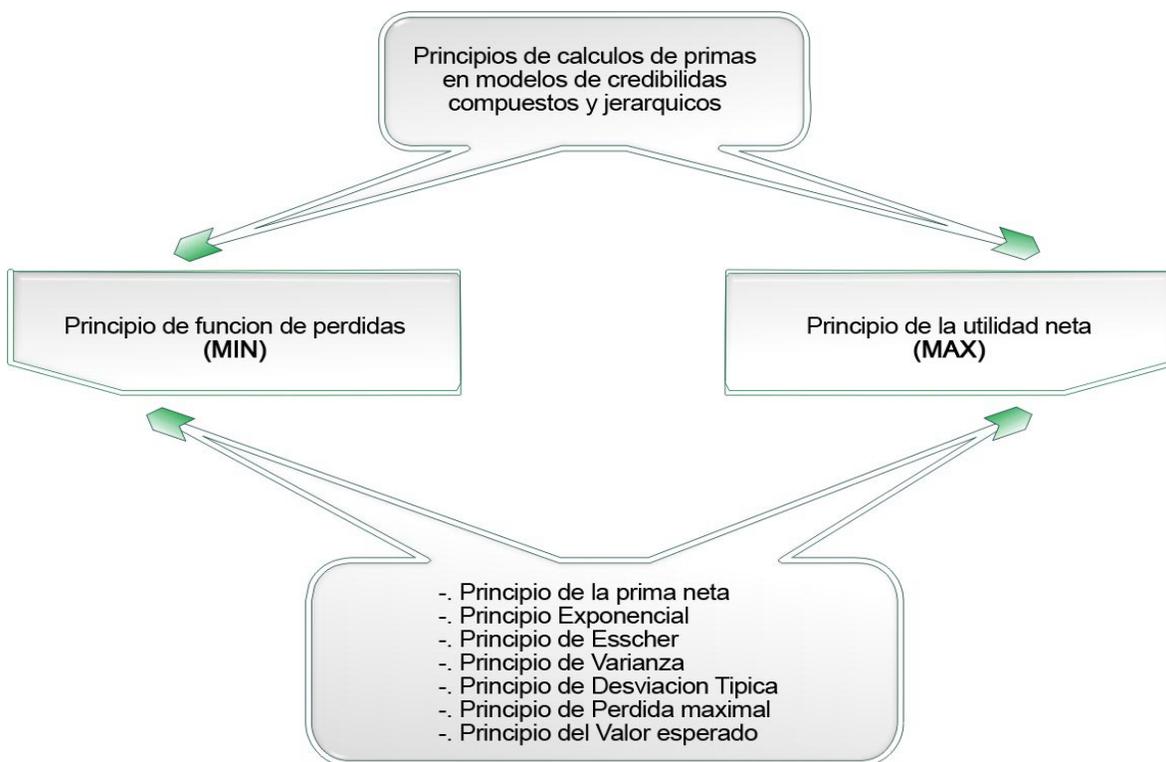


Figura 2.2 Principios de cálculo de primas

Ambas especificaciones conducen al mismo resultado, en este proyecto se ha seleccionado el esquema de funciones de perdida pues resulta más cómoda para los cálculos.

Ahora sea  $L$  una función de perdida que atribuye a algún  $(x,P)$  que pertenece a la pérdida sostenida por un decisor que toma la acción  $P$  y se encuentra con el resultado de algún experimento aleatorio de  $x$ . Entonces, dado un riesgo  $X$  con función de distribución  $F(x)$  y



una función de pérdida  $L$  la verdadera prima individual  $P$  que minimiza la pérdida esperada es: [5]

$$\int L(x, P) \cdot dF(x) - E[L(X, P)]$$

En la mayoría de las ocasiones el mínimo se determina diferenciando directamente la expresión anterior e igualando a cero. El valor obtenido de  $P$  de esta manera es la verdadera prima individual.

Mediante una tabla resumen se explican los principios más importantes que genera el estudio anterior y que fueron tomados de Gómez Déniz [5].

Función	Prima	Descripción
$L(x,P) = (x - P)^2$	$E_F[X]$	<b>Principio de prima neta o de equivalencia.</b> Es el principio más usado dentro del mundo asegurador. Y expresa que la prima a ser cobrada debe ser igual a lo que se espera que ocurra de siniestros.
$L(x,P) = \frac{1}{\alpha} (e^{\alpha x} - e^{\alpha P})^2$	$\frac{1}{\alpha} \log(E_F[e^{\alpha X}])$	<b>Principio de utilidad exponencial.</b> Viene en función del logaritmo de la función generatriz de momentos de la variable aleatoria $X$
$L(x,P) = e^{\alpha x} (x - P)^2$	$\frac{E_F[X e^{\alpha X}]}{E_F[e^{\alpha X}]}$	<b>Principio de Esscher.</b> El valor de $P$ viene dado con el cociente de la primera derivada de la función generatriz y la propia función generatriz.



$$L(x,P) = x(x-P)^2$$

$$E_F[X] + \frac{Var_F[X]}{E_F[X]}$$

**Principio de la Varianza.** Estima la siniestralidad media del riesgo, y proporciona también el recargo de seguridad que debe llevar la prima pura para atender a las desviaciones aleatorias de la siniestralidad. Por lo tanto se puede decir que la sobreprima de seguridad es proporcional a la varianza.

Tabla 2.6 Principios de cálculos de prima

El factor  $\alpha$  de denomina constante de aversión al riesgo o medida de **Arrow-Pratt** asociada al decisor que toma la función de pérdida  $L(x,P)$ , en el sentido de cuanto mayor es  $\alpha$  más adverso al riesgo será el decisor. Los valores más usados de este parámetro oscilan entre 0 y 0.00004. [5]

Para el presente proyecto se utilizarán solo dos (2) de estos principios, el de **prima neta** y el **principio de la varianza**. Pues son los que más se adaptan al ambiente actuarial venezolano y latinoamericano, además de ser mucho más cómodos para realizar los cálculos pertinentes.

En la literatura actuarial no existe un sistema axiomático comúnmente aceptado de propiedades que un principio de cálculo de prima debería satisfacer. Sin ser exhaustivos, contribuciones importantes en esta materia pueden encontrarse en Gerber (1979), Heilmann (1988) y Hürlimann (1994). [5]

Gerber [6] sostiene que las cinco propiedades que un principio de cálculo de prima  $P = H[X]$  debería satisfacer son:

1. **Sobreprima** de seguridad no negativa.



---

$$P \geq E[X],$$

Esto significa que para evitar la ruina técnica la ganancia esperada  $P = E[X]$  será no negativa.

2. **No estafa.** La prima no excederá a la reclamación máxima posible  $rX$ .

$$P > rX.$$

3. **Consistencia.** Para cada riesgo  $X$  y cada constante  $c$ ,

$$H[X + c] = H[X] + c$$

Esto significa que si el beneficio se incrementa en una constante esta constante tiene que ser añadida a la prima.

4. **Aditividad.** Si  $X_1$  y  $X_2$  son riesgos independientes:

$$H[X_1 + X_2] = H[X_1] + H[X_2].$$

Esto quiere decir que la incorporación de riesgos independientes no afecta a la prima total.

5. **Iteratividad.** Si  $X$  y  $S$  son riesgos arbitrarios:

$$H[X] = H[H[X | S]].$$

Esto significa que la prima para  $X$  puede calcularse en dos pasos. Primero calcular la prima condicional (dado  $S$ ) para  $X$ ,  $H[X | S]$  aplicando  $H$  a la distribución condicional de  $X$ . Esta prima condicional es una función de  $S$  y por lo tanto una variable aleatoria en si misma. Entonces se aplica  $H$  a la distribución de  $H[X | S]$  para obtener  $H[H[X | S]]$ .



Heilmann [8] sólo presta atención a la primera, mientras que Hürlimann no nombra la quinta pero añade estas otras:

6.  $H[c] = c$ , para toda constante  $c \geq 0$ .

Esto significa que para un riesgo no aleatorio  $X = c$ , con  $\mathbf{Prob}[X = c] = 1$ , la prima a cobrar será  $c$ .

**7. Homogeneidad positiva.**

$$H[c \cdot X] = c \cdot H[X], \text{ para todo } c \geq 0,$$

que resulta conveniente para corregir efectos inflacionarios.

Propiedad	Prima Neta	Exponencial	Esscher	Varianza
1	SI	SI	SI	SI
2	SI	SI	SI	NO
3	SI	SI	SI	SI
4	SI	SI	SI	SI
5	SI	SI	NO	NO
6	SI	SI	SI	SI
7	SI	NO	NO	NO

Tabla 2.7 Cuatro principios y las propiedades que verifica la verdadera prima [5]

**2.5 Teoría de credibilidad**

La teoría de la credibilidad es una colección de ideas concernientes al ajuste sistemático de las primas de los seguros a medida que se obtiene la experiencia de siniestralidad. [5]

Esta colección de ideas o **modelos**, buscan la estimación de la prima de los seguros colectivos, más o menos heterogéneos, combinando la información global disponible con la individual, frecuentemente esta última de carácter limitado. [13]



En un principio las estimaciones de las primas se realizaban basándose en un colectivo únicamente, pero al ir madurando los sistemas aseguradores y haciéndose cada vez más dinámicos, se hizo claro que existen características o rasgos individuales en cada póliza, grupo o conglomerado que, en cierta medida, influyen dentro de la tarifa o prima colectiva.

Debido a esto es que se introduce un factor ponderante para el cálculo de la prima de una persona, conglomerado o póliza que representa fielmente ese dinamismo.

$$P = z P^* + (z - 1) P'$$

Donde

**P** : Es la prima verdadera o pura.

**P\*** : Prima con conocimiento a posteriori. Prima individual.

**P'** : Prima con conocimiento a priori. Prima del colectivo.

**z** : **Factor de credibilidad.**  $0 \leq z \leq 1$

Con este factor es posible ponderar y balancear el conocimiento a priori **P'** (o colectiva) con el conocimiento a posteriori **P\*** (o individual).

En sus comienzos este factor fue intuitivo, pues no se contaba con el desarrollo estadístico-matemático necesario para su interpretación. Fue gracias al desarrollo de la estadística bayesiana, que enriqueció la metodología actuarial, que dio fundamentos robustos suficientes para la tarificación a posteriori y su relación con el *Teorema de Bayes*. El artífice de esta relación fue el matemático **Arthur Bailey**.

### 2.5.1 Estadística Bayesiana. Teorema de Bayes

La estadística bayesiana se apoya en el teorema de Bayes, el cual fusiona la información inicial, expresada mediante una distribución de probabilidades conocida como distribución inicial o a priori con las observaciones estadísticas, para producir una distribución final o a



posterior. La cual sintetiza ambas fuentes de información y es la base para extraer conclusiones y tomar decisiones. [13]

Esta solución a posteriori es la solución al problema de incertidumbre en la toma de decisiones dentro de un espacio de soluciones finitas, exhaustivas (que agote todas las posibilidades que parezcan razonables) y excluyentes (que la elección de alguno de los elementos excluya a todos los demás).

Es de importancia primordial, el establecimiento de una distribución inicial o a priori; ya sea mediante una estimación o suposición que venga por cálculos o experiencia propia del actuario. Pero es conocido que este factor viene inevitablemente condicionado a la información que se disponga de esa distribución o su comportamiento.

### Teorema de Bayes

Sea  $\{B_j\}$  una partición del espacio muestral o universo, entonces (de Moreno Muñoz 2003) [7]

$$\bigvee B_j = \Omega$$

$$\bigwedge B_j = \emptyset$$

Donde,

$B_j$  = *j-ésima* causa posible

$\Omega$  = Espacio muestral de los efectos o eventos que ocurrirán al producirse algún  $B_j$ .

$E$  = Subconjunto de  $\Omega$  con probabilidad de ocurrencia mayor o igual que cero. Es decir, el efecto producido al tomar algún  $B_j$ .

$$E \subset \Omega$$



$$1 \geq P(E) \geq 0$$

Entonces lo que se desea es la probabilidad de que un efecto  $E$  venga debido a la causa específica de  $B_j$  entonces, se tiene para cualquier partición  $\{B_j\}$  y un evento  $E \neq \emptyset$

$$P(B_j|E) = \frac{P(B_j) \cdot P(E|B_j)}{\sum P(B_j) \cdot P(E|B_j)}$$

Ahora de manera más generalizada.

Sea  $X_1, X_2, \dots, X_n$  una muestra de v.a. continua independiente dado  $\theta$ , e idénticamente distribuidas de las función de densidad de probabilidades  $f(x|\xi)$  donde  $\xi \in \Theta$

El problema consiste en aproximar el verdadero valor del parámetro  $\theta$ , esta estimación puede ser descrita como un problema de decisión donde, un decisor en un ambiente de incertidumbre debe seleccionar la opción más **verosímil** dentro del conjunto posible y se puede modelar de la siguiente forma:

**D**: Conjunto de decisiones según el problema

**E** =  $\Theta$

**B** =  $\{(d, \theta) : d \in D, \theta \in \Theta\}$

**u(b)** = **u(d,  $\theta$ )** Función de utilidad conveniente a cada problema

**v(b)** = **v(u,  $\theta$ )** Función de perdida conveniente a cada problema

Entonces ahora se debe definir la función a priori que permita conocer el comportamiento de la v.a.  $\theta$ .




---

$f(\theta)$	<i>Distribución inicial a priori.</i> Cuantifica el conocimiento inicial sobre $\theta$ .
$f(\mathbf{x} \mathcal{E})$	<i>Proceso generador de información muestral.</i> Proporciona información adicional sobre $\theta$ . <b>Función de densidad de probabilidad.</b>
$f(\mathbf{x} \mathcal{E})$	<i>Función de verosimilitud.</i> Contiene toda la información sobre $\theta$ proporcionada por la muestra $\underline{X}=(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Por Bayes tenemos entonces que

$$f(\mathcal{E}|\underline{X}) = \frac{f(\underline{X}|\mathcal{E}) \cdot f(\mathcal{E})}{f(\underline{X})}$$

Donde

$$f(\underline{X}) = \begin{cases} \int f(\underline{X}|\mathcal{E}) \cdot f(\mathcal{E}) \cdot d\mathcal{E} & \text{Caso Continuo} \\ \sum f(\underline{X}|\mathcal{E}) \cdot f(\mathcal{E}) & \text{Caso Discreto} \end{cases}$$

La cual representa la densidad marginal de  $\underline{X}$ . Llamada también **función predictiva** y es la que permite determinar los valores de la v.a.  $X$  que resultan más probables. Y por último la **función de verosimilitud**:

$$f(\underline{X}|\mathcal{E}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n|\mathcal{E}) = \prod f(x_i|\mathcal{E})$$

Como  $f(\theta | \underline{X})$  es función de  $\theta$ , es posible escribir

$$f(\mathcal{E}|\underline{X}) \propto f(\underline{X}|\mathcal{E}) \cdot f(\mathcal{E})$$

### ***DISTRIBUCIÓN FINAL $\propto$ VEROSIMILITUD $\cdot$ DISTRIBUCIÓN INICIAL***

Entonces  $f(\theta | \underline{X})$  que es la distribución a posterior proporciona todo el conocimiento que se tiene sobre  $\theta$ .



La selección de la distribución a priori es responsabilidad de quien realice el estudio. Esta selección puede hacerse gracias a información previa que describa esta distribución, experiencia en el ramo o por modelos de funciones previas no informativas, difusas o mínimo informativas para las cuales existes diversos criterios matemáticos para su aplicación.

Si puntualizamos este problema general al ámbito asegurador encontraremos lo siguiente:

- $\mathbf{X} = \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$  Variable aleatoria que representa la siniestralidad dada por: número de siniestros, costo de los siniestros, ambas.
- $\theta$  Factor de riesgo asignado a esa cartera.

Tenemos ahora un problema de decisiones bajo incertidumbre aplicado a la metodología bayesiana para el problema de tarificación en los seguros generales, donde:

- $\mathbf{f}(\mathbf{x} | \theta)$  Función de densidad de probabilidad.
- $\theta$  Valor de un riesgo dado fijo pero desconocido.
- $\mathbf{X}_i$  Siniestralidad en el año i-ésimo donde  $i = 1, 2, \dots, t$  independientes dado  $\theta$  e idénticamente distribuidas.
- $\Pi_0(\theta)$  Función de densidad de  $\theta$ , distribución a priori o como se le conoce en el escenario actuarial **distribución estructural**.
- $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  Distribución de la variable experiencia de siniestralidad para un contrato elegido aleatoria mente de la cartera y es  $f(\mathbf{x}) = \int f(\mathbf{x}|\mathcal{E}) \cdot \Pi_c(\mathcal{E}) \cdot d\mathcal{E}$

Entonces la prima neta de riesgo viene dada por (usando el principio de prima neta)

$$P(\mathcal{E}) = \int x \cdot f(x|\mathcal{E}) \cdot dx$$



Se pueden utilizar los otros criterios de cálculo de primas expuestos anteriormente, como lo son: exponencial, Esscher y varianza siguiendo el mismo desarrollo, la diferencia recae al sustituir  $P(\theta)$  en las demás ecuaciones.

De aquí se obtiene la prima neta de riesgo colectiva (a priori) como sigue:

$$P'_{n_0} = \int x \cdot f(x) \cdot dx = \int x \int f(x|\mathcal{E}) \cdot \Pi_0(\mathcal{E}) \cdot d\mathcal{E} = \int P(\mathcal{E}) \cdot \Pi_0(\mathcal{E}) \cdot d\mathcal{E}$$

Si ahora, se tiene información muestral en un período de tiempo  $t$  se observan las indemnizaciones  $x_1, x_2, \dots, x_t$  y asumiendo independencia de un período a otro, la distribución a posteriori puede calcularse por el teorema de **Bayes** bajo

$$\Pi_0(\mathcal{E}|m) = \frac{f(m|\mathcal{E}) \cdot \Pi_0(\mathcal{E})}{\int f(m|\mathcal{E}') \cdot \Pi_0(\mathcal{E}') \cdot d\mathcal{E}'}$$

Donde,

$f(\mathbf{m} | \theta) = f(x_1, x_2, \dots, x_t | \theta)$  Verosimilitud observada.

$\mathbf{M} = x_1, x_2, \dots, x_t$  Muestra la indemnización en un período de tiempo  $t$ .

Teniendo la distribución a posterior se puede calcular la prima neta bayesiana a posteriori para la muestra  $\mathbf{m}$  como

$$P'_{n_0} = \int P(\mathcal{E}) \cdot \Pi_0(\mathcal{E}|m) \cdot d\mathcal{E}$$

Haciendo un resumen de los principios para cálculos de primas que fueron expuestos en el apartado 2.4., tenemos (de Gómez Deniz) [5].



	Prima Neta	Exponencial
<b>Verdadera (P)</b>	$\int P(\Xi) \cdot \Pi_0(\Xi) \cdot d\Xi$	$\frac{1}{\alpha} \int e^{\alpha \cdot x} \cdot f(x \Xi) \cdot dx$
<b>Priori (P')</b>	$\int x \cdot f(x \Xi) \cdot dx$	$\frac{1}{\alpha} \log(\int [ \int e^{\alpha \cdot x} \cdot f(x \Xi) \cdot dx ] \cdot \Pi_0(\Xi x))$
<b>Posteriori (P*)</b>	$\int P(\Xi) \cdot \Pi_0(\Xi m) \cdot d\Xi$	$\frac{1}{\alpha} \log(\int [ \int e^{\alpha \cdot x} \cdot f(x \Xi) \cdot dx ] \cdot \Pi_0(\Xi))$

Tabla 2.8 Principios de cálculo de primas (prima neta y exponencial) para primas verdaderas, a priori y a posteriori [5]

	Esscher	Varianza
<b>Verdadera (P)</b>	$\frac{\int x \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot f(x \Xi) \cdot dx}{\int e^{\alpha \cdot x} \cdot f(x \Xi) \cdot dx}$	$\frac{\int x^2 \cdot f(x \Xi) \cdot dx}{\int x \cdot f(x \Xi) \cdot dx}$
<b>Priori (P')</b>	$\frac{\int P \cdot e^{\alpha \cdot P} \cdot \Pi_0(\Xi) \cdot d\Xi}{\int e^{\alpha \cdot P} \cdot \Pi_0(\Xi) \cdot d\Xi}$	$\frac{\int P^2 \cdot \Pi_0(\Xi) \cdot d\Xi}{\int P \cdot \Pi_0(\Xi) \cdot d\Xi}$
<b>Posteriori (P*)</b>	$\frac{\int P \cdot e^{\alpha \cdot P} \cdot \Pi_0(\Xi x) \cdot d\Xi}{\int e^{\alpha \cdot P} \cdot \Pi_0(\Xi x) \cdot d\Xi}$	$\frac{\int P^2 \cdot \Pi_0(\Xi x) \cdot d\Xi}{\int P \cdot \Pi_0(\Xi x) \cdot d\Xi}$

Tabla 2.9 Principios de cálculo de primas (Esscher y varianza) para primas verdaderas, a priori y a posteriori[5]

Es de hacer notar que para el cálculo de las primas anteriores la compañía (o el actuario) debe conocer la forma de la distribución de probabilidades del riesgo y los parámetros de esta distribución. Si esto es posible las primas de riesgo se podrán calcular sin problemas y no será necesario el ajuste de credibilidad mencionado al comienzo del apartado. Sin embargo, en teoría de credibilidad se supone que esta información no está disponible, por lo tanto se utiliza la prima a priori o colectiva para tarifar un contrato, pues es similar y representativa de la verdadera prima, y la información para ello se puede obtener de los datos de una población de contratos o portafolios similares.



El problema de la prima a priori o colectiva es que deja de lado la información individual, es decir la heterogeneidad de la cartera, por lo tal motivo se creo la fórmula de credibilidad para realizar una mejor aproximación a esa prima a posteriori hasta que esta pueda ser calculada o estimada.

En el apartado 2.6. se abordarán los métodos frecuentistas y los modelos de credibilidad para el cálculo de la prima. Los primeros realizan el cálculo de una prima neta a cobrase utilizando la información que se tienen de los contratos, es decir una prima a priori o colectiva para tarifar y que el ajuste que se emplea no tiene que ver en nada con las condiciones actuariales, sino más bien a las condiciones económicas del ambiente. Mientras que por el otro lado, los modelos de credibilidad utilizan la fórmula de credibilidad y la estadística bayesiana para calcular la prima a ser tarifada y también su ajuste en el tiempo haciendo variar el factor de credibilidad para dar peso a la información que vaya entrando en los modelos de acuerdo a sus características (individuales o colectivas).

### 2.5.2 La fórmula de credibilidad

La fórmula de credibilidad viene representada entonces por:

$$P = z P^* + (z - 1) P'$$

Donde

**P** : Es la prima verdadera o pura.

**P\*** : Prima con conocimiento a posteriori. Prima individual.

**P'** : Prima con conocimiento a priori. Prima del colectivo.

**z** : **Factor de credibilidad.**  $0 \leq z \leq 1$

El objetivo de la fórmula de credibilidad es establecer un balance entre la prima individual y la prima de la cartera.



Caso	Valores posibles de “z”	Interpretación
1	$z = 0$ o sea $z \rightarrow 0\%$	Si $z = 0 \rightarrow P = (1 - 0)P' + (0)P^* = P'$ Esto es, que cuando $z = 0$ se tiene credibilidad total, es decir se utiliza la prima teórica. $P = P'$ Se considera la experiencia de la cartera
2	$0 < z < 1$	Se dice que existe <b>credibilidad parcial</b> si $0 < z < 1$ . Si $z = 1 \rightarrow P = (1 - 1)P' + (1)P^* = P^*$
3	$z = 1$ o sea $z \rightarrow 100\%$	Cuando $z = 1$ se tiene también credibilidad total, pero en este caso, la prima propia es la más adecuada. Nótese que se debe tener experiencia para que dicha prima sea válida. $P = P^*$ Se considera la experiencia individual

Tabla 2.10 Interpretación del factor de credibilidad z [7]

En el apartado 2.6.2. se expone según cada modelos de credibilidad, como se aborda el cálculo del factor z de credibilidad y de las primas a priori P' y a posteriori P\*, según los modelos colectivos y jerárquicos.

### 2.6 Modelos de cálculo de primas en seguros generales.

En el siguiente apartado se presentan los diferentes tipos de modelos y métodos para la obtención de primas de riesgo para una entidad aseguradora, bajo dos corrientes los **métodos frecuentistas** y los **modelos de credibilidad bayesiana**.

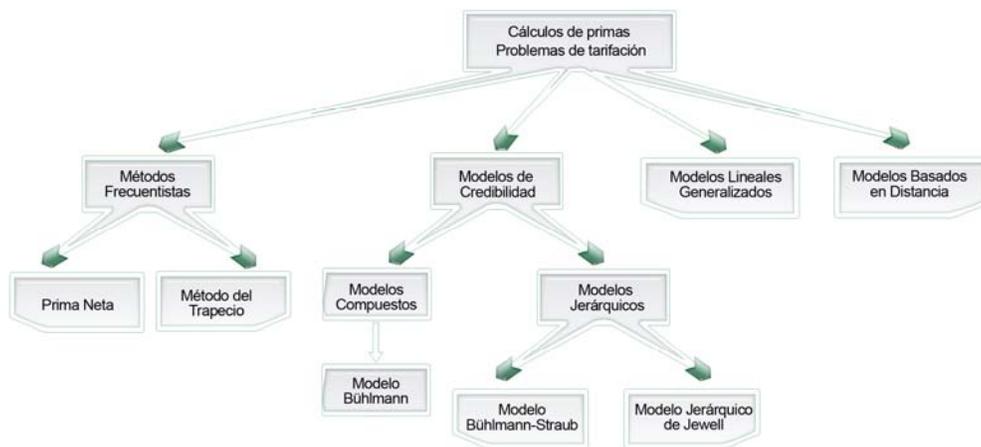


Figura. 2.3. Esquema de métodos y modelos para el cálculo de primas de riesgo.



### 2.6.1. Métodos frecuentistas

Estos métodos son lo más básicos del mundo actuarial, se basan en análisis de frecuencia, medidas de tendencia central y de dispersión para realizar sus cálculos. Para su aplicación es necesario obtener un cúmulo de datos importantes para su procesamiento y disminución del error. Se parte del hecho que la tarifa debe ser por lo menos igual a los gastos **esperados** (siniestros esperados) para así no tener pérdidas o descapitalizaciones

$$P \geq G(X)$$

Donde,

**P:** Primas totales cobradas de la cartera

**G:** Gastos de los siniestros asumidos, que dependen de la v.a. **X** que mide la siniestralidad de la cartera.

Lo primero es satisfacer la ecuación  $P = G(x)$ , pues con esta se asegura el pago de los costos. La diferencia a favor, se logra con la sobreprima de seguridad y las demás tasas e índices aplicables a la prima y que fueron detallados al comienzo del capítulo.

#### 2.6.1.1 Método de la esperanza.

Se parte de la base que **X** es un variable aleatoria que representa la siniestralidad de la cartera, portafolio o conglomerado. Además **X** se puede componer de  $N_t$  y  $Y_t$  ( $S_t$ ) estudiados anteriormente. Entonces se dice que

$$P = E(X) = E(N_t) E(S_t) [3]$$

Si completamos entonces el cuadro **2.11.** donde se estipulan las distribuciones de probabilidades más usadas para  $N_t$  y  $Y_t$  según el caso tenemos entonces que:



$N_t$	$Y_t$	$E(N_t)$	$E(Y_t)$	P
<b>Binomial</b>	Geométrica	$np_1$	$\frac{1}{p_2}$	$\frac{n \cdot p_1}{p_2}$
<b>Poisson</b>	Pareto	$\lambda$	$c \cdot \frac{\alpha}{\alpha - 1}$	$\frac{\lambda \cdot c \cdot \alpha}{\alpha - 1}$
<b>Poisson</b>	Exponencial	$\lambda_1$	$\frac{1}{\lambda_2}$	$\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$
<b>Normal</b>	Geométrica	$\mu$	$1/p$	$\mu/p$
<b>Normal</b>	Normal	$\mu_1$	$\mu_2$	$\mu_1 \cdot \mu_2$

**Tabla 2.11 Cálculo de la prima según el método de la esperanza para las distribuciones de probabilidad más comunes para la distribuciones de riesgo.**

Es de hacer notar que si el actuario posee un conglomerado de datos lo suficientemente grande para cada una de las v.a. ( $N_t$  y  $Y_t$ ) y no se encuentran expuesto a fuerzas encontradas, estas pueden ser aproximadas por una distribución normal y se estaría en presencia del último caso de la tabla, donde el producto de las medias de las distribuciones producen la prima, estas medias pueden ser obtenidas mediante su estimador máximo-verosímil que es el **promedio**.

### 2.6.1.2 Método del trapecio

El método del trapecio emplea como base el análisis de frecuencia del riesgo  $X$ , bajo las variables que lo componen ( $N_t$ ,  $Y_t$  y  $S_t$ ). Para esto, emplea la creación de un diagrama de frecuencias relativas para los **montos de los siniestros**  $Y_t$ , haciendo uso de clases o grupos de montos.





$$X_{\min} = \text{Minimo}[X_i]$$

$$X_{\max} = \text{Maximo}[X_i]$$

$$R = X_{\max} - X_{\min}$$

Por último, se calcula el tamaño del intervalo de clase (h). Para ello se debe calcular la relación entre el rango de los datos y el número de intervalos. Se tomará como tamaño del intervalo a un valor ligeramente superior a esta relación, es decir,  $h = \frac{R}{m}$

Para cada intervalo de clase i, los intervalos de clase están definidos mediante un límite inferior (**Lim Inf<sub>i</sub> = b<sub>i-1</sub>**) y por un límite superior (**Lim Sup<sub>i</sub> = b<sub>i</sub>**). Para el primer intervalo de clase, el límite inferior corresponde al valor más pequeño de la muestra (**Lim Inf<sub>1</sub> = b<sub>0</sub> = X<sub>min</sub>**), y el límite superior de cada intervalo siempre será igual al límite inferior más el ancho del intervalo de clase (**Lim Sup<sub>i</sub> = b<sub>i-1</sub> + h**). Para los demás intervalos diferentes al primero, el límite inferior será igual al límite superior del intervalo inmediatamente anterior (**Lim Inf<sub>i</sub> = Lim Sup<sub>i-1</sub>**).

De acuerdo con lo anterior se calculan los límites de los intervalos de clase, los cuales estarán dados de la siguiente manera, según se muestra en la tabla:

Intervalo	Límite Inferior b <sub>i-1</sub>	Límite Superior b <sub>i</sub>
1	$b_0 = X_{\min}$	$b_1 = b_0 + h$
2	$b_1 = b_0 + h$	$b_2 = b_1 + h$
3	$b_2 = b_1 + h$	$b_3 = b_2 + h$
⋮	⋮	⋮
i	$b_{i-1} = b_{i-2} + h$	$b_i = b_{i-1} + h$
⋮	⋮	⋮
m	$b_{m-1} = b_{m-2} + h$	$b_m = b_{m-1} + h$

Tabla 2.12 Número de clases, límite inferior y límite superior de las mismas.



Se denota

$n_i$  = Individuos expuestos al riesgo.

$m_i$  = Número de siniestros en la  $i$ -ésima clase.

$M_i$  = Monto de los siniestros en la  $i$ -ésima clase.

Entonces

$$\hat{p}_i = \frac{M_{max_i} - M_{min_i}}{2}$$

$$Fr_i = \frac{m_i}{j}$$

El uso de la frecuencia relativa se debe a que, la frecuencia absoluta es una medida que está influida por el tamaño de la muestra, al aumentar el tamaño de la muestra aumentará también el tamaño de la frecuencia absoluta. Esto hace que no sea una medida útil para poder comparar. Para esto es necesario el uso de la *frecuencia relativa*, que es el cociente entre la frecuencia absoluta y el tamaño de la muestra.

## 2.6.2 Modelos de credibilidad bayesiana

Existen en la literatura sobre Teoría de credibilidad tres modelos bases, que solventan de maneras diferentes el problema de la tarificación. Estos modelos se pueden dividir en dos ramas: *el modelo colectivo* y *los modelos jerárquicos o individuales*. Cada uno de ellos aporta una perspectiva diferente a la hora de abordar el cálculo de la prima, y serán explicados en detalle a continuación.

### 2.6.2.1 Modelos Colectivos

La interpretación del **modelo colectivo** parte de la base que el riesgo conlleva el hecho de que interviene como un todo la colectividad de los asegurados. El modelo colectivo de la



teoría del riesgo es una secuencia  $N, X_1, X_2, \dots$  de variables con las siguientes interpretaciones: [5]

- ▶  $N$  es la v.a. **Número de siniestros**.
- ▶  $X_i, i = 1, 2, \dots, N$  es la v.a. **Coste del  $i$ -ésimo siniestro**. Estas v.a. Son entre si independientes y equidistribuidas.
- ▶  $X = \sum X_i$  Es la v.a. **Coste total**.

De esta interpretación se parte para desarrollar el modelo que se expone a continuación. **Modelo de Bühlmann**, fue el primer modelo que demostró matemáticamente la fórmula de credibilidad y su apego con la estadística bayesiana, es el primer método de cálculo de prima robusto que se creó para las ciencias actuariales. La explicación de este método fue obtenida de MORENO MUÑOZ, M. y RAMOS BURGOA, L (2003) [7].

### 2.6.2.1.1 Modelo de Bühlmann

Con el objetivo de obtener la prima de riesgo de una cartera o conglomerado, se determina un estimador lineal que permita ponderar la experiencia individual con la de toda la cartera. Esta es la idea esencial del modelo original planteado por Bühlmann.

La cartera involucrada en el modelo se encuentra expuesta a un riesgo fijo y desconocido  $\Theta = \theta$ , durante el período de  $t$  años. Sean  $X_1, X_2, \dots, X_t$  los siniestros individuales en los períodos  $1, \dots, t$  respectivamente y sea  $\theta$  que se distribuye como la función estructural  $\Pi_\theta(\theta)$ . Conocido el parámetro de riesgo  $\Theta$ , las reclamaciones son condicionalmente independientes e idénticamente distribuidas con una función de distribución  $F_{X|\theta}(x, \theta)$  (en el Apéndice E se encuentra el desarrollo completo y la demostración del modelo de Bühlmann).



### 2.6.2.1.1.1 Variables del factor de credibilidad $z$ : Bühlmann14

De acuerdo con Bühlmann se requiere conocer las variables  $m$ ,  $a$  y  $s^2$  mismas que son desconocidas, sin embargo, dichos términos pueden ser sustituidos por estimadores. El modelo considera que si la cartera consta de  $k$  pólizas o conglomerados, se cuenta con los montos reclamados por cada uno de ellos en los últimos  $t$  períodos, esto es:

Conglomerado		1	2	...	j	...	k
Variable estructural		$\Theta_1$	$\Theta_2$	...	$\Theta_j$	...	$\Theta_k$
Período de Observación	1	$X_{11}$	$X_{21}$	...	$X_{j1}$	...	$X_{k1}$
	2	$X_{12}$	$X_{22}$	...	$X_{j2}$	...	$X_{k2}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
	t	$X_{1t}$	$X_{2t}$	...	$X_{jt}$	...	$X_{jk}$

Tabla 2.13. Observación de los conglomerados en el tiempo [7]

Al conglomerado  $j$ , le corresponde un vector aleatorio  $(\underline{X}_j) = (X_{j1}, X_{j2}, \dots, X_{jt})$ , donde  $X_{jt}$  representa la reclamación del  $j$ -ésimo conglomerado, en el momento  $t$ , y un parámetro de riesgo  $\Theta$ .

Ahora bien se parte del supuesto de que las  $k$  pólizas son independientes e idénticamente distribuidas, que conocido el parámetro  $\Theta_j = \theta_j$ , las variables  $X_{j1}, X_{j2}, \dots, X_{jt}$  son condicionalmente independientes e idénticamente distribuidas. Se hace énfasis que la cartera no es homogénea debido a los diferentes parámetros de riesgo a los que se encuentran expuestas las pólizas. Será necesario estimar las primas que se deben cobrar al asegurado, una vez conocida la clase de riesgo al que se encuentra expuesto  $\mu(\Theta_j)$ . Sin embargo, se desconoce la distribución del parámetro de riesgo, será necesario estimar cada uno de los parámetros que definen las ecuaciones:



$$\mu(\Theta) = M_{j^a} = (1 - z)m + zM_j \quad (2.4.27)$$

donde:

$$M_{j^a} = \overline{X_j} = \frac{1}{t} \sum_{r=1}^t X_{jr} \quad (2.4.28)$$

$$z = \frac{at}{s^2 + at} \quad (2.4.29)$$

El estimador de la prima involucra la prima correspondiente a toda la cartera  $m$  y el factor de credibilidad  $z$ , para el cual es necesario conocer tanto la heterogeneidad inducida por toda la cartera  $a$ , como la variación de la siniestralidad dentro de cada conglomerado sujeta al mismo riesgo  $s^2$ , siendo estas variables desconocidas y los montos de los siniestros de los conglomerados condicionalmente independientes e idénticamente distribuidos. Por lo anterior es posible estimarlos insesgadamente, obteniendo como estimadores los siguientes:

$$\hat{m} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \overline{X_j} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \sum_{r=1}^t \frac{X_{jr}}{t} \quad (2.4.30)$$

$$\hat{s}^2 = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \left( \frac{1}{t-1} \right) \sum_{r=1}^t (X_{jr} - M_j)^2 = \frac{1}{k(t-1)} \sum_{j=1}^k \sum_{r=1}^t (X_{jr} - M_j)^2 \quad (2.4.31)$$

donde:

$$M_j = \frac{1}{t} \sum_{r=1}^t X_{jr} \quad (2.4.32)$$

$$a = \frac{1}{k-1} \sum_{j=1}^k (M_j - \hat{m})^2 - \frac{1}{t} \hat{s}^2 \quad (2.4.33)$$



---

### 2.6.2.2 Modelos Jerárquicos

Los modelos jerárquicos son la representación de la madurez y entendimiento de los sistemas de seguros a lo largo del tiempo. Los modelos jerárquicos o individuales proponen que el riesgo se corresponde individualmente a cada póliza o asegurado; en este caso la cartera se considera dividida en  $p$  pólizas, a su vez cada una de las cuales puede estar dividida en  $r$  pólizas y así sucesivamente generando una estructura que se asemeja a un árbol, para crear las jerarquías.

A continuación se explican los dos modelos más importantes de esta rama: **el modelo de Bühlmann – Straub**, que es la base para el desarrollo de los demás modelos y fue el primero en introducir el carácter individual en el cálculo de las primas; y el **modelo jerárquico de Jewell** que es el que permite modelar bajo infinitos niveles de jerarquía para el cálculo de primas mucho más detalladas.

Al igual que los modelos colectivos la explicación de estos modelos fue obtenida de MORENO MUÑOZ, M. y RAMOS BURGOA, L (2003) [7].

#### 2.6.2.2.1 Modelo Bühlmann-Straub

Un portafolio de seguros generales es posible subdividirlo en grupos de riesgo que posean el mismo valor del parámetro ( $\Theta_j$ ). Se tomará para cada periodo de tiempo la suma ponderada de todos los individuos en los conglomerados sujetos a ese parámetro de riesgo conformados en grupos de riesgo. Los grupos de riesgo se determinan por algún factor de agrupación que disponga el actuario o que por estudios estadísticos (muchas veces multivariante) tenga más peso para el actuario (en el Apéndice E se encuentra el desarrollo completo y la demostración del modelo de Bühlmann-Straub).



Términos	Descripción
$W = \sum_{w=1}^k W_j = \sum_{j=1}^k \sum_{q=1}^t W_{jq}$	<p>Ponderador total de toda la cartera, que es la suma de los ponderadores existentes para los nuevos contratos (subdivididos por individuos que poseen el mismo valor del parámetro de riesgo) a lo largo del tiempo estudiado.</p>
$Z_j = \frac{aw_j}{s^2 + aw_j}$	<p>Factor de credibilidad de Bühlmann-Straub para determinar la prima correspondiente a los individuos en los conglomerados que poseen el mismo valor del parámetro de riesgo <math>\Theta_j</math>, ya que es el coeficiente que permite ponderar la experiencia particular de estos individuos con la prima teórica determinada en función de la experiencia global.</p>
$Z = \sum_{j=1}^k Z_j$	<p>Factor credibilidad acumulado considerando el total de la cartera. Esto es igual a la suma de cada uno de los factores de credibilidad correspondientes a los individuos que se encuentran sujetos al mismo grupo de riesgo.</p>
$X_{jw} = \sum_{q=1}^t \frac{W_{jq}}{W_j} X_{jq}$	<p>Nueva variable que representa el promedio ponderado de todas las reclamaciones de individuos en los conglomerados sujetos al mismo grupo de riesgo <math>j</math>.</p>
$X_{wv} = \sum_{j=1}^k X_{jw}$	<p>Promedio ponderado de las reclamaciones realizadas por todos los conglomerados sin importar el grupo de riesgo o el periodo de reclamación, corresponde a la suma de los grupos de riesgo <math>X_{jw}</math>, obtenidos para cada factor <math>j</math>.</p>
$X_{zv} = \sum_{j=1}^k \frac{Z_j}{Z} X_{jw}$	<p>Promedio ponderado de las reclamaciones realizadas por todos los conglomerados sin considerar el parámetro de riesgo <math>\Theta_j</math> al que se encuentren expuestas, pero en este caso los ponderadores están en función de los factores de credibilidad.</p>

Tabla 2.14. Términos del Modelo Bühlmann - Straub [7]



### 2.6.2.2.1.1 Variables del factor de credibilidad $z$ : Bühlmann-Straub

El objetivo es calcular el estimador de la prima de credibilidad Bühlmann- Straub por lo que será necesario conocer la prima global obtenida para toda la cartera  $m$ , y el factor de credibilidad  $z_j$ , del cual implica conocer la **heterogeneidad** inducida por toda la cartera  $a$ , y la variación generada por cada grupo de riesgo  $s^2$ . Estos parámetros son desconocidos y deben ser estimados. Dado que los montos de siniestros son condicionalmente independientes e idénticamente distribuidos, será posible estimarlos insesgadamente de la siguiente forma:

$$\hat{m} = M_0 = X_{zw} \quad (2.5.15)$$

$$\hat{s}^2 = \frac{1}{k(t-1)} \sum_{j,s} w_{js} (X_{js} - X_{jw})^2 \quad (2.5.16)$$

$$\hat{a} = \frac{w \left[ \sum_j w_j (X_{jw} - X_{ww})^2 - (k-1) \hat{s}^2 \right]}{w^2 - \sum w_j^2} \quad (2.5.17)$$

La razón de utilizar  $X_{zw}$  en lugar de  $X_{ww}$  en la estimación de  $m$ , proviene de la minimización del error cuadrático medio (**ECM**), ya que ambos podrían ser utilizados. Otro posible estimador de  $a$ , se encuentra determinado por

$$\hat{a} = \frac{1}{(k-1)} \sum_{j=1}^k z_j (M_j - M_0)^2 \quad (2.5.18)$$

con:



$$M_j = X_{jw}$$

$$M_0 = X_{zw}$$

$a$  y  $s^2$  son medidas de heterogeneidad, es decir que  $s^2$  mide las variaciones del riesgo a lo largo del tiempo, y  $a$  mide la heterogeneidad entre los grupos de riesgo.

#### 2.6.2.2.2 Modelo Jerárquico de Jewell

El modelo anterior permite estimar las primas para diferentes grupos de riesgo, sin embargo existen varios factores adicionales, por ejemplo, dentro de cada grupo de riesgo existe características como edad, sexo, peso, altura, entre otros. Ante esta situación, se determina el número de periodos para los cuales se tiene información en cada **subportafolio** los cuales se representan por  $tpj$ , donde  $p$  indica el grupo de riesgo (1ª división) y  $j=1, \dots, kp$  el segundo nivel según el factor seleccionado (sexo, edad, etc. Es de hacer notar que para la selección de estos factores se debe hacer un estudio multivariante, estos será discutido más adelante dentro del presente proyecto) dentro de cada sector. En este caso, en donde existen varios subportafolios y grupos de riesgo, se determina la prima por cada uno de los niveles de profundidad del modelo así como la prima global, por lo que el modelo a seguir cuando se presentan diferentes segmentos es una extensión del modelo con dos segmentos, por lo cual únicamente será exponer el modelo de dos segmentos y mostrar como podría llevarse a cabo esta generalización (en el Apéndice E se encuentra el desarrollo completo y la demostración del modelo jerárquico de Jewell).

En este modelo el portafolio puede dividirse en varios grupos; cada uno de ellos está caracterizado por un parámetro de riesgo, el cual sigue una determinada distribución. Dentro de cada grupo existen diferentes subgrupos caracterizados por otro parámetro de riesgo.

Un vez que se ha observado como se encuentra integrado cada grupo de riesgo, así como cada sector y el portafolio mismo, será factible agrupar aquellos grupos de riesgo que